
SIGILLVM + ACADEMIÆ : HARVARDIANÆ : IN : NOV : ANG
CHRISTO ET ECCLESIÆ

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Dreizehnter Theil.

Mit sieben lithographirten Tafeln.

Greifswald.
C. A Koch's Separat-Conto.

1849.

Inhaltsverzeichniss des dreizehnten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Trigonometrie.

Geodäsie.

Mechanik.

Astronomie.

Physik.

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Theorie der Modular- (elliptischen) Funktionen.

(Fortsetzung des Aufsatzes Nr. XL. in Thl. XI. S. 395.)

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

§. 14.

Hat man zu integriren

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}} = \int \frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

so sind wieder folgende Fälle zu unterscheiden:

I. Die Gleichung

$$\varphi(x)=0$$

hat vier imaginäre Wurzeln. In diesem Falle setze man

$$\varphi(x)=(a+2bx+cx^2)(a'+2b'x+c'x^2),$$

worin a, b, c, a', b', c' reelle Grössen sind. Damit $\varphi(x)$ positiv sei, da $\sqrt{\varphi(x)}$ als reell vorausgesetzt werden muss, müssen die Grössen $a+2bx+cx^2$, $a'+2b'x+c'x^2$ von demselben Vorzeichen sein. Löst man die Gleichungen

$$a+2bx+cx^2=0, \quad a'+2b'x+c'x^2=0;$$

so dürfen sie bloss imaginäre Werthe für x geben, d. h. es muss

$$b^2 - ac < 0,\ \ b'^2 - a'c' < 0;$$

oder, da b^2 und b'^2 positiv sind, es müssen a, c dasselbe Vorzeichen haben, eben so a', c', und zugleich muss

$$ac > b^2,\ \ a'c' > b'^2$$

sein. Zugleich ist

$$a + 2bx + cx^2 = \frac{(a+bx)^2 + (ac-b^2)x^2}{a};$$

also müssen $a + 2bx + cx^2$ und a, folglich auch c, dasselbe Vorzeichen haben, und eben so die Grössen $a' + 2b'x + c'x^2$, a', c'. Da aber $a + 2bx + cx^2$ und $a' + 2b'x + c'x^2$ dasselbe Vorzeichen (positiv oder negativ) haben, so haben folglich auch a, c, a', c' dasselbe Vorzeichen; zugleich darf x immer nur so gewählt werden, dass die Grössen $a+2bx+cx^2$, $a'+2b'x+c'x^2$ immer innerhalb der Gränzen der Integration dasselbe Vorzeichen haben, wie a, c, a', c'. Es ist leicht einzusehen, dass man diese letztern Grössen immer als positiv betrachten kann, da ja

$$(-a+2bx-cx^2)(-a'+2b'x-c'x^2) = (a-2bx+cx^2)(a'-2b'x+c'x^2),$$

und wir wollen also dies annehmen und die Gränzen der Integration darnach bestimmen. Setzen wir nun:

$$z^2 = \frac{a + 2bx + cx^2}{a' + 2b'x + c'x^2},\quad z = \pm\sqrt{\frac{a+2bx+cx^2}{a'+2b'x+c'x^2}};$$

so findet sich

$$x = \frac{-(b-b'z^2) \pm \sqrt{Z}}{c - c'z^2},$$

worin:

$$Z = (b - b'z^2)^2 - (a-a'z^2)(c-c'z^2).$$

Demnach

$$b + cx - (b'+c'x)z^2 = \pm\sqrt{Z}.$$

Da aber

$$(a' + 2b'x + c'x^2)z^2 = a + 2bx + cx^2,$$

so ergiebt sich:

$$(b'+c'x)z^2 + (a'+2b'x+c'x^2)z\frac{\partial z}{\partial x} = b + cx,$$

$$b+cx-(b'+c'x)z^2=(a'+2b'x+c'x^2)z\frac{\partial z}{\partial x}=\pm\sqrt{Z}$$

$$=(a'+2b'x+c'x^2)\left(\pm\sqrt{\frac{a+2bx+cx^2}{a'+2b'x+c'x^2}}\right)\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$=\pm\sqrt{\varphi(x)}\frac{\partial z}{\partial x},$$

d. h.

$$\sqrt{\varphi(x)}\,.\,\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{Z}.$$

Nun ist

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}=\int\frac{\frac{\partial x}{\partial z}\partial z}{\sqrt{\varphi(x)}}=\int\frac{\partial z}{\sqrt{\varphi(x)}\,\frac{\partial z}{\partial x}}=\int\frac{\partial z}{\sqrt{Z}},$$

und da Z von der Form der in §. 13. betrachteten Ausdrücke ist, so kann unsere Aufgabe als gelöst angesehen werden.

II. Die Gleichung $\varphi(x)=0$ habe zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Die beiden reellen Wurzeln seien ungleich, n und n', und zwar sei $n>n'$; der reelle Faktor des zweiten Grades sei $a+2bx+cx^2$, worin also $ac>b^2$ sein muss. Zugleich sieht man, dass $a+2bx+cx^2$, a, c dasselbe Vorzeichen haben müssen, das man, wie oben, immer als positiv voraussetzen kann. Hierbei hat man wieder folgende Fälle zu unterscheiden:

II. 1. Die Integrationsgränzen seien so gewählt, dass x immer zwischen n' und n sei, zugleich sei

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

Null für $x=n'$. Alsdann muss

$$\varphi(x)=(x-n')(n-x)(a+2bx+cx^2)$$

sein, damit $\varphi(x)$ positiv sei. Setzt man

$$z^2=\frac{x-n'}{n-x},$$

so bildet sich das vorliegende Integral in ein anderes von der Form in §. 13. um.

II. 2. Es sei $x<n'$, das Integral aber wieder Null für $x=n'$. In diesem Falle muss

$$\varphi(x)=(n'-x)(n-x)(a+2bx+cx^2)$$

sein. Setzt man hier

$$z^2 = \frac{n' - x}{n - x},$$

so erhält man wieder eine Form des §. 13.

II. 3. Endlich sei $x > n$, und das Integral sei Null für $x = n$. Alsdann ist

$$\varphi(x) = (x - n')(x - n)(a + 2bx + cx^2),$$

und man setze

$$z^2 = \frac{x - n'}{x - n},$$

um die verlangte Umbildung zu erhalten.

III. Die Gleichung $\varphi(x) = 0$ habe vier reelle Wurzeln a, b, c, d, welche so beschaffen seien, dass $d > c > b > a$. Nun ist entweder

$$\varphi(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d),$$

oder

$$\varphi(x) = -(x - a)(x - b)(x - c)(x - d).$$

Im ersten Falle ist $\varphi(x)$ nur positiv, wenn x zwischen b und c oder ausserhalb der Gränzen von a und d liegt; im zweiten dagegen nur, wenn x zwischen a und b, oder c und d liegt.

III. 1. Sei

$$\varphi(x) = +(x - a)(x - b)(x - c)(x - d),$$

und zwar

α) die Integrationsgränzen so gewählt, dass x zwischen b und c liege, während das Integral Null sei für $x = b$. In diesem Falle setze man

$$z^2 = \frac{x - b}{c - x} \cdot \frac{a - b}{a - c}.$$

β) x ausserhalb der Gränzen a und d, und das Integral sei Null für $x = d$. Alsdann setze man

$$z^2 = \frac{x - d}{x - a} \cdot \frac{c - a}{d - c}.$$

III. 2. Es sei

$$\varphi(x) = -(x - a)(x - b)(x - c)(x - d).$$

α) x zwischen a und b, das Integral Null für $x = a$. Man setze

$$z^2 = \frac{x-a}{b-x}\,\frac{d-a}{d-b}.$$

β) x zwischen c und d, das Integral Null für $x=c$. Man setze

$$z^2 = \frac{x-c}{d-x} \cdot \frac{c-a}{d-a}.$$

§. 15.

Wie in §. 10. kann man leicht eine Reihe neuer Formeln ableiten, die nach Art des §. 13. angewandt werden können.

Setzt man nämlich

$$(f(v))^2 = x,$$

worin $f(v)$ eine Modularfunktion von v ist, so ergiebt sich:

$$2fv.\frac{\partial f(v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \text{also } v = \int \frac{\partial x}{2f(v)\frac{\partial f(v)}{\partial v}}.$$

Ist also z. B.

I. $f(v) = \text{sn}(v)$, d. h. $(\text{sn}\, v)^2 = x$, so ist:

$$v = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\partial x}{\text{sn}\, v.\text{cn}\, v.\text{dn}\, v} = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)(1-m^2x)}}.$$

II. $f(v) = \text{cn}\, v$, d. h. $(\text{cn}\, v)^2 = x$, so ist:

$$v = \frac{1}{2}\int_x^1 \frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)(m'^2+m^2x)}}.$$

III. $f(v) = \text{tn}\, v$, d. h. $(\text{tn}\, v)^2 = x$, so ist:

$$v = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{x(1+x)(1+m'^2x)}}.$$

IV. $f(v) = \text{ctn}\, v$, d. h. $(\text{ctn}\, v)^2 = x$, so ist:

$$v = \frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{x(1+x)(m'^2+x)}}.$$

V. $f(v) = \text{dn}\, v$, d. h. $(\text{dn}\, v)^2 = x$, so ist:

$$v = \frac{1}{2} \int_x^1 \frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)(x-m'^2)}} .$$

VI. $f(v) = \text{tang.}\left(\frac{1}{2}\text{am}\, v\right)$, d. h. $(\text{tang.}\frac{1}{2}\text{am}\, v)^2 = x$, so ist:

$$v = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{x + 2(m'^2 - m^2)x^2 + x^3}} .$$

VII. $f(v) = \frac{1}{\text{sn}(M-v)}$, d. h. $\frac{1}{(\text{sn}(M-v))^2} = x$, so ist:

$$v = \frac{1}{2} \int_1^x \frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)(m^2-x)}} .$$

VIII. $f(v) = \text{cn}(M-v)$, d. h. $(\text{cn}(M-v))^2 = x$, so ist:

$$v = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{m'^2 x + (m^2 - m'^2)x^2 - m^2 x^3}} .$$

U. s. w.

§. 16.

Schreiten wir weiter zu Integralformeln, welche Modularfunktionen einschliessen. Die einfachsten sind folgende:

Man hat (§. 3.)

$$\frac{\partial . \text{am}\, v}{\partial v} = \text{dn}\, v ,$$

also auch

$$\frac{\partial . \text{am}(a+v)}{\partial v} = \text{dn}(a+v) ,$$

folglich

$$\int_0^v \text{dn}(a+v)\, \partial v = \text{am}(a+v) - \text{am}\, a .$$

$$\int_0^v \text{dn}(a-v)\, \partial v = \text{am}\, a - \text{am}(a-v) . \qquad (1)$$

Da

$$\text{am}\, v = \text{arc}(\sin = \text{sn}\, v) = \text{arc}(\cos = \text{cn}\, v) \text{ u. s. f.,}$$

so kann man in diesen Formeln die zweiten Glieder auch noch anders ausdrücken, wozu übrigens die Formeln in §. 5. auch dienen.

Setzt man hier $M-a$ statt a, so ergiebt sich (§. 6.):

$$m'\int_0^v \frac{\partial v}{\mathrm{dn}(a+v)} = \mathrm{am}(M-a) - \mathrm{am}(M-(a+v))$$

$$= \mathrm{arc}\left(\sin = \frac{\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}\right) - \mathrm{arc}\left(\sin = \frac{\mathrm{cn}\,(a+v)}{\mathrm{dn}\,(a+v)}\right), \quad (2).$$

$$m'\int_0^v \frac{\partial v}{\mathrm{dn}\,(a-v)} = \mathrm{arc}\left(\sin = \frac{\mathrm{cn}(a-v)}{\mathrm{dn}\,(a-v)}\right) - \mathrm{arc}\left(\sin = \frac{\mathrm{cn}\;a}{\mathrm{dn}\;a}\right);$$

oder auch:

$$m'\int_0^v \frac{\partial v}{\mathrm{dn}(a+v)} = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{\mathrm{ctn}\,a}{m'}\right) - \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{\mathrm{ctn}\,(a+v)}{m'}\right),$$

$$m'\int_0 \frac{\partial v}{\mathrm{dn}\,(a-v)} = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{\mathrm{ctn}(a-v)}{m'}\right) - \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{\mathrm{ctn}(a)}{m'}\right).$$

Setzt man in (1) statt des Modulus m den Modulus m_1 (§. 12.) und zugleich ma, mv statt a und v, so findet sich:

$$m\int_0^v \mathrm{cn}(a+v)\partial v = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = m\frac{\mathrm{sn}(a+v)}{\mathrm{dn}\,(a+v)}\right) - \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = m\frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}\right). \quad (3)$$

Vertauscht man in (3) die Moduln m und m', setzt ai, vi statt a, v, so findet sich (§. 11.):

(4)

$$m'\int_0^v \frac{\partial v}{\mathrm{cn}\,(a+v)} = \frac{1}{i}\left[\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{m' i \,\mathrm{sn}\,(a+v)}{\mathrm{dn}\;(a+v)}\right) - \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{m' i\,\mathrm{sn} a}{\mathrm{dn}\;a}\right)\right]$$

$$= \log.\sqrt{\left(\frac{\mathrm{dn}(a+v)+m'\mathrm{sn}(a+v)}{\mathrm{dn}(a+v)-m'\mathrm{sn}(a+v)} \cdot \frac{\mathrm{dn}\,a - m'\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}\,a + m'\,\mathrm{sn}\,a}\right)}.$$

Bekanntlich ist

$$\frac{\partial.\log\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}}{\partial t} = \frac{1}{1-t^2}, \quad \frac{\partial.\mathrm{sn}(M-u)}{\partial u} = -\frac{m'^2\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}^2 u}.$$

Setzt man also $t = m\,\mathrm{sn}\,(M-(a+v))$, so erhält man:

$$C + \log\sqrt{\frac{1+m\,\mathrm{sn}(M-a-v)}{1-m\,\mathrm{sn}(M-a-v)}} = \int \frac{\partial t}{1-m^2\mathrm{sn}(M-a-v)^2}$$

$$= \int \frac{-mm'^2\mathrm{sn}\,(a+v)\,\partial v}{\mathrm{dn}^2(a+v)\;\mathrm{dn}\,(M-a-v)^2} = \int -m\,\mathrm{sn}\,(a+v)\,\partial v,$$

also

(5)

$$m\int_0^v \operatorname{sn}(a+v)\partial v = \log\sqrt{\left(\frac{\operatorname{dn}a+m\operatorname{cn}a}{\operatorname{dn}a-m\operatorname{cn}a}\cdot\frac{\operatorname{dn}(a+v)-m\operatorname{cn}(a+v)}{\operatorname{dn}(a+v)+m\operatorname{cn}(a+v)}\right)}.$$

Da t nicht $=1$ sein darf, so darf auch hier nicht $a=0$ sein.

Vertauscht man in (5) die Moduln m und m', setzt ai, vi statt a, v, so ergiebt sich (§. 11.):

$$m'\int_0^v \operatorname{tn}(a+v)\partial v = \log\sqrt{\left(\frac{\operatorname{dn}(a+v)+m'}{\operatorname{dn}(a+v)-m'}\cdot\frac{\operatorname{dn}a-m'}{\operatorname{dn}a+m'}\right)}. \quad (6)$$

Macht man hier v negativ und setzt $M-a$ statt a, so erhält man (§. 6.):

$$\int_0^v \operatorname{ctn}(a+v)\partial v = \log\sqrt{\left(\frac{1+\operatorname{dn}a}{1-\operatorname{dn}a}\cdot\frac{1-\operatorname{dn}(a+v)}{1+\operatorname{dn}(a+v)}\right)}. \quad (7)$$

Vertauscht man hier m mit m', ai, vi gegen a, v, so erfolgt (§. 11.):

$$\int_0^v \frac{\partial v}{\operatorname{sn}(a+v)} = \log\sqrt{\left(\frac{\operatorname{cn}a+\operatorname{dn}a}{\operatorname{cn}a-\operatorname{dn}a}\cdot\frac{\operatorname{cn}(a+v)-\operatorname{dn}(a+v)}{\operatorname{cn}(a+v)+\operatorname{dn}(a+v)}\right)}. \quad (8)$$

Aus den gegebenen Formeln leiten sich eine Menge anderer durch Zusammensetzung ab. Beispielsweise mag eine einzige gebildet werden.

Da

$$\frac{\operatorname{sn}(a+v)+\operatorname{sn}(a-v)}{2} = \frac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v}{1-m^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2v},$$

so folgt aus (5):

$$m\int_0^v \frac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v\partial v}{1-m^2\operatorname{sn}a^2\operatorname{sn}v^2} = \log\sqrt{\left(\frac{\operatorname{dn}a+m\operatorname{cn}a}{\operatorname{dn}a-m\operatorname{cn}a}\right)}$$
$$-\frac{1}{2}\log\sqrt{\left(\frac{\operatorname{dn}(a+v)+m\operatorname{cn}(a+v)}{\operatorname{dn}(a+v)-m\operatorname{cn}(a+v)}\cdot\frac{\operatorname{dn}(a-v)-m\operatorname{cn}(a-v)}{\operatorname{dn}(a-v)+m\operatorname{cn}(a+v)}\right)}.$$

§. 17.

Ehe wir weiter gehen, müssen wir der Legendre'schen Bezeichnungsweise kurz gedenken. Legendre bezeichnet nämlich die Grösse

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}} = \text{mit } F(\varphi),$$

so dass, nach unserer Bezeichnungsweise, da

$$\arg.(\text{sn}=x) = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}$$
$$= \arg.(\text{sn}=\sin\varphi),$$
$$F(\varphi) = \arg.(\text{sn}=\sin\varphi).$$

Das Legendre'sche $F(\varphi)$ ist also das in §. 8. zu φ verlangte v, und da Legendre theilweise Tafeln für $F(\varphi)$ berechnet hat, so ist also das dort Verlangte in gewisser Beziehung schon geschehen.

Es ist nicht schwer, die oben erhaltenen Resultate in die Legendre'sche Bezeichnungsweise überzutragen. Wir wählen als Beispiel das Resultat in §. 13.

Dort ist

$$v = \arg\left(\text{cn} = \frac{a-bz^2}{a+bz^2}\right) = \arg(\text{cn}=\cos\varphi) = F(\varphi),$$

wenn

$$\cos\varphi = \frac{a-bz^2}{a+bz^2}.$$

Bezeichnet man den Modulus mit m, und setzt also

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}} = F(\varphi,m),$$

so ist demnach das dortige

$$y = \frac{F\left(\varphi, \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}\right)}{2\sqrt{ab}}, \quad \cos\varphi = \frac{a-bz^2}{a+bz^2}.$$

Ist also

1) $\text{sn}\,v=k$, so ist $v=\arg(\text{sn}=k)=F(\varphi,m)$, $\sin\varphi=k$
2) $\text{cn}\,v=k$, „ „ $v=\arg(\text{cn}=k)=F(\varphi,m)$, $\cos\varphi=k$,
3) $\text{tn}\,v=k$, „ „ $v=\arg(\text{tn}=k)=F(\varphi,m)$, $\text{tang}\,\varphi=k$,
4) $\text{ctn}\,v=k$, „ „ $v=\arg(\text{ctn}=k)=F(\varphi,m)$, $\text{cotg}\,\varphi=k$,
5) $\text{dn}\,v=k$, „ „ $v=\arg(\text{dn}=k)=F(\varphi,m)$, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{1-k^2}}{m}$.

Die oben gebrauchte Grösse M ist $F(\frac{\pi}{2}, m)$.

Die Formeln des §. 16. können auch durch cyklische Funktionen ausgedrückt werden. So ist, wenn $\varphi = \mathrm{am}.v$, $\alpha = \mathrm{am}.a$:

$$\mathrm{sn}(a+v) = \frac{\sin\alpha\cos\varphi\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi} + \sin\varphi\cos\alpha\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}}{1-m^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi},$$

$$\frac{\mathrm{dn}(a+v)-m\,\mathrm{cn}(a+v)}{\mathrm{dn}(a+v)+m\,\mathrm{cn}(a+v)}=\frac{\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}-m\cos\alpha\cos\varphi+m\sin\alpha\sin\varphi\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}-m^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}+m\cos\alpha\cos\varphi-m\sin\alpha\sin\varphi\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}-m^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Also:

$$m\int_0^\varphi \frac{\sin\alpha\cos\varphi\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}+\cos\alpha\sin\varphi\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}}{1-m^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}=$$

$$\log\sqrt{\left(\frac{\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}+m\cos\alpha}{\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}-m\cos\alpha}\cdot\frac{\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}.\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}-m\cos\alpha\cos\varphi+m\sin\alpha\sin\varphi\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}-m^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}.\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}+m\cos\alpha\cos\varphi-m\sin\alpha\sin\varphi\sqrt{1-m^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}-m^9\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi}\right)},$$

u. s. w.

§. 18.

Das Integral

$$\int_0^v \mathrm{dn}^2 v\, \partial v \qquad (1)$$

soll durch $E(v)$, oder, wenn man will, später auch durch $E(v,m)$ bezeichnet werden, so wie man überhaupt, zu grösserer Deutlichkeit, die Modularfunktionen durch

$$\mathrm{sn}(v,m),\ \mathrm{cn}(v,m),\ \mathrm{tn}(v,m),\ \mathrm{ctn}(v,m),\ \mathrm{dn}(v,m)$$

bezeichnen könnte. Die gebrauchte Bezeichnungsweise ist aber einfacher, und, so lange die Deutlichkeit nicht darunter leidet, mag sie beibehalten werden, so wie auch die Bezeichnung $E(v)$ gebraucht werden soll. Ist

$$\mathrm{am}\, v = \varphi,$$

so ist

$$\mathrm{dn}^2 v = 1 - m^2 \sin^2\varphi,\quad \partial v = \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\varphi}};$$

also ist dann

$$E(v) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - m^2 \sin^2\varphi}\, \partial\varphi,\quad \varphi = \mathrm{am}\, v.$$

Legendre bezeichnet dieses Integral durch $E(\varphi)$ oder $E(\varphi,m)$, so dass das hier gebrauchte $E(v)$ und das Legendre'sche $E(\varphi)$ ähnliche Bedeutung haben und für $\mathrm{am}\, v = \varphi$ zusammenfallen.

Eben so sei

$$\int_0^v \mathrm{dn}'^2 v\, \partial v = E'(v).$$

Hiernach ist

$$E(-v) = -E(v),\ E(0) = 0. \qquad (2)$$

Da

$$\mathrm{sn}^2 v = \frac{1 - \mathrm{dn}^2 v}{m^2},\ \mathrm{cn}^2 v = -\frac{m'^2 + \mathrm{dn}^2 v}{m^2};\ (\S.\ 2.)$$

so ist

$$\int_0^v \mathrm{sn}^2 v\,\partial v = \frac{1}{m^2}(v - E(v))$$
$$\int_0^v \mathrm{cn}^2 v\,\partial v = \frac{1}{m^2}(-m'^2 v + E(v)). \tag{3}$$

Setzt man in (1) $M-v$ statt v, so erhält man (§. 6.)

$$\int_M^v \frac{m'^2}{\mathrm{dn}^2 v}\partial v = -E(M-v),$$

woraus leicht:

$$\int_0^v \frac{\partial v}{\mathrm{dn}^2 v} = \frac{E(M) - E(M-v)}{m'^2}. \tag{4}$$

Man findet leicht:

$$\frac{\partial.\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{\partial v} = \frac{m'^2}{\mathrm{cn}^2 v} + m^2 - m^2\mathrm{sn}^2 v,$$

woraus, wenn man integrirt, und die vorstehenden Formeln beachtet:

$$\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{dn}\,v = m'^2\int_0^v \frac{\partial v}{\mathrm{cn}^2 v} + m^2 v - v + E(v),$$

also.

$$\int_0^v \frac{\partial v}{\mathrm{cn}^2 v} = \frac{\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + m'^2 v - E(v)}{m'^2}. \tag{5}$$

Da

$$\mathrm{tn}^2 v = \frac{1}{\mathrm{cn}^2 v} - 1,$$

so erhält man

$$\int_0^v \mathrm{tn}^2 v\,\partial v = \frac{\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{dn}\,v - E(v)}{m'^2}. \tag{6}$$

§. 19.

Setzt man $a \pm v$ statt v, so erhält man leicht:

$$\int_0^v \mathrm{dn}^2(a+v)\partial v = E(a+v) - E(a),$$

$$\int_0^v \mathrm{dn}^2(a-v)\partial v = E(a) - E(a-v);$$

hieraus

$$\int_0^v [-\mathrm{dn}^2(a+v) + \mathrm{dn}^2(a-v)]\,\partial v = 2E(a) - E(a-v) - E(a+v).$$

Aus §. 5. folgt leicht:

$$\begin{aligned}\mathrm{dn}^2(a-v) - \mathrm{dn}^2(a+v) &= (\mathrm{dn}(a-v) + \mathrm{dn}(a+v))(\mathrm{dn}(a-v) - \mathrm{dn}(a+v)) \\ &= \frac{4m^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \,\mathrm{sn}\, v \,\mathrm{cn}\, v \,\mathrm{dn}\, v}{(1 - m^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 v)^2} \\ &= 2 \,\mathrm{ctn}\, a \,\mathrm{dn}\, a . \frac{\partial . \left(\frac{1}{1 - m^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 v}\right)}{\partial v},\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\int_0^v (\mathrm{dn}^2(a-v) - \mathrm{dn}^2(a+v)\partial v &= \frac{2 \,\mathrm{ctn}\, a \,\mathrm{dn}\, a}{1 - m^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 v} - 2 \,\mathrm{ctn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \\ &= \frac{2m^2 \mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \,\mathrm{sn}^2 v}{1 - m^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 v},\end{aligned}$$

also endlich

$$2E(a) - E(a-v) - E(a+v) = \frac{2m^2 \mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \,\mathrm{sn}^2 v}{1 - m^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 v},$$

$$E(a+v) + E(a-v) = 2E(a) - \frac{2m^2 \mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \,\mathrm{sn}^2 v}{1 - m^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 v}.$$

Vertauscht man hier a und v, so ergiebt sich (2. des §. 17.):

$$E(a+v) - E(a-v) = 2E(v) - \frac{2m^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{cn}\, v \,\mathrm{sn}\, v \,\mathrm{dn}\, v}{1 - m^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 v}.$$

Durch Addition findet sich nun leicht:

$$E(a+v) = E(a) + E(v) - m^2 \mathrm{sn}\, a \,\mathrm{sn}\, v \,\mathrm{sn}(a+v). \qquad (1)$$

Setzt man hier $a = M - v$, so ist:

$$E(M) = E(M-v) + E(v) - m^2 \operatorname{sn}(M-v) \operatorname{sn} v$$
$$= E(M-v) + E(v) - m^2 \frac{\operatorname{cn} v \operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v},$$

woraus:

$$E(M-v) = E(M) - E(v) + m^2 \frac{\operatorname{cn} v \operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v}, \qquad (2)$$

und

$$E(M+v) = E(M) + E(v) - m^2 \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v}, \qquad (3)$$
$$E(M+v) + E(M-v) = 2E(M). \qquad (4)$$

Setzt man in (4) $M-v$ statt v:

$$E(2M-v) + E(v) = 2E(M),$$
$$E(2M+v) = E(v) + 2E(M);$$

woraus leicht:

$$E(2nM+v) = E(v) + 2nE(M),$$
$$E(2nM-v) = -E(v) + 2nE(M). \qquad (5)$$

Setzt man hier $M+v$ statt v, so ergiebt sich, mit Berücksichtigung von (3):

$$E((2n+1)M+v) = E(v) + (2n+1)E(M) - \frac{m^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v},$$
$$E((2n+1)M-v) = -E(v) + (2n+1)E(M) + \frac{m^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v}. \qquad (6)$$

Dadurch ist die Funktion $E(v)$, so lange v reell bleibt, bekannt, wenn sie es innerhalb der Gränzen 0 und M ist.

§. 20.

Setzt man in (1) des §. 18. vi statt v, so findet sich:

$$\int_0^v \operatorname{dn}^2(vi)\,\partial v = \frac{E(vi)}{i},$$

d. h.

$$\int_0^v \frac{\mathrm{dn}'^2 v}{\mathrm{cn}'^2 v}\partial v = \frac{E(vi)}{i} = \int_0^v \left(\frac{m^2}{\mathrm{cn}'^2 v} + m'^2\right)\partial v,$$

woraus, mit Beachtung der Formeln des §. 18.:

$$E(vi) = i\,[v - E'(v) + \mathrm{tn}'\,v\,\mathrm{dn}'\,v]. \qquad (1)$$

Setzt man hier $v = 2nM'$, so erhält man, wenn man (5) des §. 18 beachtet:

$$E(2nM'i) = i\,[2nM - 2nE'(M')],$$

also, wenn man in (1) §. 19. $u = 2nM'i$ setzt und §. 11. beachtet:

$$E(a + 2nM'i) = E(a) + 2ni\,(M' - E'(M')). \qquad (2)$$

Aehnliche Formeln lassen sich leicht weiter bilden.

Bezeichnet man, wie in §. 12., den Werth von $E(v)$ für den Modulus $\frac{1}{m}$ durch $E_1(v)$, so ist:

$$E_1(v) = \int_0^v \mathrm{dn}_1{}^2 v\,\partial v = \int_0^v \mathrm{cn}^2\left(\frac{v}{m}\right)\partial v,$$

$$E_1(mv) = \frac{E(v) - m'^2 v}{m},$$

$$E_1(v) = \frac{mE\left(\frac{v}{m}\right) - m'^2 v}{m^2}. \qquad (3)$$

§. 21.

Zwischen den Grössen M, M', $E(M)$, $E'(M')$ besteht eine Gleichung, die nun aufgesucht werden soll.

Es ist, wie sich aus §. 18. und §. 3. ergiebt:

$$E(M) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m^2 \sin^2\varphi}\,\partial\varphi,$$

$$E'(M') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m'^2 \sin^2\varphi}\,\partial\varphi = E(M', m')$$

nach der in §. 18. noch erwähnten Bezeichnung. Ferner:

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - m^2\sin^2\varphi}}, \quad M' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - m'^2\sin^2\varphi}}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial M}{\partial m}=\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1-m^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}-\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}$$
$$=\frac{1}{m}\int_0^M\frac{\partial v}{\mathrm{dn}^2 v}-\frac{M}{m}=\frac{E(M)}{mm'^2}-\frac{M}{m},$$

also

$$E(M)=m'^2\left(M+m\frac{\partial M}{\partial m}\right). \qquad (1)$$

Ganz eben so findet sich durch Differenziation von $E(M)$:

$$M=E(M)-m\frac{\partial.E(M)}{\partial m}. \qquad (2)$$

Hieraus:

$$E'(M')=m^2\left(M'+m'\frac{\partial M'}{\partial m'}\right),$$
$$M'=E'(M')-m'\frac{\partial.E'(M')}{\partial m'}.$$

Da aber allgemein

$$\frac{\partial R}{\partial m'}=\frac{\partial R}{\partial m}\cdot\frac{\partial m}{\partial m'}=-\frac{\partial R}{\partial M}\cdot\frac{m'}{m},$$

so ist

$$\left.\begin{aligned}E'(M')&=m^2M'-mm'^2\frac{\partial M'}{\partial m},\\ M'&=E'(M')+\frac{m'^2}{m}\frac{\partial.E'(M')}{\partial m}.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Hieraus folgt:

$$M'\frac{\partial.E(M)}{\partial m}+E(M)\frac{\partial M'}{\partial m}+M\frac{\partial.E'(M')}{\partial m}+E'(M')\frac{\partial M}{\partial m}$$
$$=\frac{\partial.[M'E(M)+ME'(M')]}{\partial m}=MM'(m^2-m'^2)+M'E(M)-ME'(M').$$

Eben so:

$$M'\frac{\partial M}{\partial m}+M\frac{\partial M'}{\partial m}=\frac{\partial.(MM')}{\partial m}=MM'(m^2-m'^2)+M'E(M)-ME'(M'),$$

mithin:

$$\frac{\partial.[M'E(M)+ME'(M')]}{\partial m}-\frac{\partial.(MM')}{\partial m}=0,$$

$$M' E(M) + M E'(M') - M M' = \text{Const}.$$

Um die, bloss von m abhängende Konstante zu bestimmen, setzen wir $m=0$, $m'=1$; alsdann ist:

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad M' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi}, \quad E(M) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial\varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$E'(M') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, \partial\varphi = 1;$$

also

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi} = C, \quad C = \frac{\pi}{2};$$

d. h.

$$M' E(M) + M E'(M') - M M' = \frac{\pi}{2}, \tag{4}$$

oder nach Legendre'scher Bezeichnung:

$$\left.\begin{array}{r} F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-m^2}\right).\; E\left(\frac{\pi}{2}, m\right) + F\left(\frac{\pi}{2}, m\right).E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-m^2}\right) \\ -F\left(\frac{\pi}{2}, m\right).F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-m^2}\right) \end{array}\right\} = \frac{\pi}{2},$$

welcher Satz der Legendre'sche Satz heisst.

§. 22.

Es bleibt, zur Vervollständigung der Theorie von $E(v)$, noch übrig, zu zeigen, wie $E(v)$ berechnet werden kann für v zwischen 0 und M.

Setzt man

$$\varphi = \text{am}.v,$$

so haben wir in §. 9. gesehen, wie zu jedem φ das zugehörige v gefunden werden kann.

Ganz wie dort findet man hier

$$E(v) = \varphi - \left(\frac{1}{2}\right)^2 f_1(\varphi).m^2 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 f_2(\varphi).m^4 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 f_3(\varphi).m^6$$
$$+ \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 f_4(\varphi).m^8 - \ldots\ldots$$

Da, durch Legendre's Berechnung in einiger Beziehung die Berechnung geschehen ist, so kennt man also einige Werthe von $E(v)$. Die Werthe von $E(v)$ wären in die nach §. 8. aufzustellenden Tafeln neben die von v zu setzen.

§. 23.

Den Werth des Integrals

$$\int_0^v \frac{\operatorname{sn}^2 v\,\partial v}{1-m^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 v}$$

bezeichnen wir durch $J(v,a)$, d. h. wir setzen:

$$\int_0^v \frac{\operatorname{sn}^2 v\,\partial v}{1-m^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 v} = J(v,a). \qquad (1)$$

Nun ist:

$$\frac{1}{\operatorname{dn} a} - \frac{\operatorname{dn} a\operatorname{sn}^2 v}{1-m^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 v} = \frac{\operatorname{cn}^2 v}{\operatorname{dn} a(1-m^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 v)},$$

also

$$\int_0^v \frac{\operatorname{cn}^2 v\,\partial v}{1-m^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 v} = v - \operatorname{dn}^2 a\, J(v,a). \qquad (2)$$

Ferner ist

$$1 - \frac{\operatorname{dn}^2 v}{1-m^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 v} = \frac{m^2\operatorname{cn}^2 a\operatorname{sn}^2 v}{1-m^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 v},$$

also

$$\int_0^v \frac{\operatorname{dn}^2 v\,\partial v}{1-m^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 v} = v - m^2\operatorname{cn}^2 a\,.\,J(v,a). \qquad (3)$$

Aus (1) und (2):

$$\int_0^v \frac{\partial v}{1-m^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 v} = v + m^2\operatorname{sn}^2 a\, J(v,a). \qquad (4)$$

Ferner ist, wie man leicht findet:

$$\frac{m'^2\operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{cn}^2 a\left(1-\left(\frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{cn} a}\right)^2\operatorname{sn}^2 v\right)} + \frac{\operatorname{dn}^2 v}{1-m^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 v} = \frac{\operatorname{dn}^2 v - m^2\operatorname{sn}^2 v\operatorname{cn}^2 v}{\operatorname{cn}^2 v - \operatorname{tn}^2 a\operatorname{dn}^2 a\operatorname{sn}^2 v\operatorname{dn}^2 v}.$$

$$\log\sqrt{\frac{\operatorname{cn}(a-v)}{\operatorname{cn}(a+v)}}=\log\sqrt{\left(\frac{1+\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{tn}v\operatorname{dn}v}{1-\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{tn}v\operatorname{dn}v}\right)},$$

$$\frac{\partial.}{\partial v}\log\sqrt{\frac{\operatorname{cn}(a-v)}{\operatorname{cn}(a+v)}}=\frac{\operatorname{dn}a\operatorname{tn}a\,(\operatorname{dn}^2v-m^2\operatorname{sn}^2v\operatorname{cn}^2v)}{\operatorname{cn}^2v-\operatorname{tn}^2a\operatorname{dn}^2a\operatorname{sn}^2v\operatorname{dn}^2v};$$

demnach

$$\frac{m'^2}{\operatorname{cn}^2a}\int_0^v\frac{\operatorname{sn}^2v\,\partial v}{1-\left(\frac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{cn}a}\right)^2\operatorname{sn}^2v}+\int_0^v\frac{\operatorname{dn}^2v\,\partial v}{1-m^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2v}$$
$$=\frac{1}{\operatorname{dn}a\operatorname{tn}a}\log\sqrt{\frac{\operatorname{cn}(a-v)}{\operatorname{cn}(a+v)}},$$

und mit Beachtung von (3):

$$\int_0^v\frac{\operatorname{sn}^2v\,\partial v}{1-\left(\frac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{cn}a}\right)^2\operatorname{sn}^2v}$$
$$=-\frac{\operatorname{cn}^2a}{m'^2}v+\frac{m^2}{m'^2}\operatorname{cn}^4a\,J(v,a)+\frac{\operatorname{cn}^3a}{m'^2\operatorname{dn}a\operatorname{sn}a}\log\sqrt{\frac{\operatorname{cn}(a-v)}{\operatorname{cn}(a+v)}}.\quad(5)$$

Ferner ist:

$$\frac{\operatorname{dn}^2v}{1-\left(\frac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{cn}a}\right)^2\operatorname{sn}^2v}-\frac{m'^2\operatorname{sn}^2v}{\operatorname{cn}^2a-\operatorname{dn}^2a\operatorname{sn}^2v}=1,$$

also

$$\int_0^v\frac{\operatorname{dn}^2v\,\partial v}{1-\left(\frac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{cn}a}\right)^2\operatorname{sn}^2v}-\frac{m'^2}{\operatorname{cn}^2a}\int_0^v\frac{\operatorname{sn}^2v\,\partial v}{1-\left(\frac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{cn}a}\right)^2\operatorname{sn}^2v}=v,$$

d. h.

$$\int_0^v\frac{\operatorname{dn}^2v\,\partial v}{1-\left(\frac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{cn}a}\right)^2\operatorname{sn}^2v}$$
$$=m^2\operatorname{cn}^2a\,J(v,a)+\frac{1}{\operatorname{dn}a\operatorname{tn}a}\log\sqrt{\frac{\operatorname{cn}(a-v)}{\operatorname{cn}(a+v)}}.\quad(6)$$

Da

$$\operatorname{dn}^2v+m^2\operatorname{sn}^2v=1,$$

so ist

$$\int_0^v \frac{\mathrm{dn}^2 v\,\partial v}{1-\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\right)^2 \mathrm{sn}^2 v} + m^2 \int_0^v \frac{\mathrm{sn}^2 v\,\partial v}{1-\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\right)^2 \mathrm{sn}^2 v}$$

$$= \int_0^v \frac{\partial v}{1-\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\right)^2 \mathrm{sn}^2 v},$$

woraus:

$$\int_0^v \frac{\partial v}{1-\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\right)^2 \mathrm{sn}^2 v}$$

$$= -\frac{m^2 \mathrm{cn}^2 a}{m'^2} v + \frac{m^2 \mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 a}{m'^2} J(v,a) + \frac{\mathrm{dn}\,a}{m'^2 \mathrm{tn}\,a} \log \sqrt{\frac{\mathrm{cn}\,(a-v)}{\mathrm{cn}\,(a+v)}}. \quad (7)$$

Endlich aus (7) und (5):

$$\int_0^v \frac{\mathrm{cn}^2 v\,\partial v}{1-\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\right)^2 \mathrm{sn}^2 v} \qquad (8)$$

$$= \mathrm{cn}^2 a \,.\, v + m^2 \mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 a\,J(v,a) + \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a} \log \sqrt{\frac{\mathrm{cn}\,(a-v)}{\mathrm{cn}\,(a+v)}}.$$

Setzt man in den Formeln (1) — (8) *ai* statt *a*, so ergiebt sich (§. 11.):

$$\int_0^v \frac{\mathrm{sn}^2 v\,\partial v}{1+m^2 \mathrm{tn}'^2 a\,\mathrm{dn}^2 v} = J(v,ai), \qquad (9)$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{cn}^2 v\,\partial v}{1+m^2 \mathrm{tn}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 v} = v - \left(\frac{\mathrm{dn}' a}{\mathrm{cn}' a}\right)^2 J(v,ai), \qquad (10)$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{dn}^2 v\,\partial v}{1+m^2 \mathrm{tn}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 v} = v - \frac{m^2}{\mathrm{cn}'^2 a} J(v,ai), \qquad (11)$$

$$\int_0^v \frac{\partial v}{1+m^2 \mathrm{tn}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 v} = v - m^2 \mathrm{tn}'^2 a J(v,ai), \qquad (12)$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{sn}^2 v\,\partial v}{1-\mathrm{dn}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 v} \qquad (13)$$

$$= -\frac{v}{m^2 \mathrm{cn}'^2 a} + \frac{m^2 J(v,ai)}{m'^2 \mathrm{cn}'^4 a} + \frac{1}{m'^2 \mathrm{cn}' a\,\mathrm{sn}' a\,\mathrm{dn}' a} \mathrm{arc}(\mathrm{tang} = \mathrm{tn}' a\,\mathrm{dn}' a\,\mathrm{tn} v\,\mathrm{dn} v)$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{dn}^2 v\,\partial v}{1-\mathrm{dn}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 v} \qquad (14)$$

$$= \frac{m^2}{\mathrm{cn}'^2 a} J(v,ai) + \frac{1}{\mathrm{tn}' a\,\mathrm{dn}' a} \mathrm{arc}(\mathrm{tang} = \mathrm{tn}' a\,\mathrm{dn}' a\,\mathrm{tn} v\,\mathrm{dn} v),$$

$$\int_0^v \frac{\partial v}{1-\mathrm{dn}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 v} \tag{15}$$

$$=-\frac{m^2 v}{m'^2 \mathrm{cn}'^2 a}+\frac{m^2 \mathrm{dn}'^2 a}{\mathrm{cn}'^4 a} J(v,ai)+\frac{\mathrm{dn}' a}{m'^2 \mathrm{sn}' a\,\mathrm{cn}' a}\,\mathrm{arc}(\mathrm{tang}=\mathrm{tn}' a\,\mathrm{dn}' a\,\mathrm{tn} v\,\mathrm{dn} v),$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{cn}^2 v\,\partial v}{1-\mathrm{dn}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 v} \tag{16}$$

$$=\frac{v}{\mathrm{cn}'^2 a}-\frac{m^2 \mathrm{tn}'^2 a}{\mathrm{cn}'^2 a} J(v,ai)-\frac{\mathrm{tn}' a}{\mathrm{dn}' a}\,\mathrm{arc}(\mathrm{tang}=\mathrm{tn}' a\,\mathrm{dn}' a\,\mathrm{tn} v\,\mathrm{dn} v).$$

Die hier betrachteten Integrale haben die Form:

$$\int_0^v \frac{\psi^2 \partial v}{1+n\,\mathrm{sn}^2 v},$$

worin $\psi=\mathrm{sn}\,v$, $\mathrm{cn}\,v$, $\mathrm{dn}\,v$, 1 ist. Man bildet aus ihnen gewöhnlich vier Klassen und rechnet:

1) zur ersten Klasse diejenigen, in denen n zwischen 0 und ∞ enthalten ist, d. h. die Integrale (9), (10), (11), (12);

2) zur zweiten Klasse diejenigen, in denen n zwischen 0 und $-m^2$ enthalten ist, d. h. die Integrale (1), (2), (3), (4);

3) zur dritten Klasse diejenigen, in denen n zwischen $-m^2$ und -1 enthalten ist, d. h. die Integrale (13), (14), (15), (16);

4) zur vierten Klasse diejenigen, in denen n zwischen -1 und $-\infty$ enthalten ist, d. h. die Integrale (5), (6), (7), (8).

Führt man den Modulus $\frac{1}{m}=m_1$ statt m ein, und bezeichnet durch $J_1(v,a)$ das, was $J(v,a)$ wird, so ist

$$J_1(v,a)=\int_0^v \frac{\mathrm{sn}_1^2 v\,\partial v}{1-m_1^2\,\mathrm{sn}_1^2 a\,\mathrm{sn}_1^2 v}=m^2\int_0^v \frac{\mathrm{sn}^2\left(\frac{v}{m}\right)\partial v}{1-m^2 \mathrm{sn}^2\left(\frac{a}{m}\right)\mathrm{sn}^2\left(\frac{v}{m}\right)},$$

d. h.

$$J_1(mv,ma)=m^3 J(v,a)$$

oder

$$J_1(v,a)=m^3 J\left(\frac{v}{m},\frac{a}{m}\right),\quad J_1(v,ai)=m^3 J\left(\frac{v}{m},\frac{ai}{m}\right) \tag{17}$$

§. 24.

Zur Berechnung der Funktionen $J(v,a)$, $J(v,ai)$ dienen folgehde Betrachtungen.

$$J(v,a)=\int_0^v \frac{\mathrm{sn}^2 v\,\partial v}{1-m^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 v},$$

oder wenn $\varphi = \mathrm{am}\, v$:

$$J(v,a)=\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}\,(1-m^2\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi)}.$$

Setzt man nun

$$\operatorname{tang}\varphi' = \mathrm{dn}\, a.\operatorname{tang}\varphi,$$

so ist

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial\varphi}=\frac{\mathrm{dn}\, a}{1-m^2\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi},\quad \frac{\varphi'}{\mathrm{dn}\, a}=\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{1-m^2\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi}.$$

Nun ist

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\partial\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}\,(1-m^2\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi)}=\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{1-m^2\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi}$$
$$+\frac{1}{2}m^2\int_0^\varphi \frac{\sin^4\varphi\,\partial\varphi}{1-m^2\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi}+\frac{1.3}{2.4}m^4\int_0^\varphi \frac{\sin^6\varphi\,\partial\varphi}{1-m^2\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi}+\ldots,$$

zugleich

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^{2r+2}\varphi\,\partial\varphi}{1-m^2\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi}$$
$$=\frac{1}{m^2\mathrm{sn}^2 a}\int_0^\varphi \frac{\sin^{2r}\varphi\,\partial\varphi}{1-m^2\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi}-\frac{1}{m^2\mathrm{sn}^2 a}\int_0^\varphi \sin^{2r}\varphi\,\partial\varphi.$$

Setzt man also

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^{2r}\varphi\,\partial\varphi}{1-m^2\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi}=\frac{\Psi_r(\varphi)}{m^{2r}\mathrm{sn}^{2r} a},$$

so ist (§. 9.)

$$\Psi_{r+1}(\varphi)=\Psi_r(\varphi)-m^{2r}\mathrm{sn}^{2r} a.\frac{1.3.5\ldots.(2r-1)}{2.4.6\ldots.2r}f_r(\varphi).$$

Also

$$\Psi_1(\varphi)=\frac{\varphi'}{\mathrm{dn}\,a}-\varphi,$$

$$\Psi_2(\varphi)=\frac{\varphi'}{\mathrm{dn}\,a}-\varphi-\frac{1}{2}m^2\,\mathrm{sn}^2 a\,f_1(\varphi),$$

$$\Psi_3(\varphi)=\frac{\varphi'}{\mathrm{dn}\,a}-\varphi-\frac{1}{2}m^2\,\mathrm{sn}^2 a\,f_1(\varphi)-\frac{1.3}{2.4}m^4\,\mathrm{sn}^4 a f_2(\varphi), \qquad (1)$$

$$\vdots$$

$$\Psi_r(\varphi)=\frac{\varphi'}{\mathrm{dn}\,a}-\varphi-\frac{1}{2}m^2\mathrm{sn}^2 a f_1(\varphi)-\frac{1.3}{2.4}m^4\,\mathrm{sn}^4 a\,f_2\varphi-\dots$$

$$\dots-\frac{1.3.5....(2r-3)}{2.4.6....(2r-2)}m^{2r-2}\,\mathrm{sn}^{2r-2}\,a\,f_{r-1}(\varphi);$$

worin

$$\varphi'=\mathrm{arc}\,(\mathrm{tang}=\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tang}\,\varphi).$$

Sodann ist

$$J(v,a)=\frac{1}{m^2}\left[\frac{\Psi_1(\varphi)}{\mathrm{sn}^2 a}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\Psi_2(\varphi)}{\mathrm{sn}^4 a}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\Psi_3(\varphi)}{\mathrm{sn}^6 a}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\Psi_4(\varphi)}{\mathrm{sn}^8 a}+\dots\right]. \qquad (2)$$

Setzt man ai statt a, so ergiebt sich:

$$J(v,ai)=\frac{1}{m^2}\left[-\frac{\Psi'_1(\varphi)}{\mathrm{tn}'^2 a}+\frac{1}{2}\frac{\Psi'_2(\varphi)}{\mathrm{tn}'^4 a}-\frac{1.3}{2.4}\frac{\Psi'_3(\varphi)}{\mathrm{tn}'^6 a}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\Psi'_4(\varphi)}{\mathrm{tn}'^8 a}-\dots\right], \qquad (3)$$

während

$$\Psi'_1(\varphi)=\varphi'\cdot\frac{\mathrm{cn}'a}{\mathrm{dn}'a}-\varphi,$$

$$\Psi'_2(\varphi)=\varphi'\cdot\frac{\mathrm{cn}'a}{\mathrm{dn}'a}-\varphi+\frac{1}{2}m^2\,\mathrm{tn}'^2 a f_1(\varphi), \qquad (4)$$

$$\vdots$$

$$\Psi'_r(\varphi)=\varphi'\cdot\frac{\mathrm{cn}'a}{\mathrm{dn}'a}-\varphi+\frac{1}{2}m^2\,\mathrm{tn}'^2 a\,f_1(\varphi)-\frac{1.3}{2.4}m^4\mathrm{tn}'^2 a\,f_2(\varphi)+\dots$$

$$\dots+(-1)^r\frac{1.3.5...(2r-3)}{2.4.6...(2r-2)}m^{2r-2}\,\mathrm{tn}'^{2r-2}a f_{r-1}(\varphi),$$

$$\varphi'=\mathrm{arc}\,\left(\mathrm{tang}=\frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{cn}'a}\varphi\right).$$

§ 25.

Durch die Formeln des vor. Paragr. ist $J(v,a)$ bestimmt für v zwischen den Gränzen 0 und M zunächst. Für v über diese Gränzen hinaus, wird sich $J(v,a)$ durch folgende Formeln bestimmen.

Man setze

$$\int_0^v E(v)\,\partial v = T(v), \qquad (1)$$

so ist, da nach §. 18.:

$$E(a+v) + E(a-v) = 2E(a) - \frac{2m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 v}{1 - m^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 v},$$

auch

$$T(a+v) - T(a-v) = 2vE(a) - 2m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \,.\, J(v,a),$$

woraus

$$J(v,a) = \frac{2vE(a) + T(a-v) - T(a+v)}{2m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}. \qquad (2)$$

Demnach ist:

$$J(v+w,a) = \frac{2(v+w)E(a) + T(a-v-w) - T(a+v+w)}{2m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a},$$

$$J(v,a) = \frac{2vE(a) + T(a-v) - T(a+v)}{2m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a},$$

$$J(w,a) = \frac{2wE(a) + T(a-w) - T(a+w)}{2m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a};$$

woraus sich leicht ergiebt:

$$J(v+w,a) = J(v,a) + J(w,a)$$
$$+ \frac{T(v+w-a) - T(v+w+a) - T(v-a) + T(v+a) - T(w-a) + T(w+a)}{2m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}$$

wenn man die Gleichung

$$T(-v) = T(v) \qquad (3)$$

beachtet.

Man wird aber aus den Formeln des §. 18. ohne Mühe folgende Formel ableiten:

$$E(v+w+a)$$
$$=E(v+a)+E(w+a)-E(a)-\frac{\partial.}{\partial a}\log(1+m^2 \operatorname{sn}a \operatorname{sn}v \operatorname{sn}w \operatorname{sn}(v+w+a)),$$

woraus, wenn man integrirt:

$$T(v+w+a)$$
$$=T(v+a)+T(w+a)-T(a)-\log(1+m^2 \operatorname{sn}a \operatorname{sn}v \operatorname{sn}w \operatorname{sn}(v+w+a)).$$

Setzt man hier $-a$ statt a, so erhält man:

$$T(v+w-a)$$
$$=T(v-a)+T(w-a)-T(a)-\log(1-m^2 \operatorname{sn}a \operatorname{sn}v \operatorname{sn}w \operatorname{sn}(v+w-a));$$

zieht man beide Gleichungen von einander ab, so erhält man:

$$T(v+w-a)-T(v+w+a)-T(v-a)+T(v+a)-T(w-a)+T(w+a)$$
$$=\log\left(\frac{1+m^2 \operatorname{sn}a \operatorname{sn}v \operatorname{sn}w \operatorname{sn}(v+w+a)}{1-m^2 \operatorname{sn}a \operatorname{sn}v \operatorname{sn}w \operatorname{sn}(v+w-a)}\right).$$

Setzt man dies endlich in den obigen Werth von $J(v+w,a)$, so erhält man:

$$J(v+w,a) \tag{4}$$
$$=J(v,a)+J(w,a)+\frac{1}{2m^2 \operatorname{sn}a \operatorname{cn}a \operatorname{dn}a}\log\left(\frac{1+m^2 \operatorname{sn}a \operatorname{sn}v \operatorname{sn}w \operatorname{sn}(v+w+a)}{1-m^2 \operatorname{sn}a \operatorname{sn}v \operatorname{sn}w \operatorname{sn}(v+w-a)}\right).$$

Vermöge dieser Formel kann man nun auch die Werthe von $J(v,a)$ für $v > M$ berechnen, indem man nach und nach weiter gehen kann. Zugleich ist

$$J(-v,a)=-J(v,a). \qquad (5).$$

§. 26.

Von den so eben behandelten Integralen hängen eine Reihe anderer ab, die wir betrachten wollen.

Man hat

(1)

$$\int_0^v \frac{\operatorname{sn}v\,\partial v}{1-m \operatorname{sn}a \operatorname{sn}v}-\int_0^v \frac{\operatorname{sn}v\,\partial v}{1+m \operatorname{sn}a \operatorname{sn}v}=2\int_0^v \frac{m \operatorname{sn}a \operatorname{sn}^2 v\,\partial v}{1-m^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 v}$$
$$=2m \operatorname{sn}a\, J(v,a),$$

$$\int_0^v \frac{\operatorname{sn}v\,\partial v}{1-m \operatorname{sn}a \operatorname{sn}v}+\int_0^v \frac{\operatorname{sn}v\,\partial v}{1+m \operatorname{sn}a \operatorname{sn}v}=2\int_0^v \frac{\operatorname{sn}v\,\partial v}{1-m^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 v}.$$

Nun ist

$$\frac{\operatorname{sn}(a+v)-\operatorname{sn}(a-v)}{2}=\frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} v}{1-m^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 v} \text{ (§. 5.)}.$$

Daraus folgt (§. 16.):

$$\int_0^v \frac{\operatorname{sn} v \, \partial v}{1-m^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 v}$$

$$=\frac{1}{m \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \log \sqrt{\left(\frac{\operatorname{dn} a+m \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a-m \operatorname{cn} a} \cdot \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} v-m \operatorname{cn} a \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} v+m \operatorname{cn} a \operatorname{cn} v}\right)}.$$

Durch Addition und Subtraktion der Gleichungen (1) erhält man nun die Werthe von

$$\int_0^v \frac{\operatorname{sn} v \, \partial v}{1 \pm m \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v}.$$

Da

$$\frac{\operatorname{sn} v}{1+m \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v}=\frac{1}{m \operatorname{sn} a}-\frac{1}{m \operatorname{sn} a} \cdot \frac{1}{1+m \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v},$$

so ist

$$\int_0^v \frac{\partial v}{1+m \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v}=v-m \operatorname{sn} a \int_0^v \frac{\operatorname{sn} v \, \partial v}{1+m \operatorname{sn} a \operatorname{sn} v}. \tag{2}$$

In ganz derselben Weise erhält man die Werthe von

$$\int_0^v \frac{\operatorname{cn} v \, \partial v}{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} v \pm m \operatorname{cn} a \operatorname{cn} v}, \quad \int_0^v \frac{\operatorname{tn} v \, \partial v}{\operatorname{tn} a \pm \operatorname{tn} v}, \quad \int_0^v \frac{\partial v}{\operatorname{sn} a \pm \operatorname{sn} v},$$

$$\int_0^v \frac{\partial v}{\operatorname{cn} v \pm \operatorname{cn} a}, \quad \int_0^v \frac{\partial v}{\operatorname{dn} a \pm \operatorname{dn} v},$$

$$\int_0^v \frac{\operatorname{cn} v \pm \operatorname{cn}' a}{1 \pm \operatorname{cn}' a \operatorname{cn}' v} \partial v, \quad \int_0^v \frac{\operatorname{dn} v \operatorname{dn}' a \pm \operatorname{cn}' a}{\operatorname{dn}' a \pm \operatorname{cn}' a \operatorname{dn} v} \partial v, \quad \int_0^v \frac{\operatorname{cn} v \, \partial v}{1 \pm \operatorname{cn}' a \operatorname{cn} v},$$

$$\int_0^v \frac{\operatorname{dn} v \, \partial v}{\operatorname{dn} a \pm \operatorname{cn}' a \operatorname{dn} v}$$

u. s. f., deren Ableitung eine blosse Uebung ist.

§. 27.

Eine neue Reihe von Integralen erwächst aus den vorhergehenden, wenn man Modularfunktionen einführt, die sich auf

einen Modulus μ beziehen, der zu m in einem bestimmten Verhältnisse steht. Im Folgenden wollen wir voraussetzen, das Argument u beziehe sich auf den Modulus μ, während das Argument v sich auf den Modulus m bezieht.

I. Sei

$$\mu = m\frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a},$$

worin a sich auf den Modulus m bezieht, und sei ferner

$$\operatorname{tn} u = \operatorname{dn} a \operatorname{tn} v, \quad \text{oder} \quad \operatorname{tn}(u,\mu) = \operatorname{dn}(a,m)\operatorname{tn}(v,m);$$

so ist

$$\operatorname{sn} u = \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} v}{\sqrt{1 - m^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 v}}, \quad \operatorname{cn} u = \frac{\operatorname{cn} v}{\sqrt{1 - m^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 v}}$$

u. s. f.

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\operatorname{dn} a}{\sqrt{1 - m^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 v}},$$

$$u = \operatorname{dn} a \int_0^v \frac{\partial v}{\sqrt{1 - m^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 v}}, \tag{1}$$

wodurch nun dieses Integral bestimmt ist.

II. Sei

$$\mu = m\varepsilon, \; \varepsilon \overline{\overline{<}} 1,$$

und sei zunächst

$$\operatorname{dn} u = \operatorname{dn} v \quad \text{oder} \quad \operatorname{dn}(u,\mu) = \operatorname{dn}(v,m),$$

so findet sich

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{m^2 \varepsilon^2}{\mu^2} \cdot \frac{\operatorname{cn} v}{\sqrt{\varepsilon^2 - \operatorname{sn}^2 v}} \quad u = \int_0^v \frac{\operatorname{cn} v \, \partial v}{\sqrt{\varepsilon^2 - \operatorname{sn}^2 v}}. \tag{2}$$

Um also

$$\int_0^v \frac{\operatorname{cn} v \, \partial v}{\sqrt{\varepsilon^2 - \operatorname{sn}^2 v}}$$

zu erhalten, bestimmt man u so, dass $\operatorname{dn}(u, m\varepsilon) = \operatorname{dn}(v,m)$.

Sei

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sn} v, \text{ oder } \operatorname{sn}(u,\mu) = \operatorname{sn} v;$$

so findet man leicht

$$u = \int_0^v \frac{\operatorname{dn} v \partial v}{\sqrt{1 - m^2 \varepsilon^2 \operatorname{sn}^2 v}}. \qquad (3)$$

Sei

$$\operatorname{dn} u = \operatorname{dn} v, \text{ d. h. } \operatorname{dn}(u,\mu) = \operatorname{dn}(v,m);$$

so ist

$$\int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u \partial u}{1 + m^2 \varepsilon^2 b^2 \operatorname{sn}^2 u} = \int_0^v \frac{\operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn} v \partial v}{\varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon^2 - \operatorname{sn}^2 v}\,(1 + m^2 b^2 \operatorname{sn}^2 v)}. \qquad (4)$$

Da man das erste Integral finden kann, so ist auch das zweite bestimmt.

Sei

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sn} v,$$

so ist ähnlich:

$$\int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u \partial u}{1 + \mu^2 b^2 \operatorname{sn}^2 u} = \int_0^v \frac{\operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn} v \partial v}{\sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{sn}^2 v}\,(1 + m^2 b^2 \operatorname{sn}^2 v)}. \qquad (5)$$

III. Sei

$$\mu = m^n$$

und

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sn} v, \text{ d. h. } \operatorname{sn}(u, m^n) = \operatorname{sn}(v, m);$$

so ergiebt sich

$$u = \int_0^v \frac{\operatorname{dn} v \partial v}{\sqrt{1 - m^{2n} \operatorname{sn}^2 v}}. \qquad (6)$$

Auf ähnliche Art können weitere Formeln gebildet werden.

IV. Es ist nicht schwer, die allgemeine Formel für diese Umbildungen anzugeben.

Sei nämlich

$$\mu = f(m),$$

und sei ferner $\psi(u,\mu)$ eine Modularfunktion von u, $\varphi(v,m)$ eine von m, die wir beide, der Kürze wegen, mit $\psi(\mu)$ und $\varphi(v)$ bezeichnen wollen. Setzt man nun

$$\psi(u)=\varphi(v),$$

so ist

$$\psi'(u)\frac{\partial u}{\partial v}=\varphi'(v).$$

Da $\psi'(u)$ ebenfalls Modularfunktionen enthält, so kann es durch Modularfunktionen von v ausgedrückt werden, und man kann also annehmen, dass $\psi'(u)=\lambda(v)$ ist. Daraus ergiebt sich nun:

$$u=\int\frac{\varphi'(v)}{\lambda(v)}\partial v+C, \qquad (7)$$

welches die allgemeine Formel ist. Sei z. B.

$$f(m)=m^n,\ \psi(u)=\operatorname{sn}u,\ \varphi(v)=\operatorname{dn}(v),\ \text{also } \operatorname{sn}u=\operatorname{dn}v;$$

so ist

$$\psi'(u)=\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u,\ \varphi'(v)=-m^2\operatorname{sn}v\operatorname{cn}v.$$

Nun folgt aber

$$\operatorname{cn}u=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2u}=\sqrt{1-\operatorname{dn}^2v}=m\operatorname{sn}v,$$

$$\operatorname{dn}u=\sqrt{1-\mu^2\operatorname{sn}^2u}=\sqrt{1-\mu^2\operatorname{dn}^2v}=\sqrt{\mu'^2+\mu^2m^2\operatorname{sn}^2v};$$

also

$$u=\int\frac{-m^2\operatorname{sn}v\operatorname{cn}v\partial v}{m\operatorname{sn}v\sqrt{\mu'^2+\mu^2m^2\operatorname{sn}^2v}}+C.$$

Da für $u=L$, wenn L der zu m^n gehörige Modularquadrant ist, $\operatorname{sn}u=1$, also $\operatorname{dn}v=1$, d. h. $v=0$ ist, so hat man:

$$L-u=\int_0^v\frac{m\operatorname{sn}v\operatorname{cn}v\partial v}{\operatorname{sn}v\sqrt{\mu'^2+\mu^2m^2\operatorname{sn}^2v}}=m\int_0^v\frac{\operatorname{cn}v\partial v}{\sqrt{1-m^{2n}+m^{2n+2}\operatorname{sn}^2v}}.$$

Stellte man sich, unter denselben Bedingungen, die Aufgabe, den Ausdruck

$$\int\frac{\operatorname{sn}^2u\,\partial u}{1-b^2\operatorname{sn}^2u}$$

zu transformiren, so erhielte man statt desselben:

$$\int\frac{\operatorname{dn}^2v}{1-b^2\operatorname{dn}^2v}\cdot\frac{-m^2\operatorname{sn}v\operatorname{cn}v\partial v}{m\operatorname{sn}v.\sqrt{\mu'^2+\mu^2m^2\operatorname{sn}^2v}}$$

$$=-m\int\frac{\operatorname{cn}v\operatorname{dn}^2v\,\partial v}{(1-b^2\operatorname{dn}^2v)\sqrt{\mu'^2+\mu^2m^2\operatorname{sn}^2v}},$$

woraus denn:

$$\int_u^L \frac{\operatorname{sn}^2 u\,\partial u}{1-b^2\operatorname{sn}^2 u} = m\int_0^v \frac{\operatorname{cn} v\,\operatorname{dn}^2 v\,\partial v}{(1-b^2\operatorname{dn}^2 v)\sqrt{\mu'^2+\mu^2 m^2\operatorname{sn}^2 v}},$$

d. h.

$$\int_0^v \frac{\operatorname{cn} v\,\operatorname{dn}^2 v\,\partial v}{(1-b^2\operatorname{dn}^2 v)\sqrt{\mu'^2+\mu^2 m^2\operatorname{sn}^2 v}} = \frac{1}{m}\int_0^L \frac{\operatorname{sn}^2 u\partial u}{1-b^2\operatorname{sn}^2 u} - \frac{1}{m}\int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u\,\partial u}{1-b^2\operatorname{sn}^2 u},$$

in welcher Formel die Integrale rechter Hand nach §. 23. gefunden werden können.

§. 28.

Zum Schlusse mögen noch einige Reduktionsformeln aufgeführt werden, welche die Anwendung der obigen Formeln in vielen Fällen erleichtern.

Es bezeichne V eine Modularfunktion von v und man solle das Integral $\int V^n \partial v$ bestimmen. Wie man aus §. 10. ersieht, ist immer

$$\frac{\partial v}{\partial V} = \frac{1}{\sqrt{a+bV^2+cV^4}},$$

worin a, b, c bestimmte, konstante Werthe haben. Also ist

$$\int V^n \partial v = \int \frac{V^n \partial V}{\sqrt{a+bV^2+cV^4}}.$$

Man setze nun

$$y = V^{n-3}\sqrt{a+bV^2+cV^4},$$

so ist

$$\frac{\partial y}{\partial V} = \frac{(n-3)aV^{n-4}+(n-2)bV^{n-2}+(n-1)cV^n}{\sqrt{a+bV^2+cV^4}},$$

woraus

$$V^{n-3}\sqrt{a+bV^2+cV^4} \qquad (1)$$
$$=(n-3)a\int V^{n-4}\partial v + (n-2)b\int V^{n-2}\partial v + (n-1)c\int V^n \partial v,$$

welche Formel eine leichte Reduktion gewährt.

Ist nun n eine gerade Zahl, so kann man das Integral $\int V^n \partial_v$ durch die Formel (1) auf $\int \partial v = v$ und $\int V^2 \partial v$ zurückführen, von denen das letztere durch §. 18. bestimmt wird. Ist aber n ungerade, so wird das Integral $\int V^n \partial v$ auf $\int V \partial v$ und $\int V^3 \partial v$ zurückgebracht. Das erstere bestimmt man nach §. 16.; was das letztere anbelangt, so ist:

$$\frac{\partial^2 \text{sn} v}{\partial v^2} = -(1+m^2)\text{sn} v + 2m^2 \text{sn}^3 v,$$

$$\frac{\partial^2 \text{cn} v}{\partial v^2} = (-1+2m^2)\,\text{cn}\, v - 2m^2 \text{cn}^3 v,$$

$$\frac{\partial^2 \text{tn} v}{\partial v^2} = (1+m'^2)\,\text{tn} v + 2m'^2 \text{tn}^3 v,$$

$$\frac{\partial^2 \text{ctn} v}{\partial v^2} = (1+m'^2)\,\text{ctn} v + 2\,\text{ctn}^3 v,$$

$$\frac{\partial^2 \text{dn} v}{\partial v^2} = (1+m'^2)\text{dn} v - 2\text{dn}^3 v;$$

also:

$$\begin{aligned}
2m^2 \int \text{sn}^3 v\, \partial v &= (1+m^2) \int \text{sn} v\, \partial v + \text{cn} v\, \text{dn} v, \\
2m^2 \int \text{cn}^3 v\, \partial v &= (2m^2-1) \int \text{cn}\, v\, \partial v + \text{sn} v\, \text{dn} v, \\
2m'^2 \int \text{tn}^3 v\, \partial v &= -(1+m'^2) \int \text{tn}\, v\, \partial v + \frac{\text{dn}\, v}{\text{cn}^2 v}, \qquad (2) \\
2 \int \text{ctn}^3 v\, \partial v &= -(1+m'^2) \int \text{ctn}\, v\, \partial v - \frac{\text{dn}\, v}{\text{sn}^2 v}, \\
2 \int \text{dn}^3 v\, \partial v &= (1+m'^2) \int \text{dn} v\, \partial v + m^2 \text{sn} v\, \text{cn} v.
\end{aligned}$$

Es ist leicht, die Formel (1) auf spezielle Fälle anzuwenden. Ist z. B. $V = \text{sn} v$, so ist (§. 10):

$a=1$, $b=-(1+m^2)$, $c=m^2$, also da $\sqrt{a+bV^2+cV^4} = \frac{\partial V}{\partial v} = \text{cn} v\, \text{dn}\, v$:

$$\text{sn}^3 v\, \text{cn} v\, \text{dn} v$$

$$= (n-3)\int \text{sn}^{n-4} v\, \partial v - (n-2)(1+m^2)\int \text{sn}^{n-2} v\, \partial v + (n-1)\, m^2 \int \text{sn}^n v\, \partial v.$$

In §. 14. haben wir gesehen, dass, wenn

$$\varphi(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4,$$

das Integral

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

auf die Form $\int G\partial v = Gv + H$, worin G und H Konstanten sind, zurückgeführt werden kann. Hat man nun einen Ausdruck

$$\int \frac{X\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

worin X eine rationale Funktion von x ist, so setze man in X den Werth von x, der

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}} \text{ auf } \int G\partial v$$

bringt, wodurch $\int \frac{X\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}$ die Form $\int W\partial v$ annehmen wird, worin W eine rationale Funktion von Modularfunktionen (V) von v bezeichnet. Durch Zerlegung wird man also immer auf Formen:

$$\int V^r \partial v\,, \quad \int \frac{\partial v}{(\alpha+\beta V)^r}, \quad \int \frac{\partial v}{(\alpha+\beta V^2)^r}$$

kommen. Man kann nämlich bemerken, dass die Substitution für x, welche $\int \frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}$ auf die Form $\int G\partial v$ bringt, immer die Form

$$x = \frac{a+bV}{c+dV} \text{ oder } x = \frac{a+bV^2}{c+dV^2}$$

hat. Die erste der obigen drei Formen haben wir so eben betrachtet. Was die zweite anbelangt, so ist

$$\int \frac{\partial v}{(\alpha+\beta V)^r} = \int \frac{\partial V}{(\alpha+\beta V)^r (a+bV^2+cV^4)^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzt man in dem Ausdruck $\frac{\sqrt{a+bV^2+cV^4}}{(\alpha+\beta V)^{r-1}}$, $\alpha+\beta V=\lambda$, differenzirt ihn in Bezug auf λ und bemerkt, dass

$$\frac{1}{\sqrt{a+bV^2+cV^4}} = \pm \frac{\partial v}{\partial V},$$

so erhält man

$$\pm\frac{\beta^3\sqrt{a+bV^2+cV^4}}{(\alpha+\beta V)^{r-1}}$$

$$=-(a\beta^4+b\alpha^2\beta^2+c\alpha^4)(r-1)\int\frac{\partial v}{(\alpha+\beta V)^r}+(2c\alpha^3+b\alpha\beta^2)(2r-3)\int\frac{\partial v}{(\alpha+\beta V)^{r-1}}$$

$$-(6c\alpha^2+b\beta^2)(r-2)\int\frac{\partial v}{(\alpha+\beta V)^{r-2}}+2\alpha c\,(2r-5)\int\frac{\partial v}{(\alpha+\beta V)^{r-3}}$$

$$-c\,(r-3)\int\frac{\partial v}{(\alpha+\beta V)^{r-4}}. \quad (3)$$

Ganz eben so, wenn $\alpha+\beta V^2=\lambda$ gesetzt wird, und unter derselben Bedeutung für das Doppelzeichen:

(4)

$$\pm\frac{\beta V\sqrt{a+bV^2+cV^4}}{(\alpha+\beta V^2)^{r-1}}=\left(\frac{\alpha^3 c}{\beta}-b\alpha^2+a\beta\alpha\right)(2r-2)\int\frac{\partial v}{(\alpha+\beta V^2)^r}$$

$$-\left(a\beta-2b\alpha+\frac{3c\alpha^2}{\beta}\right)(2r-3)\int\frac{\partial v}{(\alpha+\beta V^2)^{r-1}}$$

$$-\left(b-\frac{3c\alpha}{\beta}\right)(2r-4)\int\frac{\partial v}{(\alpha+\beta V^2)^{r-2}}-\frac{c}{\beta}(2r-5)\int\frac{\partial v}{(\alpha+\beta V^2)^{r-3}},$$

welche beide Formeln ein Integral auf eine Reihe anderer reduziren. Die obige Behauptung, dass

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

auf die Form $\int G\partial v$ durch eine Substitution

$$x=\frac{a+bV}{c+dV} \text{ oder } x=\frac{a+bV^2}{c+dV^2}$$

gebracht werde, bedarf nun noch einer kurzen Rechtfertigung.

In den §§. 13. 14. liegt dies nicht so ganz klar vor Augen, und doch muss es der Fall sein, wenn obige Reduktionsformeln sollen angewendet werden können. Wir wollen desswegen die Fälle des §. 14. nochmals kurz, auch in dieser Beziehung, betrachten, und nachweisen, dass durch eine derartige Substitution der Zweck erreicht wird. (Die Nummern beziehen sich auf die des §. 14).

I. Man setze

$$x=\frac{f+gh\,\mathrm{tn}v}{1+h\,\mathrm{tn}v}$$

und bestimme f, g, so, dass

$$a+bg+bf+cfg=0,\ a'+b'g+b'f+c'fg=0;$$

aus welchen Gleichungen f, g unzweideutig bestimmt werden können. Ferner bestimme man h so, dass dann

$$h=\sqrt{\frac{a+2bf+cf^2}{a+2bg+cg^2}},$$

und der Modulus m sei so bestimmt, dass

$$m'^2=\frac{a'+2b'g+c'g^2}{a'+2b'f+c'f^2}h^2,$$

so findet man für das Integral:

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}=\int\frac{(g-f)h\partial v}{\sqrt{(a+2bf+cf^2)(a'+2b'f+c'f^2)}}.$$

II. Die angezeigten Substitutionen führen zu einer Formel in z, welche mit der (I) des §. 13. zusammentrifft. Es ist also dann zu setzen:

$$z^2=k\frac{1-\text{cn}v}{1+\text{cn}v}=\begin{cases}\dfrac{x-n'}{n-x}\\[2mm]\dfrac{n'-x}{n-x}\\[2mm]\dfrac{x-n'}{x-n}\end{cases}$$

woraus der Satz folgt.

III. Sämmtliche Fälle führen auf die Formel in II. §. 13., woraus nun ebenfalls der Satz erwiesen ist.

Die Formen

$$\int\frac{\partial v}{\alpha+\beta V},\quad\int\frac{\partial v}{\alpha+\beta V^2},$$

auf welche die Formeln (3) und (4) führen, gehören zu den in §. 26. und §. 23. betrachteten.

Damit schliessen wir die Uebersicht der Theorie der elliptischen Funktionen. Etwas Vollständiges zu geben, lag, wie schon früher gesagt wurde, nicht in unserer Absicht, doch glauben wir die Hauptmomente, die in der Anwendung auf die Integralrechnung wichtig sind, angedeutet zu haben. Es mag zum Schlusse nur noch bemerkt werden, dass die in §. 23. eingeführte Funktion $J(v,a)$ zur dritten Gattung der elliptischen Funktionen, nach Legendre's Benennung, gehört, und dieser sie mit Π als Funktionszeichen bezeichnet.

II.

Bemerkungen über Inhalt und Behandlungsweise der Differenzen- und Summenrechnung mit Rücksicht auf die Schrift „Theorie der Differenzen und Summen, ein Lehrbuch von Dr. O. Schlömilch, ausserord. Prof. a. d. Univ. Jena, Halle bei Schmidt 1848.“ 241 S. Pr. 2 fl. 24 kr.

Von dem

Herrn Hofrath L. Oettinger

zu Freiburg i. B.

---

§. 1.

Um den Gang unserer Bemerkungen nicht zu unterbrechen, und um den Leser in den Stand zu setzen, sich selbst ein Urtheil über die Brauchbarkeit des vorliegenden Lehrbuches zu bilden, soll Inhalt und Umfang desselben nach des Verf. eigener Angabe hier mitgetheilt und, wo es nöthig schien, in kurzen Zusätzen das Nähere der einzelnen Ausführungen angedeutet werden.

I. Theil. Differenzenrechnung. §. 1. Die Functionen u. ihre Differenzen (Begriff beider.) §. 2. Die Differenzen der einfachsten Functionen. §. 3. Zusammengesetzter Funct. (Summen, Producte und Quotienten). §. 4. Diff. höherer Ordnungen ($\Delta^n fx$ und Anwendung auf die besondern Fälle: b^x, x^m, $\mathrm{Sin}\,x$, $\mathrm{Cos}\,x$). §. 5. Umkehrung des im vorigen §. behandelten Problems. (Entwicklung von $f(x+h)$ nach den Unterschieden von fx). §. 6. Digression über das Theorem von Taylor (und das von Maclaurin.). §. 7. Die Interpolationsformel (mit Anwendungen). §. 8. Diff. der Funct. mehrerer Variabeln. (§. 3. und §. 8. gehört eigentlich zusammen). §. 9. Zusammenhang zwischen den Differenzen und höhern Differenzialquotienten einer Function. §. 10. Zwei Recursionsformeln für die Bernoulli'schen Zahlen. §. 11. Summirung einer Reihe von Differenzen. §. 12. Restbetrachtung. §. 13. Entwicklung von $h:(e^h-1)$. §. 14. Entwicklung von $\Gamma(x)$ (der Fakultät $1^{x-1|1}$ oder $(1,1)^{x-1}$). §. 15. Näherungsformeln für Factoriellen.

2. Theil. Summenrechnung. §. 1. Begriff und Bezeichnungsweise der Summenrechnung. §. 2. Summen der einfachsten Functionen ($x^{n|h}$, $\frac{1}{x^{n|h}}$, a^x, Sin$x$, Cos$x$). §. 3. Allgemeine Regeln für die endliche Integration zusammengesetzter Funct. (Summen, Producte). §. 4. Endliche Integration der rationalen ganzen algebraischen Functionen (x^m). §. 5. Gebrochener rationaler algebraischer Functionen. §. 6. Summirung von $x^m a^x$, x^m Cos$x$, x^m Sin$x$ (1te und 2te Potenz von x) §. 7. Integration von Cos$^m x$, Sin$^m x$ und ähnlicher Functionen. §. 8. Die vielfachen endlichen Integrale ($\Sigma^n a^x$, Σ^n Sin$x$, Σ^n Cos$x$). §. 9. Integration durch Potenzenreihen. §. 10. Durch goniometrische Reihen. §. 11. Durch halb convergente Reihen. §. 12. Beispiele zu den Theoremen des vorigen §. (Σx^m, $\Sigma\frac{1}{x}$, $\Sigma\frac{1}{x^m}$, $\Sigma\frac{k}{k^2+x^2}$). §. 13. Digression über die näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale. §. 14. Einfache Summirung durch Quadraturen. §. 15. Beispiele und Erweiterung des vorigen Theorems. §. 16. Reduction vielfacher Summen auf einfache bestimmte Integrale.

3. Theil. Differenzengleichungen. §. 1. Allgemeine Begriffe. §. 2. Integration der Differenzengleichungen ersten Grades erster Ordnung. §. 3. Diff. Gleich. 1ten Grades und beliebiger Ordnung. §. 4. und §. 5. Fortsetzung. § 6. Integration durch bestimmte Integrale. §. 7. Beispiele zur vorigen Methode. §. 8. Integration mit Hülfe unendlicher Reihen. §. 9. Diff. Gleich. mit zwei unabhängigen Variabeln. §. 10. Fortsetzung. §. 11. Diff. Gleich. mit mehreren unabhängigen Variabeln. Literarhistorisches.

Der Zweck des Verf. bei Bearbeitung dieser Schrift war, ein Compendium für akademische Vorträge und zugleich ein Lehrbuch zum Selbstunterrichte zu geben und dadurch mehr zur grössern Verbreitung dieser Wissenschaft, als zu ihrer Erweiterung beizutragen. Zur Durchführung seines Zweckes stand ihm reiches Material zu Gebot, das in den hierher gehörigen Werken und Zeitschriften enthalten ist. An Stoff zur Verarbeitung ist daher ein Arbeiter weniger arm als zweifelhaft über die Art, wie ein so reichhaltiger, in so vielen Schriften zerstreut liegender und aus den verschiedenen Zweigen der Mathematik herbei zu holender Stoff in eine Theorie verarbeitet werden soll, denn nicht nur und vor allem die Differenzen-Rechnung, sondern auch die Differenzial-, die Integralrechnung, die combinatorische Analysis, die Umformung der Functionen in Reihen etc. liefern in freigebigem Wetteifer ihre Gaben zur Bereicherung und Erweiterung des hier in Frage stehenden Zweiges der Mathematik.

Das Verdienstliche einer solchen Arbeit, worauf der Verf. in seinem Vorworte Anspruch macht, wird gewiss jeder Freund der Wissenschaft gerne anerkennen, und eine derartige Schrift wird freundlich begrüsst werden, da bis jetzt in Deutschland keine solche existirt, worin der Gedanke einer Verarbeitung des vorhandenen Materials durchzuführen versucht wurde, ob er gleich nicht alle dienstbare Zweige der Mathematik zu seinem Zwecke in Anspruch nahm, sondern eine Auswahl traf, und auch nicht alle vorhandenen Vorarbeiten (gerade in der Differenzen-Rechnung) benutzte, was er durch Verlassensein von literarischen Hülfsmitteln entschuldigt wissen will.

Die ersten Grundzüge zu einer Differenzen- und Summenrechnung sind im 2. Bande von Eulers Differenzialrechnung zu finden. Von Lacroix wurden sie später in seinem Traité d. calc. differ. et intégr. T. III. Chap. I—III. weiter ausgeführt. Sie führen die Aufschriften I. Calcul direct des différences (Differenzenrechnung). II. Calcul inverse des différences (darin behandelt Lacroix zweierlei: die Differenzen mit negativen Exponenten, die er mit Σ bezeichnet und die Summen, die er mit S bezeichnet, ohne jedoch einen Unterschied zwischen beiden festzustellen. Euler hat schon diese zwei Zeichen gebraucht). III. Intégration des équations aux différences (Differenzen-Gleichungen). Die gleiche Eintheilung hat der Verf. gewählt.

Dass von ihm nicht alle zu seiner Aufgabe gehörigen Betrachtungen und Untersuchungen beigezogen und mitgetheilt wurden, lässt sich begreifen. Es wäre für ein Lehrbuch zu weitführend, denn hierbei kann man nur sichtend und auswählend zu Werke gehn. Auch muss ohnedem jede Untersuchung, die in eine aufzustellende Theorie aufgenommen werden soll, dieser angepasst werden, was oft mit Schwierigkeiten, die mit dem Erfolge nicht im Einklange stehen, verbunden ist. Auch genügen geschichtliche Notizen über die Orte, wo die bezüglichen Untersuchungen nachzulesen sind. Bei Lösung seiner Aufgabe hat der Verf. die Differenzial- und Integralrechnung als dienstleistende Nebenzweige in Anspruch genommen. Eine Reihe von Untersuchungen, die mit dem in Frage stehenden Gegenstand genau zusammenhängen, und die in Crelle's Journal 11ter—16ter Band und 33ster Bd. enthalten sind, hat er nicht benutzt, worauf wir gelegentlich wieder zurückkommen werden.

Gesteht man nun, und diess ist Pflicht, einem Verf. das Recht zu, einen Gegenstand, den er bearbeiten will, einzugrenzen und die Art und Weise, wie er ihn bearbeiten will, festzustellen, so ist geboten, die gelieferte Arbeit nach dieser Eingrenzung zu beurtheilen. Ich kann nun nicht umhin sofort zu bemerken, dass d. Verf. seinen Gegenstand mit Gewandtheit und Eleganz behandelt, und kurz und klar entwickelt hat, was er geben wollte. Der Leser wird nicht bereuen, den Darstellungen des Verfs. gefolgt zu sein. Weniger übereinstimmend ist meine Ansicht mit der des Verf. über die Grundlage, worauf er den in Frage stehenden Zweig der Mathematik als Wissenschaft aufbauen zu müssen glaubte. Da ich gerne das Verdienst des Verf. in Beziehung auf die vorliegende Schrift anerkenne, so wird es auch wohl nicht missdeutet werden, wenn ich die Ansicht über die Art und Weise hier ausspreche, welche ich für die zweckmässigste in der Begründung einer Theorie der Differenzen- und Summen-Rechnung, zweier in innerm und deswegen nothwendigem Zusammenhang stehenden Doctrinen, halte, und diess in einigen Bemerkungen nachzuweisen suche. Ich thue diess in der Ueberzeugung, dass eine solche Besprechung nur die Sache selbst fördern und der Wissenschaft dienen kann. Der künftige Bearbeiter mag dann, wenn er diese Zeilen etwa liest, bemessen, was an der hier vorgetragenen Ansicht, gegenüber der von dem Verf. befolgten, sich bewahrheiten wird, was nicht.

§. 2.

Die Hauptaufgabe des hier besprochenen Zweiges der Mathe-

matik ist die Darstellung der Summenausdrücke für eine Reihe von Gliedern, die nach einem gemeinschaftlichen Gesetze fortschreiten, oder Integral-Rechnung für endliche Differenzen.

In dieser Weise ist die Aufgabe vorerst nicht bestimmt, denn sie nimmt, wie schon oben bemerkt, alle Zweige der Mathematik, jedes für ihren Zweck verfügbare und diensame Mittel, jeden glücklichen Kunstgriff für ihre Lösung in Anspruch, und ist in dieser Unbestimmtheit auch nicht einer systematischen Behandlungsweise zugänglich, denn sie hängt von Aeusserlichkeiten und Zufälligkeiten ab. Letzteres wird sie erst dann, wenn man auf die einzelnen ihr dienenden Zweige der Mathematik selbst eindringt, und fragt: können Mittel beschafft werden, wodurch für die einfachen und zusammengesetzten Functionen der Analysis, welche sich in Reihen gruppiren lassen, sich Summenausdrücke nach allgemeinen Gesetzen auffinden lassen. Diese Mittel liefert die Rechnung mit endlichen Differenzen am vollständigsten, und zwar in der Weise, dass sich für sie ein in sich abgeschlossenes System aufstellen und durchführen lässt, wie sich im Folgenden zeigen wird. Ist nun auf diesem Wege eine feste Basis gewonnen und sind die Mittel der Differenzen-Rechnung erschöpft, dann ist es an der Reihe, sich nach andern Mitteln aus den übrigen Zweigen der Mathematik zur Ergänzung, Förderung und Erweiterung der vorhandenen umzusehen. Diese finden sich sofort weiter in der Differenzial- und Integralrechnung, beide aber nur in zweiter Linie, worauf dann noch weitere Hülfsmittel gesucht werden mögen.

Geht man nun auf den in der Summenrechnung zu verarbeitenden Stoff selbst näher ein, so gruppiren sich die Reihen in zwei Hauptarten: in solche, deren Glieder mit einerlei Zeichen, und solche, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind.

Diese Unterscheidung kann aber in einer Theorie der Summenrechnung, wenn diese anders ihrer Aufgabe genügen will, nicht wohl ignorirt werden. Schon Euler hat in seiner Differenzialrechnung einige hierhergehörige Fälle der zweiten Art betrachtet, und Lacroix ist in dem oben angeführten Werke auch darauf zurückgekommen. In beiden Schriften liegen aber nur ungeordnete und zusammenhangslose Anfänge vor. Der Verf. ist hierauf gar nicht eingegangen. In einer Theorie genügt es nun, wie sich von selbst versteht, nicht an der Aufführung einiger Fälle, sondern an der Durchführung eines Princips, und an Auffindung der Mittel, welche diese sicher stellen. Ich habe in einer Reihe von Abhandlungen, die in Crelle's Journal 11ter—16ter und im 33sten Bd. erschienen sind, und die auch unter dem Titel „Die Lehre von den aufsteigenden Functionen nebst einer auf sie gegründeten Summen-Rechnung". Berlin 1836" als besondere Schrift ausgegeben wurden, gezeigt, dass beide Arten von Reihen ganz allgemeinen Gesetzen unterliegen, die unter einander in sehr engem Zusammenhange stehn, und sich eben so einfach als consequent einem durchgreifenden Systeme fügen. Von der ersten Hauptgruppe der Reihen (deren Glieder mit einerlei Zeichen versehen sind) war diess schon theilweise bekannt, denn die Vorarbeiten waren mannichfaltiger. Bei der zweiten Hauptgruppe fehlen diese Vorar-

beiten. Nichts desto weniger ist ihre nähere Untersuchung lohnend, und führt auf Resultate, die denen an Interesse nicht nachstehen, welche bisher über die erste Hauptgruppe der Reihen aufgefunden wurden, und die dem Verf. gewiss manche neue Anhaltpunkte geboten haben würden, wenn er ihnen seine Aufmerksamkeit zugewendet hätte.

Der Zusammenhang, worin nun die genannten zwei Hauptarten von Reihen unter einander stehen, ist sehr einfach und folgender.

Der Begriff von der Differenz einer Function ist in der Gleichung

$$1.\quad \Delta fx = f(x+h) - fx$$

enthalten. Hiernach hat man den veränderlichen Theil der Function um eine bestimmte Zunahme wachsen zu lassen, und von der so veränderten Function die ursprüngliche Function abzuziehen. Die weitere Verfolgung dieses Begriffs führt auf eine Reihe, deren Glieder durch einerlei Zeichen mit einander verbunden sind:

$$2.\quad fx + f(x+h) + f(x+2h) + \ldots + f(x+mh).$$

Dem Begriffe der Differenz steht der der Zuzählung oder Aufstufung einer Function, wie ich ihn genannt habe, zur Seite. Er beruht darauf, dass man wie vorhin den veränderlichen Theil einer Function um eine bestimmte Zunahme wachsen lässt und zu der so veränderten Function die ursprüngliche zählt. Da für dieses Geschäft ein Zeichen gewählt werden musste, so habe ich nach Analogie von Δ den griechischen Buchstaben ζ gewählt. Hiernach ist

$$3.\quad \zeta fx = f(x+h) + fx.$$

Die weitere Verfolgung dieser Idee führt zu dem Begriffe von Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind und bestimmten Gesetzen folgen:

$$4.\quad fx - f(x+h) + f(x+2h) - \ldots\ldots \pm f(x+mh).$$

Es ist nun nicht zu leugnen, dass durch Aufnahme der hier angedeuteten Grundlage die Arbeit etwas ausgedehnter geworden wäre. Ich glaube aber, dass ein Zusatz von einigen §§. mehr hingereicht hätte, die erweiterte Theorie durchzuführen, denn es handelt sich hierbei nicht um Aufnahme grösserer und weitführender Untersuchungen, sondern um Begründung des Systems. In meiner Algebra habe ich es versucht, in dieser Weise die allgemeinen Grundzüge für eine auf den Differenzen und Aufstufungen beruhende Summenrechnung für beide Hauptgruppen der Reihen zu geben und die Ausführung, die sich allerdings nicht weiter als auf die einfachen Functionen erstreckte, füllt nicht zwei volle Bogen aus.

Dabei stehen die Methoden, welche die Verfolgung der oben vorgelegten Idee an die Hand gibt, den bisher bekannten weder an Allgemeinheit, noch an Leichtigkeit der Anwendung, noch an

praktischer Brauchbarkeit nach, wie eine Vergleichung an die Hand giebt. Der Verf. hat nämlich nach dem Vorworte mit Recht vermieden „sehr weitläufige Untersuchungen" aufzunehmen, die entweder nur einen „geringen Grad von Allgemeinheit" besassen, oder zu so „unförmlichen Resultaten" führten, dass man ihre „praktische Brauchbarkeit" in Zweifel ziehen musste. Gerade in Einverständniss mit der Absicht des Verf. wäre es wünschenswerth gewesen, wenn er auf eine eben so einfache als klare, ebenso allgemeine als praktische Idee eingegangen wäre, denn die Resultate, worauf sie führt, überraschen durch ihre grosse Anwendbarkeit, und durch das Zwanglose, womit sie sich den strengen Forderungen eines Systems unterordnen, was wir leider in dem Gange, welchen der Verf. verfolgte, nicht hervorgehoben finden. Um diess zu zeigen, sehen wir uns veranlasst auf einige Einzelnheiten einzugehen.

§. 3.

Durch Wiederholung des in 1. und 2. des vorigen §. angedeuteten Geschäfts wird man auf die zweite, dritte, vierte Differenz oder Aufstufung etc. (Differenzen und Aufstufungen höherer Ordnung) geführt. Bezeichnet man der Kürze wegen die Glieder der ursprünglichen Reihe (Grundreihe) durch $X_0, X_1, X_2, \ldots X_m$, so dass $f(x+mh)=X_m$ bedeutet, so ergeben sich durch einen sehr einfachen Calcul folgende Gleichungen:

$$1.\quad \Delta^m X_0 = X_m - m X_{m-1} + (m)_2 X_{m-2} - \ldots . (-)^m (m)_m X_0$$

(§. 24. Crelle's Journ. 12. Bd.)

$$2\quad \zeta^m X_0 = X_m + m X_{m-1} + (m)_2 X_{m-2} + \ldots . (m)_m X_0$$ (§. 3. Cr. J. 11. Bd.)*)

worin $(m)_r = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-r+1)}{1 \,.\, 2 \quad 3 \,.\,.\,.\,.\,.\, r}$ bedeutet.

Eben so findet man für das umgekehrte Problem:

$$3.\quad X_m = X_0 + m\Delta X_0 + (m)_2 \Delta^2 X_0 + \ldots . (m)_m \Delta^m X_0.$$

(§. 26. Cr. Jour. 12. Bd.)

$$4.\quad X_m = \zeta^m X - m\zeta^{m-1} X_0 + (m)_2 \zeta^{m-2} X_0 \ldots . (-)^m X_0.$$ (§. 5.)

Es zeigt sich nun leicht, dass diese Gleichungen auch für ein **negatives** m gelten, und man erhält:

$$5.\quad \Delta^{-m} X_0 = X_m + m X_{-m-1} + [m]_2 X_{-m-2} + \ldots .$$ (§. 25.)

$$6.\quad \zeta^{-m} X_0 = X_{-m} - m X_{-m-1} + [m]_2 X_{-m-2} \ldots .$$ (§. 4.)

$$7.\quad X_{-m} = X_0 - m\Delta X_0 + [m]_2 \Delta^2 X_0 - [m]_3 \Delta^3 X_0 \ldots .$$ (§. 26.)

---

*) Die Citationen sind hier nach §§. gegeben, damit sie nicht nur im Journ. v. Crelle, sondern auch in meiner Schrift „Lehre von den aufsteigenden Functionen" nachgesehen werden können.

$$8.\quad X_{-m} = \zeta^{-m} X_0 + m\zeta^{-m-1} X_0 + [m]_2 \zeta^{-m-2} X_0 + \dots \quad (\S.\ 5.)$$

worin $[m]_r = \frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+r-1)}{1\ .\ 2\ \ 3\ .\ .\ .\ .\ r}$ bedeutet. Von diesen Gleichungen, die sich so enge einander anschliessen, hat der Verf. nur 1. und 3. in §. 3. und §. 5. entwickelt. Den Zusammenhang, der zwischen den positiven und negativen höhern Unterschieden einer Function herrscht, hat er ausser Acht gelassen und damit eine reiche Quelle der Vergleichung und der Vervollständigung einer Theorie nicht benutzt. Auf S. 118. scheint er sogar diesen Zusammenhang und die allgemeinen Gesetze für die höhern Unterschiede in Abrede zu stellen.

Diese Gleichungen sind zwar vorerst nur formell, gelten aber von jeder einfachen Function ohne Unterschied. Um ihnen Inhalt zu geben, hat man die Gesetze des Unterschiedsnehmens und des Aufstufens auf die einzelnen Functionen anzuwenden. Diese sind bekanntlich x^p, a^x, $\lg x$, $x^{x|h}$, Sin x, Cos x.... Nicht alle lassen sich gleich leicht behandeln. Aber auch die weniger schmiegsamen lassen sich einem allgemein, für positive und negative m gültigen Gesetze unterwerfen. Wir weisen diess durch folgende Zusammenstellung nach.

$$9.\quad \Delta^m a^x = (a^h - 1)^m a^x \qquad (\S.\ 32.)$$

$$10.\quad \Delta^m \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1-a^h}{a^h}\right)^m \frac{1}{a^x} \qquad (\S.\ 32.)$$

$$11.\quad \Delta^m x^{p|h} = p^{m|-1}(x+mh)^{p-m|h} h^m \qquad (\S.\ 30.)$$

$$12.\quad \Delta^m \frac{1}{x^{p|h}} = (-)^m \frac{p^{m|1} h^m}{x^{p+m|h}} \qquad (\S.\ 30.)$$

$$13.\quad \Delta^m \text{Sin}\, x = \text{Sin}\left(x + m\frac{\pi+h}{2}\right)^m . 2^m (\text{Sin} \tfrac{1}{2}h)^m \qquad (\S.\ 33.)$$

$$14.\quad \Delta^m \text{Cos}\, x = \text{Cos}\left(x + m\frac{\pi+h}{2}\right)^m 2^m (\text{Sin} \tfrac{1}{2}h)^m \qquad (\S.\ 33.)$$

$$15.\quad \Delta^{-m} a^x = \frac{a^x}{(a^h-1)^m} = (a^h-1)^{-m} a^x \qquad (\S.\ 39.)$$

$$16.\quad \Delta^{-m} \frac{1}{a^x} = \frac{a^{mh}}{(1-a^h)^m} \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1-a^h}{a^h}\right)^{-m} \frac{1}{a^x} \qquad (\S.\ 39.)$$

$$17.\quad \Delta^{-m} x^{p|h} = \frac{p^{-m|-1}(x-mh)^{p+m|h}}{h^m} = \frac{(x-mh)^{p+m|h}}{(p+1)^{m|1} h^m} \qquad (\S.\ 38.)$$

$$18.\quad \Delta^{-m} \frac{1}{x^{p|h}} = (-)^{-m} \frac{p^{-m|1} h^{-m}}{x^{p-m|h}} = \frac{1}{(-)^m (p-1)^{m|-1} x^{p-m|h}} \qquad (\S.\ 38.)$$

$$19.\quad \Delta^{-m}\operatorname{Sin} x = \frac{\operatorname{Sin}\left(x - m\frac{\pi + h}{2}\right)}{2^m(\operatorname{Sin}\frac{1}{2}h)^m}, \qquad (\S.\ 40.)$$

$$20.\quad \Delta^{-m}\operatorname{Cos} x = \frac{\operatorname{Cos}\left(x - m\frac{\pi + h}{2}\right)}{2^m(\operatorname{Sin}\frac{1}{2}h)^m}. \qquad (\S.\ 40.)$$

Die Identität der Darstellungen 9—14 für positive Unterschiede mit denen von 15—20 für negative Unterschiede derselben Functionen liegt so klar vor Augen, dass sie gar nicht bezweifelt werden kann. Für die positiven und negativen Aufstufungen der einfachen Functionen erhält man auf gleichem Wege:

$$21.\quad \zeta^m a^x = (1 + a^h)^m a^x \qquad (\S.\ 10.)$$

$$22.\quad \zeta^m \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1 + a^h}{a^h}\right)^m \frac{1}{a^x} \qquad (\S.\ 10.)$$

$$23.\quad \zeta^m \operatorname{Sin} x = 2^m \operatorname{Sin}\left(x + \frac{1}{2}m h\right)\left(\operatorname{Cos}\frac{1}{2}h\right)^m \qquad (\S.\ 11.)$$

$$24.\quad \zeta^m \operatorname{Cos} x = 2^m \operatorname{Cos}\left(x + \frac{1}{2}m h\right)(\operatorname{Cos} h)^m \qquad (\S.\ 12.)^*)$$

$$25.\quad \zeta^{-m} a^x = \frac{a^x}{(1 + a^h)^m} = (1 + a^h)^{-m} a^x \qquad (\S.\ 14.)$$

$$26.\quad \zeta^{-m} \frac{1}{a^x} = \left(\frac{a^h}{1 + a^h}\right)^m \cdot \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1 + a^h}{a^h}\right)^{-m} \cdot \frac{1}{a^x} \qquad (\S.\ 14.)$$

$$27.\quad \zeta^{-m} \operatorname{Sin} x = \frac{\operatorname{Sin}\left(x - \frac{mh}{2}\right)}{2^m(\operatorname{Cos}\frac{1}{2}h)^m} \qquad (\S.\ 15.)$$

$$28.\quad \zeta^{-m} \operatorname{Cos} x = \frac{\operatorname{Cos}\left(x - \frac{1}{2}mh\right)}{2^m(\operatorname{Cos}\frac{1}{2}h)^m} \qquad (\S.\ 16.)$$

---

*) Anm. In den oben angeführten §§. (§. 11, 12, 15 und 16 Crelle's Journ. 11. Bd.) sind durch ein Versehen auch die Formen

$$\zeta^m \operatorname{Sin} x = (-)^m 2^m \operatorname{Sin}\left(x + \frac{1}{2}mh\right)\left(\operatorname{Cos}\frac{1}{2}h\right)^m,$$

$$\zeta^m \operatorname{Cos} x = (-)^m 2^m \operatorname{Cos}\left(x + \frac{1}{2}mh\right)\left(\operatorname{Cos}\frac{1}{2}h\right)^m$$

als gültig angegeben worden. Diess ist nicht der Fall, was ich hier verbessernd bemerke. Das Gleiche gilt von den negativen Aufstufungen von $\operatorname{Sin} x$ und $\operatorname{Cos} x$.

Auch hier tritt die Identität der Gleichungen 21—24 mit 25—28 für positive und negative Aufstufungen klar hervor. Ja der Zusammenhang zwischen den höhern Unterschieden und den höhern Aufstufungen 9—20 und 21—28 ist nicht zu verkennen.

Die Darstellung für $\Delta^{\pm m} a^x$ und $\zeta^{\pm m} a^x$, $\Delta^{\pm m}\frac{1}{a^x}$ und $\zeta^{\pm m}\frac{1}{a^x}$ $\Delta^{\pm m}$ Sin x und $\zeta^{\pm m}$ Sin x, $\Delta^{\pm m}$ Cos x und $\zeta^{\pm m}$ Cos x ergänzen sich gegenseitig im Systeme, und sollten aus diesem Grunde schon in einer Theorie nicht übergangen werden, abgesehen von der Anwendbarkeit und Brauchbarkeit, welche sie in der Summenrechnung zeigen. Die Gleichungen 13. und 14.; 15., 19. und 20. sind zwar von dem Verf. (S. 19. §. 4. u. S. 117. §. 8.) angegeben, auf den Zusammenhang aber, der zwischen ihnen herrscht (für die Theorie der Differenzen gewiss nicht unwichtig), ist nicht hingewiesen. Er ist sogar durch die Darstellungen, die auf der Seite 117. gegeben sind, verwischt. Zu dem hat sich in die dort mitgetheilten Darstellungen ein Versehen eingeschlichen. Die Formeln, die wir in der Bezeichnung des Verf. hier geben, sollen wohl heissen:

$$\Sigma^n \operatorname{Sin} x = \left(\frac{1}{2} \operatorname{Cosec} \frac{1}{2}h\right)^n \operatorname{Sin}\left(x - n\frac{\pi + h}{2}\right) \text{ und}$$

$$\Sigma^n \operatorname{Cos} x = \left(\frac{1}{2} \operatorname{Cosec} \frac{1}{2}h\right)^n \operatorname{Cos}\left(x - n\frac{\pi + h}{2}\right),$$

während sich dort vorfindet:

$$\Sigma^n \operatorname{Sin} x = \left(2 \operatorname{Cosec} \frac{1}{2}h\right)^n \operatorname{Sin}\left(x - n\frac{\pi + h}{2}\right),$$

$$\Sigma^n \operatorname{Cos} x = \left(2 \operatorname{Cosec} \frac{1}{2}h\right)^n \operatorname{Cos}\left(x - n\frac{\pi + h}{2}\right);$$

was mehrere mal vorkommt, während die Gleichungen, woraus diese Darstellungen abgeleitet sind, in §. 2. S. 90. richtig stehen.

§. 4.

Nicht so willig lassen sich die Functionen x^p und $\lg x$ für die Differenzen und Aufstufungen und $x^{p|h}$ für die Aufstufungen behandeln. Um auch diese dem allgemeinen Gesetze zu unterwerfen, dient die Methode der Darstellung der Unterschiede und Aufstufungen durch Differenziale und Integrale.

Um diess nachzuweisen, sind allerdings einige andere Untersuchungen nöthig, die jedoch durchaus nicht weit ausgreifend sind. Die hierzu erforderlichen Gleichungen finden sich (§. 42. Crelles Journ. 12. Bd. §. 19. und 20. Cr. Journ. 33. Bd.) angegeben, und entwickelt. Sie sind

$$1.\ \Delta^m X = \frac{\partial^m X.\,h^m}{(\partial x)^m} + \frac{SC'(1,2,\ldots m)^1}{m+1}\frac{\partial^{m+1}X.h^{m+1}}{(\partial x)^{m+1}} + \frac{SC'(1,2,\ldots m)^2}{(m+1)^{2|1}}\frac{\partial_{m+}{}^2 X h^{m+2}}{(\partial x)^{m+2}},$$
$$\vdots$$

oder

$$2.\ \Delta^m X = (e^{\frac{h.\partial}{\partial x}} - 1)^m X,$$

$$3.\ \zeta^m X = \left(1 + e^{\frac{h.\partial}{\partial x}}\right)^m X.$$

Alle drei Darstellungen sind allgemein und gelten für ein positives und negatives (ja sogar für ein gebrochenes pos. und neg.) m. Unter $SC'(1,2\ldots m)^r$ ist der Summenausdruck der Verbindungen mit Wiederholungen aus m Elementen zur $r$ten Classe verstanden, oder ein Fakultäten-Coefficient, wie ihn der Verf., den Begriff von einem speciellen Fall ableitend, nennt und womit er sich mehrfach (§. 10. S. 44. §. 16. S. 165.), jedoch immer nur im besondern Falle, beschäftigt. Die Darstellung dieser Summenausdrücke für die verschiedenen Classen ist sehr wichtig, denn sie sind in der Analysis sehr verbreitet, und haben für viele Entwicklungen (nicht allein für die Fakultäten) dieselbe Bedeutung, wie die Binomialcoefficienten für andere. Es lohnt sich daher wohl der Mühe sich mit ihnen zu beschäftigen, und die allgemeinen, für sie geltenden Bildungsgesetze zu ermitteln. Hat man sie gefunden, so ist man der Mühe, sie in jedem speciellen Fall wiederholt aufzusuchen, überhoben. Ihre Darstellung wird durch eine merkwürdige Beziehung, worin die Summensausdrücke der Verbindungen mit und ohne Wiederholungen zu einander stehen, und die ich (§. 8. 33. Bd. Crelle's Journ.) nachgewiesen habe, erleichtert. Ist nämlich der Ausdruck für $SC'(1,2,3,\ldots m)^r$, gefunden, so gilt derselbe unmittelbar für $SC(1,2,3,\ldots m-1)^r$ wenn $(-m)$ statt $(+m)$ in ihm gesetzt wird und umgekehrt. Die Bernoullischen Zahlen sind ein besonderer Fall dieser Summenausdrücke. Man findet sie, wenn $m=-1$ gesetzt wird. Benutzt man diese Bemerkungen und die im 33. Bd. Crelle's Journ. §. 19. und 20. gegebenen Entwicklungen, so erhält man aus 1. und 2.

$$4.\ \Delta^m X = \frac{\partial^m X}{(\partial x)^m}h^m + \frac{m}{2}\frac{\partial^{m+1}X}{(\partial x)^{m+1}}h^{m+1} + \frac{3m+1}{1.2.3.4}m.\frac{\partial^{m+2}X}{(\partial x)^{m+2}}h^{m+2}$$
$$+ \frac{m(m+1)m}{2.1.2.3.4}\frac{\partial^{m+3}X}{(\partial x)^{m+3}}h^{m+3}$$
$$+ \frac{15m^3+30m^2+5m-2}{48.1^{5|1}}m\frac{\partial^{m+4}X}{(\partial x)^{m+4}}h^{m+4}$$
$$\vdots$$

$$5.\ \Delta^{-m} X = \frac{1}{h^m}\int^m X(\partial x)^m - \frac{m}{2h^{m-1}}\int^{m-1} X(\partial x)^{m-1}$$
$$+ \frac{(3m-1)m}{1^{4|1}h^{m-2}}\int^{m-2} X(\partial x)^{m-2}$$
$$- \frac{m(m-1)m}{2.1^{4|1}h^{m-3}}\int^{m-3} X(\partial x)^{m-3}$$
$$+ \frac{15m^3-30m^2+5m+2}{48.1^{5|1}h^{m-4}} m \int^{m-4} X(\partial x)^{m-4}$$
$$\vdots$$

Beide Darstellungen unterliegen offenbar einem und demselben Bildungsgesetze für $(+m)$ und $(-m)$, wenn man, wie sich leicht erweisen lässt, bemerkt, dass

$$6.\ \frac{\partial^{-r} X}{(\partial x)^{-r}} = \int^r X(\partial x)^r \text{ und } \int^{-r} X(\partial x)^{-r} = \frac{\partial^r X}{(\partial x)^r}.$$

Sie gelten sogar für gebrochene m. Der besondere Fall, wenn $m=1$ in 5. ist, wofür der Verf. seiner Wichtigkeit wegen zwei zurücklaufende Bildungsweisen mittheilt, gibt die bekannte Bernoullische Reihe, und es ist

$$7.\ \Delta^{-1} X = \Sigma X = (e^{\frac{h\partial}{\partial x}} - 1) X$$
$$= \frac{1}{h}\int X\partial x - \frac{1}{2} X + \frac{1}{12}\cdot\frac{\partial X}{\partial x} h - \frac{1}{120}\cdot\frac{\partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3} h^3$$
$$+ \frac{1}{252}\cdot\frac{\partial^5 X.h^5}{1.2.3(\partial x)^5} - \ldots.$$

So oft man nun die höhern Differenziale und Integrale einer Function darstellen kann, so oft kann man auch hiernach $\Delta^{+m} X$ und $\Delta^{-m} X$ geben. Für $X = x^p$ (die noch fragliche Function) ergeben sie sich leicht. Für $X = \lg x$ sind die höhern Differenziale auch bekannt. Die höhern Integrale aber sind, so viel mir bekannt ist, nicht gegeben. Die nachstehenden Gleichungen werden die erforderlichen Dienste leisten und das Fehlende ergänzen. Es ist im Allgemeinen

$$8.\ \int^p \lg y (\partial y)^p = \frac{y^p}{1^{p|1}}\left(\lg y - \frac{SC(1,2,\ldots p)^{p-1}}{1^{p|1}}\right),$$

$$9.\ \int^{p+1} \frac{(\partial y)^{p+1}}{y} = \frac{y^p}{1^{p|1}}\left(\lg y - \frac{SC(1,2,\ldots p)^{p-1}}{1^{p|1}}\right);$$

worin $1^{p|1} = 1.2.3\ldots p$ und $SC(1,2,3,..p)^{p-1}$ die Summen der Verbindungen ohne Wiederholungen aus p Elementen zur $(p-1)$ten Classe sind.

Aus 3. erhält man mit diesen Mitteln ausgerüstet:

$$10.\ \zeta^m X = 2^m X + m 2^{m-1} h \frac{\partial X}{\partial x}$$

$$+(m.2^{m-1}+m^{2|-1}.2^{m-2})\frac{h^2\partial^2X}{1.2(\partial x)^2}$$

$$+(m.2^{m-1}+3m^{2|-1}.2^{m-2}+m^{3|-1}2^{m-3})\frac{h^3\partial^3X}{1.2.3.(\partial x)^3}$$

$$+(m.2^{m-1}+7m^{2|-1}2^{m-2}+6m^{3|-1}2^{m-3}+m^{4|-1}2^{m-4})\frac{h^4\partial^4X}{1.2.3.4.(\partial x)^4}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Diese Darstellung gilt für jedes beliebige m und stellt die positiven und negativen Aufstufungen jeder beliebigen Function (also lgx, x^p etc.) dar. Der besondere Fall, wenn $m=-1$, gibt eine bemerkenswerthe Reihe; sie ist

$$\text{II.}\quad \zeta^{-1}X=\frac{X}{2}-\frac{1}{4}\frac{h\partial X}{\partial x}+\frac{1}{8}\frac{h^3\partial^3X}{1.2.3(\partial x)^3}-\frac{1}{4}\frac{h^5\partial^5X}{1.2\ldots5.(\partial x)^5}$$
$$+\frac{17}{16}\frac{h^7\partial^7X}{1.2\ldots7(\partial x)^7}-\ldots$$

und steht der Bernoullischen Reihe zur Seite, denn sie lehrt die Potenzenreihen mit abwechselnden Zeichen

$$1^p-2^p+3^p-4^p+\ldots\pm x^p$$

summiren, wie die Bernoullische Reihe die Potenzenreihen mit einerlei Zeichen summiren lehrt, und hat daher dieselbe praktische Bedeutung in einer Theorie der Summenrechnung wie die Bernoullische Reihe.

§. 5.

Die §§. 2—4. enthalten nach unserm Erachten in kurzem Umrisse die Grundlage einer Rechnung mit endlichen Differenzen, und zwar vorerst für einfache Functionen. Hieran reiht sich sodann die Darstellung der positiven und negativen Unterschiede und Aufstufungen der zusammengesetzten Functionen, was wir nicht weiter verfolgen, sondern nur andeuten. Erst wenn diese Vorarbeiten vollendet sind, kann zu einer Summenrechnung mit einfachen und zusammengesetzten Functionen übergegangen werden. Ueberblickt man nun die hier mitgetheilten Resultate, so zeigt sich, dass die sogenannte Differenzen-Rechnung den grössten Theil des calcul direct et inverse aux différences bei Lacroix, und auch der Differenzen- und Summenrechnung des Verf. umschliesst, und mit Recht umschliessen muss, denn das Zeichen Σ, welches Lacroix und der Verf. gebraucht, ist nichts anders als das Zeichen Δ mit einem negativen Exponenten. Da nun alle Gesetze für $\Delta^{+m}X$ und $\Delta^{-m}X$ unter einen Gesichtspunkt fallen, so können sie nicht von einander geschieden werden. Eine Trennung in zwei ihrer Natur nach geschiedene Abtheilungen, wie Lacroix und der Verf. vornimmt, steht daher mit einer Theorie dieser Gebilde nicht im Einklang. Dass sie aber einem und demselben Bildungsgesetze unterliegen, kann nach den hier gegebenen Mittheilungen nicht in Zweifel gezogen werden. Endlich liegt auch der Zusammenhang

zwischen $\Delta^{+m}X$ und $\Delta^{-m}X$, $\zeta^m X$ und $\zeta^{-m}X$ so einfach zu Tage, dass alle Complicationen wegfallen, und dass also auch der Zweifel des Verf., ob überhaupt ein „allgemeines Bildungsgesetz" abgesehen werden kann (S. 118. §. 8.) nicht gegründet ist, da ein solches existirt.

§. 6.

Mit den bisher aufgefundenen Hülfsmitteln kann nun eine Summenrechnung ohne Schwierigkeit durchgeführt werden, worin die Trennung in zwei Hauptarten von Reihen, mit einerlei und abwechselnden Gliedern, sogleich hervortritt. Die Betrachtungen nun, welche derselben eine feste Unterlage geben, sind (§. 72. u. ff. u. §. 104. u. ff. Cr. Jour. 14. u. 15. Bd.) der Lehre v. d. aufst. Funct. niedergelegt. Bezeichnet man nun auf folgende Weise:

$$1.\quad X_0 + X_1 + X_2 + X_3 \dots + X_n = SX_n,$$

$$2.\quad X_0 - X_1 + X_2 - X_3 \dots (-)^n X_n = S(-)^n X_n;$$

so erhält man durch eine elementare Erörterung folgende Grundgesetze für die Darstellung der Summen aller einfachen Functionen:

$$3.\quad SX_n = \Delta^{-1}X_{n+1} - \Delta^{-1}X_0,$$

$$4.\quad S(-)^n X_n = (-)^m \zeta^{-1} X_{n+1} + \zeta^{-1} X_0.$$

Die Auffindung des fraglichen Summen-Ausdrucks beruht daher auf der entwickelten Darstellung zweier Ausdrücke der ersten negativen Differenz oder Aufstufung einer Function. Da nun in §. 3. und §. 4. gezeigt wurde, wie sie für alle Fälle gefunden werden können, so kann auch die vorliegende Aufgabe (1.—4.) immer gelöst werden. Als Beispiel diene der weniger einfache Fall, wenn $X_0 = x^p$ ist. Man erhält dann aus 7. §. 4. nach der Vorschrift von 3.:

$$
\begin{aligned}
5.\quad SX_n &= x^p + (x+h)^p + (x+2h)^p + \dots (x+nh)^p \\
&= \frac{1}{(p+1)h}[(x+(n+1)h)^{p+1} - x^{p+1}] \\
&\quad - \frac{1}{2}[(x+(n+1)h)^p - x^p] \\
&\quad + \frac{p}{12}[(x+(n+1)h)^{p-1} - x^{p-1}]h \\
&\quad - \frac{p(p-1)(p-2)}{120.1.2.3}[(x+(n+1)h)^{p-3} - x^{p-3}]h^3 \\
&\quad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

Aus 11. §. 4. erhält man nach 4. folgende zwei besondere Fälle, für ein gerades und ungerades n:

$$6.\quad x^p - (x+h)^p + (x+2h)^p \dots + (x+nh)^p = S(-)^n X_n$$

$$=\frac{1}{2}[x+(n+1)h)^p+x^p]$$

$$-\frac{p}{4}h[(x+(n+1)h)^{p-1}+x^{p-1}]$$

$$+\frac{p(p-1)(p-2)}{8.1.2.3}h^3[(x+(n+1)h)^{p-3}+x^{p-3}]$$

$$-\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{4.1.2.3.4.5}h^5[(x+(n+1)h)^{p-5}+x^{p-5}]$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

7. $x^p-(x+h)^p+(x+2h)^p\ldots-(x+nh)^p=S(-)^n X_n$

$$=-\frac{1}{2}[(x+(n+1)h)^p-x^p]$$

$$+\frac{p}{4}h[(x+(n+1)h)^{p-1}-x^{p-1}]$$

$$-\frac{p(p-1)(p-2)}{8.1.2.3}h^3[(x+(n+1)h)^{p-3}+x^{p-3}]$$

Die aus 5. sich ergebenden besondern Fälle sind bekannt. Die aus 6. und 7. sich ergebenden weniger. Wir stellen daher einige hier zusammen, damit man daraus die Anwendbarkeit der hier mitgetheilten Methode ermessen könne:

8. $1-2+3-4+\ldots\pm n=\frac{n+1}{2}$

$$=-\frac{n}{2},$$

$$1-2^2+3^2-4^2+\ldots\pm n^2=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{1.2}$$

$$=-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}=-\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$1-2^3+3^3-4^3+\ldots\pm n^3=\frac{n^3}{2}+\frac{3n^2}{4}-\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{n^3}{2}-\frac{3n}{4},$$

$$1-2^4+3^4-4^4+\ldots\pm n^4=\frac{n^4}{2}+n^3-\frac{n}{2}$$

$$=-\frac{n^4}{2}-n^3+\frac{n}{2},$$

$$1-2^5+3^5-4^5+\ldots\pm n^5=\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{4}-\frac{5n^2}{4}+\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{n^5}{2}-\frac{5n^4}{4}+\frac{5n^2}{4},$$

u. s. w. Die ersten Ausdrücke gelten für ein gerades n, also für eine ungerade Gliederanzahl, die zweiten für ein ungerades n, also für eine gerade. Das Fördernde dieser Methode macht sich besonders klar, wenn man die Art hiemit vergleicht, wie Euler Diff. Rechnung 2. Thl. §. 178. u. ff. und nach ihm Lacroix, Calc. diff. et int. T. III. p. 997. u. ff. diese Reihen behandelt haben, ohne aus den speciellen Fällen herauszutreten.

Die Gleichungen 3. und 4. zeigen den Zusammenhang zwischen S (Begriff der Summe) und Δ^{-1} oder ζ^{-1} (erste negative Differenz oder Zuzählung) und beweisen dadurch, dass beide nicht identisch sind, obgleich im einzelnen Falle beide zusammenfallen können. Häufig wird Δ^{-m} durch Σ^m bezeichnet, diess thut Laplace, der auch $\Delta^{-m} = \Sigma^m$ angibt, Lacroix und auch Euler. Die Bezeichnung des Begriffs von $\Delta^{-m}X$ durch $\Sigma^m X$ halte ich nicht für zweckmässig. Sie verwischt den Zusammenhang, der zwischen $\Delta^m X$ und $\Sigma^m X$ herrscht, beinahe ganz, während die Bezeichnung $\Delta^{-m} X$ ihn hervorhebt und die Theorie auf $\Delta^{-m} X$, nicht aber auf $\Sigma^m X$ führt. Zu dem hat Laplace (Théorie des probabilités) sich nur mit der Darstellung von Δ^{-m}, durchaus aber nicht mit Auffindung von Summenausdrücken (S) beschäftigt.

Der Verf. entwickelt S. 86. §. 1. der Summenrechnung den Begriff von Summe ganz richtig, verlässt ihn aber alsbald wieder, und kehrt zu dem gewöhnlichen Begriff der „willkührlichen Constante" zurück, der ihn dann zu folgender Darstellung führt:

$$9. \quad fx = \Sigma\varphi(x) + C.$$

Wir halten diese Definition im Rückblick auf 3. und 4. nicht für zweckmässig, da ihr die nöthigende Kraft des innern Zusammenhangs fehlt. In dem Begriffe der Summe (3. und 4.) ist nichts Willkührliches. Die Ausdrücke ($\Delta^{-1}X_0$ und $\zeta^{-1}X_0$, gewöhnlich Constante genannt) sind eben so gut integrirende Theile des Summenausdrucks wie $\Delta^{-1}X_{n+1} = \Sigma X_{n+1}$ und $\zeta^{-1}X_{n+1}$, und daher weder überhaupt willkührlich, noch enthalten sie etwas Willkührliches. Sie sind durch und durch bestimmt, wie denn auch diese Bestimmtheit in der Consequenz der Theorie einer Wissenschaft liegen muss. Sogar für die Integral-Rechnung sind diese Bemerkungen von Belang, wo der Begriff der Constante (ins Besondere bei dem bestimmten Integrale) wieder hervortritt, wie denn überhaupt der Zusammenhang zwischen Differenzen- und Differenzialrechnung, Summenrechnung und Integralrechnung unbezweifelt vorausgesetzt werden darf.

§. 7.

Ist nun der Begriff des Summenausdruckes einer einfachen Function gegeben, so wird man durch Wiederholung auf Summen von den Summen, wiederholte Summen, von dem Verf. vielfache Summen genannt, geführt. Hier ist zweierlei zu bestimmen: *a*) wie die Summenausdrücke für sie gefunden werden, *b*) was unter ihnen zu denken sei?

Die Beantwortung dieser zwei Fragen führt zu folgenden Darstellungen, die in §.73. und §. 90., §.91. meiner oben genannten Schrift entwickelt sind:

$$1.\quad S^2 X_n = (n+1) X_0 + n X_1 + (n-1) X_2 + \cdots + X_n$$

$$= \Delta^{-2} X_{n+2} - \frac{n+1}{1} \Delta^{-1} X_0 - \Delta^{-2} X_1,$$

$$S^3 X_n = [n+1]_2 X_0 + [n]_2 X_1 + [n-1]_2 X_2 \ldots + X_n$$

$$= \Delta^{-3} X_{n+3} - [n+1]_2 \Delta^{-1} X_0 - [n+1]_1 \Delta^{-2} X_1 - \Delta^{-3} X_2,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$S^m X_n = [n+1]_{m-1} X_0 + [n]_{m-1} X_1 + [n-1]_{m-1} X_2 + \ldots X_n$$

$$= \Delta^{-m} X_{m+n} - [n+1]_{m-1} \Delta^{-1} X_0 - [n+1]_{m-2} \Delta^{-2} X_1 - \ldots - \Delta^{-m} X_{m-1}$$

$$\text{u. } 2.\quad S^m(-)^m X_n = X_n - [2]_{m-1} X_{n-1} + [3]_{m-1} X_{n-2} - \ldots \pm [n+1]_{m-1} X_0$$

$$= \zeta^{-m} X_{n+m} \pm [n+1]_{m-1} \zeta^{-1} X_0 \pm [n+1]_{m-2} \zeta^{-2} X_1 \ldots \pm \zeta^{-m} X_{m-1}$$

Die Form der sich aus §. 90. und §. 91. ergebenden Reihen mit ihren Summen-Ausdrücken ist

$$3.\quad X_0 + 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 \ldots + (n+1) X_n$$

$$= (n+1) \Delta^{-1} X_{n+1} - \Delta^{-2} X_{n+1} + \Delta^{-2} X_0,$$

$$X_0 + [2]_2 X_1 + [3]_2 X_2 + [4]_2 X_3 \ldots [n+1]_2 X_n$$

$$= [n+1]_2 \Delta^{-1} X_{n+1} - [n+1]_1 \Delta^{-2} X_{n+1} + \Delta^{-3} X_{n+1} - \Delta^{-3} X_0.$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$X_0 + [2]_{m-1} X_1 + [3]_{m-1} X_2 + [4]_{m-1} X_3 \ldots [n+1]_{m-1} X_n$$

$$= [n+1]_{m-1} \Delta^{-1} X_{n+1} - [n+1]_{m-2} \Delta^{-2} X_{n+1} \ldots$$

$$\ldots (-)^{m-1} \Delta^{-m} X_{n+1} \, (-)^m \Delta^{-m} X_0;$$

$$4.\quad X_0 - [2]_{m-1} X_1 + [3]_{m-1} X_2 - [4]_{m-1} X_3 \ldots \pm [n+1]_{m-1} X_n$$

$$= \pm [n+1]_{m-1} \zeta^{-1} X_{n+1} \pm [n+1]_{m-2} \zeta^{-2} X_{n+1} \ldots \pm \zeta^{-m} X_{n+1} + \zeta^{-m} X_0.$$

Hierin ist $[q]_r = \frac{q(q+1)(q+2)\ldots(q+r-1)}{1.2.3\ldots r}$. Die in 1. und 2. angegebenen Summen-Ausdrücke enthalten so viele Constanten (wenn man diesen Ausdruck gebrauchen will) als die Wiederholung der Summenrechnung verlangt; die in 3. und 4. angegebenen nur eine Constante.

Der Verf. behandelt zwar §. 8. 2te Abth. S. 115. die vielfachen endlichen Integrale. Was sich aber der Leser darunter für einen Begriff zu bilden habe, geht nicht klar und deutlich hervor. Diese Unbestimmtheit möchte zum Theil darin ihren Grund haben, dass nicht zwischen SX_n (Summenausdruck) und $\Sigma X_n = \Delta^{-1} X_n$ (negativer Unterschied einer Function) gehörig unterschieden ist. Auf Seite 117. ist z. B. für $\Sigma^{(n)} a^x = \Delta^{-n} a^x$ (vergl. 15. §. 3.) folgende Gleichung angegeben:

$$5.\ \Sigma^{(n)} a^x = \frac{a^x}{(a^h-1)^n} + C_0 + C_1 x + \ldots C_{n-1} x^{n-1},$$

dabei aber nicht erörtert, was unter $\Sigma^{(n)} a^x$ zu verstehen, noch wie die „willkührlichen Constanten“ C_0, C_1, $C_2 \ldots C_{n-1}$ gefunden werden. Nach den hier gegebenen Mittheilungen ergibt sich aus 15. §. 3. und 1. dieses Paragraphen unverzüglich

$$6.\ S^m a^x = [n+1]_{m-1} a^x + [n]_{m-1} a^{x+h} + [n-1]_{m-1} a^{x+2h} \ldots a^{x+nh}$$

$$= \frac{a^{x+(n+1)h} - a^{x+(m-1)h}}{(a^h-1)^m} - \frac{[n+1]_{m-1}\, a^x}{a^h-1} - \frac{[n+1]_{m-2}\, a^{x+h}}{(a^h-1)^2} \ldots$$

$$\ldots - \frac{(n+1) a^{x+(m-2)h}}{(a^h-1)^{m-1}}.$$

Auch Laplace spricht (Théorie anal. d. probab. Chap. I. Nro. II. bei Darstellung von $\Sigma^m = \Delta^{-m}$ der Functionen von „willkührlichen Constanten“ die man bei der wiederholten Integration gewinnt, lässt aber ihren Begriff gleichfalls unerörtert. Welche Stelle soll aber ein unerörterter Begriff in einem Systeme einnehmen?

§. 8.

Die in dem Vorhergehenden niedergelegten Bemerkungen bilden meines Erachtens die Grundlage für die systematische Durchführung einer Theorie der Differenzen und Summen. Ist nach dieser Grundlage das hierher gehörige Material verarbeitet, dann reihen sich an sie, als ein organisches Ganze, die übrigen Mittel zur Summirung der Reihen (einfacher und zusammengesetzter), welche noch aus andern Zweigen der Mathematik beschafft werden können, sowie die Kritik der hiebei zu benutzenden Mittel, wie Convergenz der Reihen etc., welche der Verf. auch gegeben hat.

Ich bin nun weit entfernt, die hier gegebenen Andeutungen für etwas anderes als was sie sind, nämlich die subjective Ansicht eines Einzelnen, und daher weder für besser als die eines Andern, noch für die einzig richtige Auffassungsweise des hier einzuschlagenden Systems zu halten. Doch glaube ich, dass sie manches gute, zur Aussaat brauchbare Korn und manchen Vorzug vor der bisher befolgten Behandlungsweise enthalten. Sie führen wenigstens einen Zweig (Aufstufungen und Summen der Reihen mit abwechselnden Zeichen) in das System und überbieten die bisher angewendeten Methoden an Brauchbarkeit und in Erzeugung des Materials. Ich darf daher wohl die

Ueberzeugung aussprechen, dass der Verf. bei seiner Gewandtheit in Handhabung des Calculs, eine gehaltreichere Schrift dem Publicum übergeben hätte, wenn er von der hier angeregten, allgemeinern Ansicht in Durchführung der Differenzen- und Summenrechnung ausgegangen wäre, daran die weiteren Resultate geknüpft hatte, welche in der neuesten Zeit von anderen Schriftstellern eröffnet wurden, und dadurch zur Feststellung der Grundzüge einer Wissenschaft, ihrer Verbreitung und Erweiterung beigetragen hätte.

Die hier niedergelegten Bemerkungen sind keiner Nebenabsicht, sondern dem Wunsche entsprungen, nach Vermögen zur wissenschaftlichen Begründung des von dem Verf. behandelten Zweigs der Mathematik beizutragen. Ihr Zweck soll daher nicht ein leeres und unfruchtbares Negiren sein, sondern ein gemeinsames Aufbauen. Hiezu ist Austausch der Ansichten und vereinte Kraft nöthig, denn nur auf diesem Wege wird die Wissenschaft gefördert werden. Die vorliegende Schrift soll als Compendium für akademische Vorlesungen dienen. Vielleicht nimmt der Verf. hiebei gelegentlich die Veranlassung, das Gesagte zu beachten und zu prüfen, ob und was daran als richtig sich bewähre; es hat ja ohnedem grossen Reiz, bei wiederkehrenden Vorträgen einen und denselben Zweig der Wissenschaft von verschiedenen Seiten aus zu betrachten und zu beleuchten.

Unter die Verbesserungen sind noch nachträglich, ausser den in §. 3. angegebenen, aufzunehmen:

S. 19 Z. 12. v. o. $\Delta^5 \text{Sin}\, x = +(2\,\text{Sin}\tfrac{1}{2}h)^5 \text{Cos}\left(x+\frac{5h}{2}\right)$

statt $(2\,\text{Sin}\tfrac{1}{2}h)^5 \text{Sin}\left(x+\frac{5h}{2}\right)$,

S. 178 Z. 13. v. o. $\frac{x+2h}{x}-y$ statt $\frac{x+2h}{x}-x$.

III.

De ellipsi minima dato quadrangulo circumscripta.

Quaesivit

Franciscus Seydewitz.

Perlegenti nuper, quae de problemate suprascripto Illustr. Angerus, gymnasii Gedanensis Professor, disseruit, in mentem mihi venit propositionis cuiusdam, in quam paullo antea incideram, quum de persimili re, scilicet de ellipsi maxima quadrilatero inscribenda quaererem, et qua iam tunc mihi videbatur ad eiusdem problematis solutionem via ab illa Euleriana plane diversa aperiri. Neque ea me spes fefellit; intellexi tamen, postquam proprius ad rem accessi, solutionem, quam inde obtinui, ad eas quidem figuras, quae ad universum quadrangulorum genus pertinent, accommodatissimam esse ac praesertim peculiari geometriae usui magis se applicare, quam illam, cuius Eulerus inventor fuit, paene totam in numerorum spinis versantem: in speciebus vero, ut in trapezio, in parallelogrammo et in quadrangulo decurtato sive triangulo, excepta una, ubi alterutra diagonalium per alteram bipartitur, omni plane usu carere. In his igitur ad alias methodos confugiendum erit, quas tamen, quum nihil difficultatis habeant, hic praetermittam.

§. 1.

Fingamus (Tab. I. Fig. 1.), esse rectas PQ, QR, RP tres polares harmonicas coniugatas, ad ellipsin $ABCD$ relatas; rectam MZ semidiametrum huius ellipseos per punctum R ductam et lineam PQ in puncto V secantem, atque MX esse semidiame-

trum lineae PQ parallelam: primum apparet, puncta R et V duos polos esse harmonicos coniugatos rectae MZ, et ob eam caussam

$$MR.MV = MZ^2.$$

Deinde quum sit PQ polaris harmonica puncti R, eademque lineae MX parallela, erit MX semidiametro MZ coniugata, atque ideo puncta Y et y, ubi MX per lineam PR et per lineam Qy, rectae MZ parallelam, secatur, erunt duo poli harmonici coniugati lineae MX, itaque

$$MY.My = MX^2.$$

Jam vero, si angulos QRV, PRV, RMY (seu RVP), QPR et PRQ deinceps literis α, β, φ, γ, ψ designemus, aequationes prodeunt hae:

$$MY = MR.\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \text{ et } My = QV = RQ.\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = PQ.\frac{\sin\alpha.\sin\gamma}{\sin\varphi.\sin\psi};$$

unde sequitur:

$$[MZ.MX.\sin\varphi]^2 = [2\Delta ZMX]^2$$

$$= MR.MV.MY.My.\sin^2\varphi = MR^2.MV.PQ.\frac{\sin\alpha.\sin\beta.\sin\varphi}{\sin\psi};$$

vel si literis p, q, r rectae perpendiculares e centro M ad QR, PR, PQ demissae notentur:

$$[2\Delta ZMX]^2 = \frac{PQ}{\sin\psi}.p.q.r,$$

quia $p = MR.\sin\alpha$, $q = MR.\sin\beta$ et $r = MV.\sin\varphi$ esse debent.

Quoniam duarum ellipsium areae ut triangula a binis semidiametris coniugatis earum constituta se habent: si tres polares harmonicas coniugatas PQ, QR, RP easdem simul ad diversas ellipses referamus, et literis p, p_1; q, q_1; r, r_1 aut, perinde ut supra, ternas rectas perpendiculares aut omnino ternas parallelas, e centris earum ad lineas QR, RP, PQ demissas designemus, ex aequatione modo inventa colligimus, areas illarum ellipsium quadratas esse sicut producta $p.q.r$ et $p_1.q_1.r_1$; id quod in hunc modum exprimere possumus:

Theorema I.

Binarum ellipsium areae quadratae sunt inter se, ut ternorum segmentorum producta, quae, tribus rectis lineis utcunque datis parallela, inter centra ipsarum

et tres rectas polares harmonicas coniugatas, curvis ipsis communes, intercipiuntur.

Hinc autem, quoniam lineae PQ, QR, RP, quae intersectiones P, Q, R laterum oppositorum quadranguli completi $ABCD$ inter se iungunt, quoad omnes ellipses per puncta A, B, C, D transeuntes, polares tres harmonicae coniugatae sunt, sine ullo negotio efficitur:

Theorema 2.

Inter omnes ellipses, per eadem quattuor puncta transeuntes, eius area minima erit, e cuius centro si ad eas lineas, quae coraustorum*) quadranguli completi, per illa puncta constituti, intersectiones tres coniungunt, tria segmenta datis quibuslibet rectis parallela ducantur, istorum segmentorum productum omnium minimum existet.

Praeterea constat, quod etiam in tomo quarto „Archivi Grunertiani" geometrice a me ostensum est:

Theorema 3.

Omnium sectionum conicarum, per eadem quattuor puncta transeuntium, centra in alius sectionis conicae peripheria sita esse, quae quadranguli completi, per illa puncta constituti, latera sex bifariam secet atque insuper coraustorum eius tres intersectiones contineat.

Duobus hisce theorematis posterioribus perspectis, cetera omnia per se patent. Primum enim aequatio eius sectionis conicae, quae omnium ellipsium quadrangulo dato circumscriptarum centra complectitur, quaerenda et, quo facilior theorematis secundi applicatio fiat, ita conformanda erit, ut segmenta, quae tria numero e singulis huius sectionis conicae punctis ad polares harmonicas coniugatas, illis ellipsibus communes, ducuntur, simul coordinatarum vices sustineant; deinde istius aequationis ope oportebit productum trium illorum segmentorum per haec ipsa segmenta variabilia exprimatur et differentiale eius $= 0$ ponatur; quo facto, assumptaque ad duas aequationes ita ortas tertia, quae inter tres cuiusque puncti coordinatas intercedit, conditiones centri ellipseos quaesitae apparebunt.

---

*) Haec vox, a lexicographis neglecta, apud Boëtium vel potius Julium Frontinum, quem ille sequitur, quadranguli latus basi oppositum, hic omnino latera eius opposita significat (Chasles Gesch. d. Geom., übersetzt v. Sohnke, p. 522.).

§. 2.

Ponamus igitur, esse A, B, C, D puncta quattuor data, per quae ellipsis minima ducatur: ante omnia moneo, haec puncta ita debere inter se collocata esse, ut nullum eorum intra triangulum a reliquis effectum cadat. Sint porro P, Q, R intersectiones coraustorum AB et CD, AC et BD, AD et BC quadranguli completi, quod per illa puncta constituitur; puncta J, G, L, E, F, H medietates istorum laterum, et P_1, Q_1, R_1 ea puncta, ubi lineae QR, PR, PQ a lineis PA, QA, RA secantur. Supponitur autem hic, A illud esse e quattuor punctis A, B, C, D, quod intra triangulum PQR se habet. Denique segmenta PP_1, QQ_1, RR_1; AP_1, AQ_1, AR_1 deinceps literulis p_1, q_1, r_1; π, $\varkappa$, ϱ designentur.

Consentaneum est, coordinatarum munus eis segmentis iniungere, quae rectis PP_1, QQ_1, RR_1 parallela ex quolibet puncto usque ad rectas QR, PR, PQ tendunt, istaque, literis p, q, r notanda, sensu aut positivo aut negativo accipere, prout punctum, quod definiunt, ex eadem parte linearum QP, PR, PQ atque anguli eis oppositi P, Q, R, aut ex parte contraria sumatur. Hoc autem pacto, notum est, inter cuiuslibet puncti coordinatas hanc aequationem existere:

$$\frac{p}{p_1}+\frac{q}{q_1}+\frac{r}{r_1}=1. \tag{1}$$

Et quoniam sectio conica, ellipsium illarum centra continens, per puncta P, Q et R meat, aequationi igitur eius binis coordinats p et q, p et r vel q et $r=0$ positis satisfieri necesse est; praetereaque quum omnis sectio conica quinque punctis suis datis ab omni parte determinata sit, perspicuum est, aequationem istius sectionis sic debere comparatam esse:

$$pq+\mu.pr+\nu.qr=0;$$

ubi μ et ν quantitates duas denotant constantes, quarum valores e duorum adhuc curvae punctorum coordinatis eruendi sunt.

§. 3.

Coordinatae p et q omnis puncti, quod ad rectam infinitam RR_1 pertinet, legem sequuntur hanc:

$$\frac{p}{q}=\frac{AP_1}{AQ_1}=\frac{\pi}{\varkappa};$$

et si e puncto C ad rectam QR linea CP_{11}, lineae AP_1 paral-

lela ducatur, punctorum Q, A, Q_1, C quattuor harmonicorum ratione habita, proportio haec evadit:

$$\frac{CP_{11}}{AP_1}=\frac{CQ}{AQ}=\frac{CQ_1}{AQ_1}, \quad \text{sive} \quad \frac{CP_{11}}{CQ_1}=\frac{\pi}{\varkappa}=\frac{p}{-q}.$$

Itaque linearum infinitarum

RA et RC aequationes

erunt:

$$\frac{p}{\pi}-\frac{q}{\varkappa}=0 \quad \text{et} \quad \frac{p}{\pi}+\frac{q}{\varkappa}=0; \tag{1}$$

perindeque pro lineis

QA et QB aequations:

$$\frac{r}{\varrho}-\frac{p}{\pi}=0 \quad \text{et} \quad \frac{r}{\varrho}+\frac{p}{\pi}=0; \tag{2}$$

et pro lineis

PA et PC aequationes:

$$\frac{q}{\varkappa}-\frac{r}{\varrho}=0 \quad \text{et} \quad \frac{q}{\varkappa}+\frac{r}{\varrho}=0 \tag{3}$$

obtinentur.

Jam ad determinationem punctorum A, B, C et D venimus. Primi quidem iam supra statuimus coordinatas esse

$$p=\pi, \quad q=\varkappa, \quad r=\varrho,$$

quamobrem aequatio (1) ad istud punctum relata in hanc abit:

$$\frac{\pi}{p_1}+\frac{\varkappa}{q_1}+\frac{\varrho}{r_1}=1. \tag{4}$$

Deinde, quum sit $DR:AR=DR_1:AR_1$, sive $DR_1-r_1:r_1-\varrho=DR_1:\varrho$, erit $DR_1=\frac{r_1\varrho}{2\varrho-r_1}$, quo valore pro r in aequationes linearum QB et PC transscripto, puncti D coordinatae prodeunt:

$$p=-\frac{r_1\pi}{2\varrho-r_1}; \quad q=-\frac{r_1\varkappa}{2\varrho-r_1}; \quad r=\frac{r_1\varrho}{2\varrho-r_1};$$

et quum sit $CQ_1:AQ_1=CQ:AQ$, sive

$$CQ_1: \varkappa = CQ_1+q_1:q_1-\varkappa,$$

ubi segmentum CQ_1 negative sumendum est et $q_1 > 2\varkappa$, efficitur $CQ_1 = -\frac{q_1 \varkappa}{q_1 - 2\varkappa}$, indeque, adhibitis linearum RC et PC aequationibus, coordinatae puncti C, nimirum:

$$p = \frac{q_1 \pi}{q_1 - 2\varkappa}; \quad q = -\frac{q_1 \varkappa}{q_1 - 2\varkappa}; \quad r = \frac{q_1 \varrho}{q_1 - 2\varkappa};$$

similique modo coordinatae puncti B:

$$p = -\frac{p_1 \pi}{p_1 - 2\pi}; \quad q = \frac{p_1 \varkappa}{p_1 - 2\pi}; \quad r = \frac{p_1 \varrho}{p_1 - 2\pi} \text{ gignuntur.}$$

Horum tandem valorum ope et adhibita aequatione (4) facili negotio iam linearum AD, BC, AC, BD, AB, CD medietates i. e. puncta F, H, L, E, J, G determinari possunt. Procul dubio enim erunt coordinatae

puncti F:

$$p = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{r_1 \pi}{2\varrho - r_1}\right) = -\pi \, \frac{r_1 - \varrho}{2\varrho - r_1};$$

$$q = \frac{1}{2}\left(\varkappa - \frac{r_1 \varkappa}{2\varrho - r_1}\right) = -\varkappa \, \frac{r_1 - \varrho}{2\varrho - r_1};$$

$$r = \frac{1}{2}\left(\varrho + \frac{r_1 \varrho}{2\varrho - r_1}\right) = \varrho \, \frac{\varrho}{2\varrho - r_1};$$

puncti H:

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{q_1 \pi}{q_1 - 2\varkappa} - \frac{p_1 \pi}{p_1 - 2\pi}\right) = -\pi \, \frac{q_1 \pi - p_1 \varkappa}{(p_1 - 2\pi)(q_1 - 2\varkappa)};$$

$$q = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1 \varkappa}{p_1 - 2\pi} - \frac{q_1 \varkappa}{q_1 - 2\varkappa}\right) = \varkappa \, \frac{q_1 \pi - p_1 \varkappa}{(p_1 - 2\pi)(q_1 - 2\varkappa)},$$

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1 \varrho}{p_1 - 2\pi} + \frac{q_1 \varrho}{q_1 - 2\varkappa}\right) = \varrho \, \frac{p_1 q_1 \varrho}{r_1 (p_1 - 2\pi)(q_1 - 2\varkappa)};$$

puncti L:

$$p = \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{q_1 \pi}{q_1 - 2\varkappa}\right) = \pi \, \frac{q_1 - \varkappa}{q_1 - 2\varkappa};$$

$$q = \frac{1}{2}\left(\varkappa - \frac{q_1 \varkappa}{q_1 - 2\varkappa}\right) = -\varkappa \, \frac{\varkappa}{q_1 - 2\varkappa};$$

$$r = \frac{1}{2}\left(\varrho + \frac{q_1 \varrho}{q_1 - 2\varkappa}\right) = \varrho \, \frac{q_1 - \varkappa}{q_1 - 2\varkappa};$$

puncti E:

$$p=-\frac{1}{2}\left(\frac{r_1\pi}{2\varrho-r_1}+\frac{p_1\pi}{p_1-2\pi}\right)=-\pi\,\frac{p_1\varrho-r_1\pi}{(p_1-2\pi)(2\varrho-r_1)};$$
$$q=\frac{1}{2}\left(\frac{p_1\varkappa}{p_1-2\pi}-\frac{r_1\varkappa}{2\varrho-r_1}\right)=-\varkappa\frac{p_1 r_1\varkappa}{q_1(p_1-2\pi)(2\varrho-r_1)};$$
$$r=\frac{1}{2}\left(\frac{r_1\varrho}{2\varrho-r_1}+\frac{p_1\varrho}{p_1-2\pi}\right)=\varrho\frac{p_1\varrho-r_1\pi}{(p_1-2\pi)(2\varrho-r_1)};$$

puncti J:

$$p=-\pi\frac{\pi}{p_1-2\pi};\ q=\varkappa\frac{p_1-\pi}{p_1-2\pi};\ r=\varrho\frac{p_1-\pi}{p_1-2\pi};$$

et puncti G:

$$p=-\pi\frac{q_1 r_1\pi}{p_1(q_1-2\varkappa)(2\varrho-r_1)};\ q=-\varkappa\frac{q_1\varrho-r_1\varkappa}{(q_1-2\varkappa)(2\varrho-r_1)};$$
$$r=\varrho\frac{q_1\varrho-r_1\varkappa}{(q_1-2\varkappa)(2\varrho-r_1)}.$$

§. 4.

Ex his posterioribus sex punctis iam ad computandas quantitates μ et ν duorum quorumlibet coordinatae sufficient. Ex. gr. si punctorum L et J coordinatarum valores in aequationem $pq+\mu.pr+\nu.qr=0$ transscribuntur, praesto sunt aequationes:

$$\pi\varkappa^2-\pi\varrho(q_1-\varkappa).\mu+\varrho\varkappa^2.\nu=0;$$

$$\text{et}\quad \varkappa\pi^2+\varrho\pi^2.\mu-\varkappa\varrho(p_1-\pi).\nu=0;$$

e quibus

$$\mu=\frac{p_1\varkappa^2}{\varrho(p_1q_1-p_1\varkappa-q_1\pi)}=\frac{r_1\varkappa^2}{q_1\varrho^2};$$
$$\text{et}\quad \nu=\frac{q_1\pi^2}{\varrho(p_1q_1-p_1\varkappa-q_1\pi)}=\frac{r_1\pi^2}{p_1\varrho^2}$$

nanciscimur.

Hinc igitur compertum est, sectionis conicae, per centra omnium illarum ellipsium transeuntis, aequationem esse hanc quae sequitur:

$$pq.p_1q_1.\varrho^2+pr.p_1r_1.\varkappa^2+qr.q_1r_1.\pi^2=0,$$

vel elegantius scriptam:

$$\frac{\pi^2}{pp_1}+\frac{\varkappa^2}{qq_1}+\frac{\varrho^2}{rr_1}=0. \qquad \text{(II)}$$

Ceterum eandem nos aequationem nactos fuisse, si pro punctis L et J bina quaepiam e quattuor reliquis cepissemus, facile ex eo comprobabitur, quod introductis in illam aequationem ceteris valoribus, quos in fine antecedentis §. invenimus, aequationis veritas haud perit.

§. 5.

Jam consideremus aequationes hasce tres:

$$pq_1r_1+qp_1r_1+rp_1q_1=p_1q_1r_1; \qquad \text{(I)}$$

$$qr.q_1r_1.\pi^2+pr.p_1r_1.\varkappa^2+pq.p_1q_1.\varrho^2=0; \qquad \text{(II)}$$

et

$$r^2(qq_1\pi^2+pp_1\varkappa^2)r_1+p_1q_1.\varrho^2.R=0; \qquad \text{(III)}$$

quae posterior ex antecedente nascitur, litera R productum $p.q.r$ designante.

Differentiemus unamquamque earum secundum quantitates variabiles p, q et r, et ut producti minimi R conditio in rationes inferatur, differentiale huius producti $=0$ ponamus. Quod si fit, aequationes differentiales prodeunt hae:

$$q_1r_1.\partial p+p_1r_1.\partial q+p_1q_1.\partial r=0; \qquad \text{(IV)}$$

(V)

$$p_1(qq_1\varrho^2+rr_1\varkappa^2).\partial p+q_1(rr_1\pi^2+pp_1\varrho^2).\partial q+r_1(pp_1\varkappa^2+qq_1\pi^2).\partial r=0;$$

$$p_1\varkappa^2.r.\partial p+q_1\pi^2.r.\partial q+2(pp_1\varkappa^2+qq_1\pi^2).\partial r=0; \qquad \text{(VI)}$$

ad quas nova accedit, si postrema ab antecedente subducitur, postquam factore r_1 affecta est, videlicet haec:

$$p_1q_1\varrho^2.q.\partial p+p_1q_1\varrho^2.p.\partial q-r_1(pp_1\varkappa^2+qq_1\pi^2).\partial r=0. \qquad \text{(VII)}$$

E duabus posterioribus inter se iunctis colliguntur differentialia.

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{(pp_1\varkappa^2+qq_1\pi^2)(2pp_1\varrho^2+rr_1\pi^2)}{p_1\varrho^2(qq_1\pi^2-pp_1\varkappa^2)r};$$

et

$$\frac{\partial q}{\partial r}=-\frac{(pp_1\varkappa^2+qq_1\pi^2)(2qq_1\varrho^2+rr_1\varkappa^2)}{q_1\varrho^2(qq_1\pi^2-pp_1\varkappa^2)r}.$$

Quorum valorum ope nunc si ipsa differentialia ex aequatione (IV.) expelluntur, ista aequatio hanc formam induet:

$$q_1^2 r_1 (pp_1 \varkappa^2 + qq_1 \pi^2)(2pp_1 \varrho^2 + rr_1 \pi^2) \qquad \text{(VIII.)}$$
$$- p_1^2 r_1 (pp_1 \varkappa^2 + qq_1 \pi^2)(2qq_1 \varrho^2 + rr_1 \varkappa^2) + q_1^2 p_1^2 \varrho^2 r (qq_1 \pi^2 - pp_1 \varkappa^2) = 0.$$

Hic primum, iuxta aequationem (I), pro $q_1\ p_1\ r$ scribere licet

$$(p_1 q_1 - q_1 p - p_1 q) r_1$$

ac dein, extruso factore r_1, partes termini aequationis tertii:

$$- q_1^2 p_1 \varrho^2 (qq_1 \pi^2 - pp_1 \varkappa^2) p;$$
$$- p_1^2 q_1 \varrho^2 (qq_1 \pi^2 - pp_1 \varkappa^2) q \quad \text{et} \quad p_1^2 q_1^2 \varrho^2 (qq_1 \pi^2 - pp_1 \varkappa^2)$$

ita distribuere, ut prima cum primo, secunda cum secundo termino coeant, tertia denique sola relinquatur. Quo facto, eadem aequatio primum in hanc formam:

$$q_1^2 [3p^2 p_1^2 \varkappa^2 \varrho^2 + \pi^2 (qr.q_1 r_1.\pi^2 + pr.p_1 r_1.\varkappa^2 + pq.p_1 q_1.\varrho^2)]$$
$$- p_1^2 [3q^2 q_1^2 \pi^2 \varrho^2 + \varkappa^2 (qr.q_1 r_1.\pi^2 + pr.p_1 r_1.\varkappa^2 + pq.p_1 q_1.\varrho^2)]$$
$$+ p_1^2 q_1^2 \varrho^2 (qq_1 \pi^2 - pp_1 \varkappa^2) = 0;$$

ac tandem, aequatione (II) consulta, in sequentem, multo etiam simpliciorem, redigetur:

$$3(p^2\varkappa^2 - q^2\pi^2) = pp_1\varkappa^2 - qq_1\pi^2, \text{ sive}$$
$$3(p\varkappa + q\pi)(p\varkappa - q\pi) = pp_1\varkappa^2 - qq_1\pi^2.$$

Praeter istam autem has quoque alias:

$$3(p\varrho + r\pi)(p\varrho - r\pi) = pp_1\varrho^2 - rr_1\pi^2;$$
$$\text{et } 3(q\varrho + r\varkappa)(q\varrho - r\varkappa) = qq_1\varrho^2 - rr_1\varkappa^2 \qquad \text{(IX)}$$

valere, vix est quod moneam.

§. 6.

Aequationes (IX) invicem ita se habent, ut unaquaeque earum e duabus reliquis a se subtractis proficiscatur; tales igitur oportet tres sectiones conicas exprimant, quae per eadem quattuor puncta vadant vel omnino duas secantes coniugatas communes habeant. Et quoniam e conspiratione aequationum (II) et (VI) coortae sunt, manifestum est, curvas ipsas, quas repraesentant, illam sectionem conicam, quae omnium ellipsium, per puncta A, B, C et D ductarum, centra complectitur, in eo puncto secare, quod ad ellipsin omnium minimam spectet. Praeter istud autem punctum cum eadem sectione conica etiam duo alia communia habent, de quorum significatione posthac videbimus.

Etenim, ut rem accuratius scrutemur, primum clarum est, tres illas sectiones conicas omnes per centrum gravitatis S trianguli

PQR transire — quod quidem punctum in curva per aequationem (II) expressa non inest — quia unaquaeque aequationum (IX) valores

$$p=\frac{1}{3}p_1;\quad q=\frac{1}{3}q_1;\quad r=\frac{1}{3}r_1$$

admittit. Deinde quoniam iisdem aequationibus singulis, videlicet primae valores:

$$p=0,\ q=0;\ p=\frac{1}{3}p_1,\ q=0;\ p=0,\ q=\frac{1}{3}q_1;$$

secundae:

$$p=0,\ r=0;\ p=\frac{1}{3}p_1,\ r=0;\ p=0,\ r=\frac{1}{3}r_1;$$

tertiae:

$$q=0,\ r=0;\ q=\frac{1}{3}q_1,\ r=0;\ q=0,\ r=\frac{1}{3}r_1$$

satisfaciunt, necesse est, curvas ipsas tribus parallelogrammis circumscriptas esse, quae per latera trianguli *PQR* et tres rectas, eis parallelas et e centro gravitatis profectas, concinnantur, primam videlicet pallgr. $Sq_1\,Rp_{11}$, secundam pallgr. $Sp_1\,Qr_{11}$ et tertiam pallgr. $Sr_1\,Pq_{11}$, ut figura monstrat. Quapropter nunc centra quoque r, q, p istarum curvarum patent.

Praeterea, si ex. c. in prima aequationum (IX)

$$(p\varkappa+q\pi)(p\varkappa-q\pi)=0 \quad \text{ponatur},$$
$$pp_1\varkappa^2=qq_1\pi^2$$

concluditur esse, id quod fieri nequit, nisi aut $p=q=0$, aut $p=q=\infty$, aut simul $p_1\varkappa\pm q_1\pi=0$ eveniat. Atqui hoc tertium conditionem particularem, a consilio nostro alienam, involvit; ergo systema rectarum *RA* et *RC*, quod aequatione illa exprimi §. 3. vidimus, cum prima trium illarum curvarum praeter punctum *R* nulla alia nisi ad infinitum remota communia habet; ac propterea, si per centrum r huius curvae duae rectae *ard* et *crb*, lineis *ARD* et *CRB* parallelae ducantur, asymptotae ipsius, similiterque duarum reliquarum, deprehenduntur, ita ut iam plura, quam opus sunt, elementa ad istas curvas punctatim et solius regulae ope delineandas nobis suppetant.

Ceterum neminem fugerit, quia lineae quaternae *pq*, *pa*, *pr*, *pd*; *qp*, *qa*, *qr*, *qd* et *rq*, *ra*, *rp*, *rc* ex ordine, lineis *PQ*, *PA*, *PR*, *PD*; *QP*, *QA*, *QR*, *QD* et *RQ*, *RA*, *RP*, *RC* parallelae sunt, figuras ex utrisque hisce linearum fasciculis compositas inter se similes et similiter collocatas esse, ob eamque caussam, sicut rectas *PA*, *QA*, *BA*; *PD*, *QD*, *RA*; *PA* *QD*, *RC* et *PD*, *QA*, *RC* in quattuor punctis *A*, *D*, *B*, *C*: ita etiam asymptotas

pa, qa, ra; pd, qd, ra; pa, qd, rc et pd, qa, rc ternas in quattuor punctis a, d, b, c concurrere.

§. 7.

E mutuo situ punctorum P, L, R, J, Q et G, F, E, quae cuncta in eadem sectione conica sunt, concludere licet, priora quinque ad unum eundemque, tria reliqua ad alterum curvae ramum pertinere, ipsamque igitur ex hyperbolarum genere esse. Nam ex illis nullum intra triangula per quattuor reliqua constituta cadit; at contra, quoties ex iisdem quinque punctis aut quattuor. aut tria, aut duo deinceps cum uno, vel duobus, vel tribus e posterioribus coniunxeris, nova quaeque haec quinque puncta sic disposita erunt, ut saltem unum eorum in aliquo triangulo per reliqua constituto includatur.

Istinc sequitur, chordam PG et rectam pd, quae illi parallela est, utrumque curvae ramum perscindere, ideoque illud punctum, ubi ramus PRQ a linea pd secatur, inter puncta p et d cadere; contra vero rectas PJ et $apab$ solum hunc posteriorem ramum secare, duarumque intersectionum alteram a dextra, alteram a laeva parte puncti p iacere. Ergo manifestum est, angulum apd, qui per asymptotas pa, in contrariam partem prolongatam, et pd formatur, totum i e. inde ab altero usque ad alterum crus, per aliquem rami PRQ arcum praesepiri, propterеaque hunc ipsum arcum atque eum hyperbolae Sr_1Pq_{11} ramum, qui in eodem angulo extenditur, quia infinitus est et punctum q_{11}, a curva PRQ inclusum, continet, in duobus se invicem punctis P et N perscindere.

Quodsi tandem totius hyperbolae Sr_1Pq_{11} cursum, quatenus ad asymptotam $apab$ inclinatur, inde a punctis q_{11} et P usque ad punctum eius infinite remotum atque istinc, ad alterum ramum traiecti, rursus usque ad punctum S, mente prosequimur, modo illam in P ab interiore ad exteriorem rami PQR partem transmigrantem, modo ab exteriore ad interiorem reversam videmus, id quod fieri non potest, nisi eundem ramum in novo puncto K perrumpat.

Ex his apparet, hyperbolas Sr_1Pq_{11} et $PRQGE$ revera sese invicem in tribus punctis P, N et K, et ob eam ipsam caussam etiam in quarto M penetrare; quod vero de una hyperbolarum Sr_1Pq_{11}, Sp_1Qr_{11} et Sq_1Rp_{11} demonstratum est, idem sine dubio de reliquis quoque valet. Atque igitur puncta illa, quae supra tribus istis hyperbolis cum hyperbola $PRQGE$ communia esse diximus, haud fictitia sunt sive imaginaria putanda, sed revera existunt. Plura autem illa quam tria numero non esse, ipsa figura docet. Nimirum duo, N et K, ad ramum PRQ, tertium vero, M, solum ad alterum curvae ramum GFE pertinent.

§. 8.

Etiamnunc superest, ut naturam sectionum conicarum, quae quadrangulo $ABCD$ circumscriptae centris M, N et K utuntur, investigemus. Ad parabolarum quidem genus eas non pertinere, certum est; nam illa centra loca finita obtinent; utrum autem ellipsibus an hyperbolis, et quaenam quibusnam, adnumerandae sint, hoc ex sequentibus diiudicari poterit:

Omnis puncti polaris harmonica, prout illud extra vel intra curvam se habet, ad ellipsin relata aut eam secat et inter centrum eius atque illud ipsum punctum migrat, aut extrinsecus et ab eadem centri parte atque illud punctum existit; ad hyperbolam vero relata aut curvam secat et e contraria centri parte atque polus suus iacet, aut non secat et inter centrum curvae et polum suum transit.

Quae quum ita sint, puncta N et K ellipsium centra, per A, B, C, D meantium, esse non possunt. Nam lineae QR, PR, PQ punctorum P, Q, R polares harmonicae sunt respectu omnium sectionum conicarum, quae per A, B, C, D transeunt; neque tamen QR aut inter puncta P et N, aut ab eadem parte centri N atque P se habet; eademque rectae PR et punctorum Q et K ratio est. Ex contrario autem neque centrum M ad hyperbolam potest referri; quia, hoc si fieret, recta QR, quum inter P et M intercedat, tota extra curvam caderet, ergo PR, externi puncti Q polaris harmonica, ultra Q et M dimoveretur; id quod absurdum est. Persuasum igitur habemus, M ellipseos, N et K duarum hyperbolarum centra esse. Neque vero, quid istae quidem hic sibi velint, latere poterit, dum ad originem aequationis (II) regrediamur. Etenim quum expressio $MZ.MX.\sin\varphi$, quae §. 1. usuvenit, in hyperbola triangulum, ambabus asymptotis et tangenti cuilibet interiectum significet, perspicuum est, triangulum istud in duabus illis hyperbolis omnium minimum esse.

Fieri denique potest, ut hyperbolarum Sr_1Pq_{11}, Sp_1Qr_{11} Sq_1Rp_{11} aut una aut tres ad duarum rectarum systemata redigantur. Quod si enim aut

$$\frac{p_1}{q_1}=\pm\frac{\pi}{\varkappa},\ \text{aut}\ \frac{p_1}{r_1}=\pm\frac{\pi}{\varrho},\ \text{aut}\ \frac{q_1}{r_1}=\pm\frac{\varkappa}{\varrho}$$

eveniat, vel, quod eodem redit, si aut rectarum BC et AD, aut CA et BD, aut AB et CD una per alteram in partes aequales secetur, aequationes (IX) singulae in binas hasce simpliciores dissolvuntur:

$$3(p\varkappa\pm q\pi)=p_1\varkappa \quad \text{et} \quad p\varkappa\mp q\pi=0;$$
$$3(p\varrho\pm r\pi)=p_1\varrho \quad \text{et} \quad p\varrho\mp r\pi=0;$$
$$3(q\varrho\pm r\varkappa)=q_1\varrho \quad \text{et} \quad q\varrho\mp r\varkappa=0.$$

Ex. gr. si ex illis sex conditionibus eam, quae sola ad figuram nostram quadrat, admittimus, videlicet ut $\frac{p_1}{q_1}=\frac{\pi}{\varkappa}$ evadat, sive ut recta *BC* per *AD* bifariam secetur, erit:

$$3(p\varkappa+q\pi)=p_1\varkappa \text{ et } p\varkappa-q\pi=0;$$

unde, assumptis aequationibus (I) et (II), centrorum *N*, *K* et *M* coordinatae efficiuntur hae:

puncti *N*:

$$p=\frac{1}{6}\cdot\frac{p_1}{\varrho}(\varrho+\sqrt{\varrho^2+2(r_1-\varrho)^2});$$

$$q=\frac{1}{6}\cdot\frac{q_1}{\varrho}(\varrho-\sqrt{\varrho^2+2(r_1-\varrho)^2});\ r=\frac{2}{3}r_1;$$

puncti *K*:

$$p=\frac{1}{6}\cdot\frac{p_1}{\varrho}(\varrho-\sqrt{\varrho^2+2(r_1-\varrho)^2});$$

$$q=\frac{1}{6}\cdot\frac{q_1}{\varrho}(\varrho+\sqrt{\varrho^2+2(r_1-\varrho)^2});\ r=\frac{2}{3}r_1:$$

et puncti *M*:

$$p=-\pi\frac{r_1-\varrho}{2\varrho-r_1};\ q=-\varkappa\frac{r_1-\varrho}{2\varrho-r_1};\ r=\varrho\frac{\varrho}{2\varrho-r}.$$

Sub illa igitur conditione centrum ellipseos quaesitae cum puncto *F* confunditur

§. 9.

Totius iam disquisitionis nostrae haec fere summa erit:

Theorema 4.

Si in quadrangulo completo per centrum gravitatis eius trianguli, quod coraustorum intersectionibus determinatur, tres rectae lateribus parallelae ducantur, primo: unicuique parallelogrammorum, quae sic oriuntur, hyperbola circumscribi poterit, cuius asymptotae coraustis, in ipsa curva concurrentibus, parallelae sint; deinde: tres istae hyperbolae praeter gravitatis centrum per nova tria eademque puncta transibunt, et ea quidem puncta simul in quarta hyperbola sita

erunt, quae coraustorum quadranguli et medietates et intersectiones complectitur; denique, id quod gravissimum est: si quattuor puncta, quibus quadrangulum constituitur, ita disposita fuerint, ut nullum eorum intra triangulum a reliquis effectum cadat, unum e tribus illis punctis, quod intra ipsum quadrangulum est, centrum erit ellipseos, omnium, quae huic quadrangulo circumscribi possunt, minimae; et duo reliqua duarum hyperbolarum, eidem quadrangulo circumscriptarum, centra erunt. in quibus triangula, inter asymptotas et tangentes quaslibet interiecta, omnium minima et ob eam ipsam caussam inter se aequalia existent.

Theorema 5.

Quodsi in quadrangulo simplici una diagonalium per alteram bifariam secetur, inter omnes ellipses, ei quadrangulo circumscriptas, illa minima erit, cuius centrum medietatem diagonalis inaequaliter divisae obtinuerit.

§. 10.

Illust. Angerus problematis nostri inventionem ad resolutionem aequationis cubicae redegit atque ita ellipsin quaesitam per numeros irrationales sive per appropinquationem determinavit. Nostrae solutionis similis ratio est, tantum quod duarum hyperbolarum intersectione machinamur, quod ille duarum radicum cubicarum extractione efficit. Quanto autem facilior illa geometrica descriptio numerorum ista computatione evadat, praesertim si ab initio ellipsis non computari sed delineari iussa fuerit, facile ex eo perspicitur, quod ad inveniendam illam intersectionem perpaucis duntaxat punctis determinatis opus est. Nam quum is hyperbolae $Sq_1 Rp_{11}$ ramus, qui punctum M continet, inter rectas AD et rd porrigatur oporteat, et quum eiusdem hyperbolae curvatura prope centrum M satis exigua sit, totum negotium in eo consistet, ut hyperbolae $PRQGE$ ea particula, quae inter F punctum et rectam rd interiacet, punctatim describatur, et praeterea duo puncta hyperbolae $Sq_1 Rp_{11}$ sive $Sr_1 Pq_{11}$, $Sp_1 Qr_{11}$, quae in ea regione sunt, per rectam lineam coniungantur.

Annotatio.

Quum in comparatione problematum sibi invicem cognatorum multum saepe utilitatis insit, haud abs re puto, alterius quoque illius, de quo initio mentionem feci, problematis solutionem, quod sciam, adhuc incognitam proponere, cuius rationes vel e theore-

mate 1., quod supra demonstravimus, vel ex iis, quae Claris. Gauss in Zachii „Monatl. Corresp. August. 1810. p. 112—121“ de eodem problemate docuit, repetendae sunt:

Theorema.

Si in quadrilatero completo super tribus segmentis, quae trium diagonalium medietates coniungunt, totidem triangula aequilatera erigantur, circulus, qui per gravitatis centra istorum triangulorum transit, rectam medietates illas continentem in duobus punctis secat, quorum alterum ellipseos centrum est, inter omnes illi quadrilatero inscriptas maximae, alterum hyperbolae, eidem quadrilatero inscriptae, cuius inter asymptotas et tangentem quamlibet triangulum omnium maximum intercipitur.

IV.

Ueber das Rationalmachen von Nennern mit unbestimmt vielen irrationalen Gliedern.

Von dem

Herrn Doctor E. W. Grebe,

Gymnasiallehrer zu Cassel.

1.

Das Rationalmachen solcher Nenner, in welchen lauter irrationale Quadratwurzeln entweder allein oder in Gesellschaft mit einem rationalen Ausdrucke als Glieder vorkommen.

Man behandelt in den Elementen zum Zwecke des Rationalmachens gewöhnlich nur Nenner von den Formen $a \pm b\sqrt{B}$ und $a\sqrt{A} \pm b\sqrt{B}$, und wendet dabei den bekannten Satz von dem Pro-

ducte der Summe und Differenz an. Die Bemerkung liegt dann nicht fern, dass man durch wiederholte Anwendung dieses Satzes auch Nenner bis zu den Formen $a+b\sqrt{B}+c\sqrt{C}+d\sqrt{D}$ und $a\sqrt{A}+b\sqrt{B}+c\sqrt{C}+d\sqrt{D}$ — es wird nicht nöthig erscheinen, hier und im Folgenden stets das doppelte Zeichen zwischen die einzelnen Glieder zu setzen — rational zu machen im Stande ist. Hat man nun aber schon die Form $a+b\sqrt{B}+c\sqrt{C}+d\sqrt{D}+e\sqrt{E}$, so erhält man, wenn nicht durch den speziellen Werth der gebrauchten Buchstaben eine Vereinfachung eintritt, im günstigsten Fall wieder einen Ausdruck von derselben Form und Gliederzahl, und man verzweifelt an dem Gelingen der Arbeit. Und doch zeigt eine genauere Betrachtung, dass das Rationalmachen auch bei dieser und jeder grössern Anzahl von Gliedern immer noch möglich ist.

Wir wollen jetzt annehmen, dass in dem Ausdrucke

$$a+b\sqrt{B}+c\sqrt{C}+d\sqrt{D}+e\sqrt{E}+f\sqrt{F}+\ldots\ldots$$

die gebrauchten grossen Buchstaben keinen quadratischen Factor mehr enthalten, und mit β, γ, δ, ε, ζ,....., von denen dasselbe gelten soll, und ausserdem noch vorausgesetzt werden mag, dass keine zwei dieser Elemente einen gemeinschaftlichen Factor haben, entweder identisch oder durch Multiplication aus mehreren von ihnen zusammengesetzt seien. Es ist dann klar, dass der eben hingestellte Ausdruck ein besonderer Fall von einem andern sein muss, welcher, wenn wir uns z. B. auf drei Elemente beschränken, ausser dem rationalen Gliede noch Glieder mit $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\delta}$, $\sqrt{\beta\gamma}$, $\sqrt{\beta\delta}$, $\sqrt{\gamma\delta}$ und $\sqrt{\beta\gamma\delta}$ haben, im Allgemeinen aber als Radicanden sämmtliche Unionen, Binionen, Ternionen u. s. w. ohne Wiederholung bis zu dem Product sämmtlicher vorhandenen Elemente aufführen würde. Wir betrachten einen solchen Ausdruck wie den zuletzt gedachten etwas näher. Derselbe hat offenbar die Eigenschaft, dass wenn er mit einem oder mehreren anderen Ausdrücken, die sich von ihm nur durch den besonderen Werth des rationalen Gliedes und der Coefficienten der irrationalen Glieder unterscheiden, multiplicirt wird, immer wieder Ausdrücke von derselben Form und Gliederzahl zum Vorschein kommen. Die Anzahl der Glieder eines solchen Ausdrucks beträgt aber bei n Elementen

$$1+\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

oder, da dieses die Binomialcoefficienten der $n$ten Potenz sind, 2^n. Einen rational zu machenden Nenner mit lauter Quadratwurzeln können wir also immer, wenn wir in den Radicanden n Elemente unterschieden haben, durch Einführung der Null als rationales Glied oder als Coefficient eines oder mehrerer irrationaler zu einem 2^ngliederigen Ausdrucke vervollständigen, und es handelt sich mithin jetzt nur um das Rationalmachen dieses letzteren. Sondern wir ein Element, etwa β, von den $n-1$ übrigen

Elementen ab; so bedingen diese letzteren für sich nur einen 2^{n-1}gliederigen Ausdruck, welcher mit M bezeichnet werde. Das Element β kommt also in den 2^{n-1} übrigen Gliedern vor, und das Aggregat dieser lässt sich durch $N\sqrt{\beta}$, der ganze 2^ngliederige Ausdruck also durch $M+N\sqrt{\beta}$ darstellen. Erweitert man nun den gegebenen Bruch mit $M-N\sqrt{\beta}$, so erhält man als neuen Nenner $M^2-N^2\beta$, welcher offenbar nur 2^{n-1}gliederig sein kann. Ebenso wie man sich aus einem 2^ngliederigen Nenner einen 2^{n-1}gliederigen verschafft hat, gelangt man nun weiter von diesem zu einem 2^{n-2}gliederigen, und bei gehöriger Fortsetzung zuletzt von einem zweigliedrigen Nenner zu einem rationalen.

Beispiel. Es sei ein Bruch

$$\frac{42-2\sqrt{2}-40\sqrt{6}+29\sqrt{10}+6\sqrt{15}-10\sqrt{30}}{7\sqrt{2}-3\sqrt{5}-5\sqrt{6}+2\sqrt{10}+\sqrt{30}}$$

vorgelegt, der so umgeformt werden soll, dass sein Nenner rational wird. Da in dem vorgelegten Nenner nur die Zahlen 2, 3 und 5 als Elemente der Radicanden vorkommen, so würde derselbe bis auf acht Glieder vervollständigt

$$0+7\sqrt{2}+0\sqrt{3}-3\sqrt{5}-5\sqrt{6}+2\sqrt{10}+0\sqrt{15}+\sqrt{30}$$

lauten. Sondert man die Glieder, welche den Factor $\sqrt{5}$ haben, von den übrigen ab, so kann man den Nenner auch schreiben:

$$(7\sqrt{2}-5\sqrt{6})+(-3+2\sqrt{2}+\sqrt{6})\sqrt{5}.$$

Erweitert man nun den ganzen Bruch mit der dieser Summe entsprechenden Differenz und reducirt, so erhält man

$$\frac{892+639\sqrt{2}-540\sqrt{3}+1080\sqrt{5}-420\sqrt{6}-180\sqrt{10}-266\sqrt{15}-120\sqrt{30}}{133+60\sqrt{2}-180\sqrt{3}+30\sqrt{6}}.$$

Erweitert man abermals mit $(133+60\sqrt{2})+(180-30\sqrt{2})\sqrt{3}$, so kommt

$$\frac{195316+104307\sqrt{2}+155422\sqrt{15}-168720\sqrt{30}}{-77711+84360\sqrt{2}},$$

und wenn man diesen Bruch abermals mit $77711+84360\sqrt{2}$ erweitert; so entsteht ein Bruch mit rationalem Nenner, der sich dann leicht zu dem Endresultat

$$4+3\sqrt{2}-2\sqrt{15}$$

umwandeln lässt.

Es ist absichtlich in dem Bisherigen zuerst gezeigt worden, dass zum Rationalmachen eines Nenners mit lauter Quadratwurzeln der Satz von dem Producte der Summe und Differenz allein schon hinreicht. Doch würde man auch hier durch ein Verfahren von allgemeiner Anwendbarkeit haben zum Ziel gelangen können, nämlich durch die Methode der unbestimmten Coefficienten. Hätte man für das gegebene Beispiel angenommen, der Werth des vorgelegten Bruchs sei

$$x_1 + x_2\sqrt{2} + x_3\sqrt{3} + x_4\sqrt{5} + x_5\sqrt{6} + x_6\sqrt{10} + x_7\sqrt{15} + x_8\sqrt{30}$$

und hätte man nun diesen Ausdruck mit dem Nenner multiplicirt; so würde man wieder zu acht Gliedern gelangt sein, die man mit dem vorgelegten Zähler hätte vergleichen können. Es würde sich auch dann ergeben haben:

$$x_1 = 4;\; x_2 = 3;\; x_3 = 0;\; x_4 = 0;$$
$$x_5 = 0;\; x_6 = 0;\; x_7 = -2;\; x_8 = 0.$$

2.

Unsere Aufgabe in ihrer Allgemeinheit mit der einzigen beschränkenden Bedingung, dass die Wurzelexponenten der vorkommenden irrationalen Glieder rational seien.

Sollen wir den Nenner eines Bruchs rational machen, dessen sämmtliche Glieder ausser einem etwa vorhandenen rationalen von der Form $p\sqrt[q]{R}$ sind, und gestatten wir nur rationale Werthe für den Wurzelexponenten q; so können wir durch bekannte Umformungen etwaige negative und gebrochene Wurzelexponenten beseitigen, und wir brauchen demnach unsere Betrachtungen nur auf ganze positive Wurzelexponenten zu erstrecken. Sind ferner die in demselben Nenner vorkommenden Wurzelexponenten alle oder doch zum Theil ungleich; so können wir wieder so umwandeln, dass ein überall gleicher Wurzelexponent entsteht, der dem kleinsten Dividuus der früheren Exponenten entspricht. Ist dieses alles geschehen, so sei unser Nenner

$$a + b\sqrt[m]{B} + c\sqrt[m]{C} + d\sqrt[m]{D} + e\sqrt[m]{E} + f\sqrt[m]{F} + \ldots\ldots$$

Legen wir auch hier den Buchstaben β, γ, δ, ε, ζ,.... eine ähnliche Bedeutung wie oben bei, nur mit dem Unterschiede, dass jetzt jeder der Buchstaben B, C, D, E, F,.... auch die Potenzen von β, γ, δ, ε, ζ,..... bis zur $(m-1)$ten Potenz einschliesslich als Factoren enthalten darf; so lässt sich auch hier wieder behaupten, der rational zu machende Nenner sei ein besonderer Werth eines allgemeinen Ausdrucks, der die Eigenschaft hat, mit andern Ausdrücken derselben Art multiplicirt jedesmal wieder nur

Ausdrücke von derselben Beschaffenheit und Gliederzahl hervorzubringen. Die frägliche Gliederzahl ist aber eben so gross, als die Zahl der Glieder in der Entwickelung des Products

$$(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{m-1})\,(1+\gamma+\gamma^2+\ldots+\gamma^{m-1})\,(\ldots)\,(\ldots) \text{ u. s. w.};$$

also für n Elemente $=m^n$. Die Regel für das Rationalmachen des gegebenen Nenners ist nun die, dass man sich den erforderlichen m^n gliederigen Ausdruck mit unbestimmten Coefficienten bilde, denselben mit dem Nenner multiplicire und das Product, welches ebenfalls m^n gliederig sein muss, mit dem Zähler oder einem Factor des letzteren, wozu man der Einfachheit wegen immer die Zahl 1 nehmen kann, vergleiche.

Beispiel. Man soll den Nenner des Bruchs

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$$

rational machen. Man setze den Werth dieses Bruchs gleich

$$x_1+x_2\sqrt[3]{2}+x_3\sqrt[3]{3}+x_4\sqrt[3]{4}+x_5\sqrt[3]{9}+x_6\sqrt[3]{6}+x_7\sqrt[3]{12}$$
$$+x_8\sqrt[3]{18}+x_9\sqrt[3]{36}.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ und setzt das Product gleich 1; so erhält man die neun Gleichungen

$$\begin{aligned}
x_1+2x_4+3x_5&=1,\\
x_2+x_1+3x_8&=0,\\
x_3+2x_7+x_1&=0,\\
x_4+x_2+3x_9&=0,\\
x_5+2x_9+x_3&=0,\\
x_6+x_3+x_2&=0,\\
x_7+x_6+x_4&=0,\\
x_8+x_5+x_6&=0,\\
x_9+x_8+x_7&=0;
\end{aligned}$$

aus welchen folgt:

$$x_1=-\frac{1}{3} \qquad x_4=+\frac{1}{6}$$
$$x_2=+\frac{1}{3} \qquad x_5=+\frac{1}{3}$$
$$x_3=0 \qquad x_6=-\frac{1}{3}$$

$$x_7 = +\frac{1}{6} \qquad x_9 = -\frac{1}{6}.$$
$$x_8 = 0$$

Der vorgelegte Bruch ist also an Werth gleich dem Ausdrucke

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{2} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{4} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{9} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{6} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{12} - \frac{1}{6}\sqrt[3]{36}$$

oder dem Bruche

$$\frac{-2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{36}}{6}.$$

V.

Betrachtung zweier besonderen Arten von Gleichungen und ihre Anwendung zur Herleitung der Hauptgleichungen der ebenen Trigonometrie.

Von

Herrn Dr. Wilhelm Matzka,

Professor der Mathematik zu Tarnow in Galizien.

1.

Es wäre wünschenswerth, dass die Lehrbücher der Algebra manche in der Anwendung häufiger vorkommende ausgezeichnete Arten von Gleichungen allgemein und umständlich erforschen

möchten, damit die Ergebnisse in der Folge an den geeigneten Stellen sogleich vortheilhaft benutzt werden könnten. Wie ich dies meine, wird aus dem Folgenden völlig klar werden.

2.

A. Betrachtung gleichartiger Gleichungen.

Bekanntlich heisst ein algebraischer Ausdruck, der mehrere Grössen A, B, C,... derselben Art enthält, gleichartig (homogen), wenn alle seine Glieder die nämliche Abmessung (Dimension), d. i. einerlei Summe der Exponenten der in je einem Gliede vorkommenden solchen Grössen, haben; und man nennt diesen Ausdruck von der so vielten Abmessung, als diese Summe angiebt. Eine Gleichung ist gleichartig, wenn ihre beiden Theile sowohl einzeln als auch unter sich gleichartig sind.

Lehrsatz. Sind die in einer gleichartigen Gleichung vorkommenden Grössen A, B, C,... derselben Art proportional gewissen anderen a, b, c,.... der nemlichen oder einer anderen Art, ist nemlich

$$A:B:C:...=a:b:c:...;$$

so ist es gestattet, jede der ersteren Grössen durch ihre proportionale aus der letzteren zu ersetzen.

Beweis. Seien erstlich wenigstens die Grössen der zweiten Art Zahlen, und sei der Quotient $A:a=Q$, so ist auch $B:b=Q$, $C:c=Q$,..., und Q ist eine Grösse der nemlichen Gattung wie A, B, C,... so wie auch $A=aQ$, $B=bQ$, $C=cQ$,... Ersetzt man nun in der ersten Gleichung die Grössen A, B, C,... durch die Producte aQ, bQ, cQ,..., und führt man die Rechnungen mit ihnen — je nachdem es angeht — wirklich oder nur combinatorisch (symbolisch) aus; so muss in beiden Theilen der Gleichung diejenige Potenz von Q als gemeinschaftlicher Factor aller Glieder heraustreten, als von welcher Abmessung sämmtliche Glieder, also auch beide Gleichungstheile sind. Danach fällt nun dieser gemeinsame Factor aus der Gleichung heraus, und an die Stellen der Grössen A, B, C,... sind die ihnen proportionirten Zahlen a, b, c,.... getreten. Wäre die Gleichung insbesondere von der nullten Abmessung, so würde dieser Factor schon aus jedem einzelnen Gliede herausfallen.

Da hiebei auch $A:Q=a$, $B:Q=b$, $C:Q=c$,... ist, so sind a, b, c, die Zahlwerthe (Werth- oder Masszahlen) der Grössen A, B, C,... in Bezug auf Q als Masseinheit dieser Grössengattung. Mithin ist es gestattet, in jeder gleichartigen Gleichung die vorkommenden Grössen durch ihre Werthzahlen zu ersetzen. Dann aber ist es — weil der Rückschritt, wenigstens bei combinatorischer Rechnung, unverwehrt bleibt — auch erlaubt, umgekehrt die Werthzahlen, in Bezug auf welche eine Gleichung

gleichartig ist, durch die Grössen selbst, denen sie angehören, zu ersetzen.

Zweitens seien beide Arten der Grössen noch ungemessen, also z. B. Winkel, Strecken, Flächen- oder Körperräume, Zeiten, Gewichte u. dergl. selbst, noch nicht durch Zahlen vorgestellt. — Sind sie zugleich von einerlei Art, so darf man noch wie vorher jede der ersteren Art durch ihre proportionale aus der zweiten Art theilen, nur ist hier der Quotient Q eine Zahl, und es gilt daher wieder die vorige Schlussweise im Beweise.— Sind jedoch die Grössen von verschiedener Art, z. B. die einen Flächen, Zeiten,..., die anderen Winkel, Strecken,...; so ist jenes Theilen nicht mehr erlaubt. Seien dann α, β, γ,... die Zahlenwerthe der Grössen A, B, C,... in Bezug auf was immer für eine Masseinheit, die von jeder aus ihnen verschieden ist, so dass kein Zahlwerth $=1$ wird; so können diese durch jene ersetzt werden, und die Gleichung bleibt noch gleichartig. Weil aber $A:B:C:...=a:b:c:...$ vorausgesetzt ist, so muss auch $\alpha:\beta:\gamma:...=a:b:c,...$ sein; folglich können α, β, γ,.... auch als zusammengehörige Zahlwerthe von a, b, c,... angesehen und daher, vermöge des Obigen, auch wieder durch diese Grössen ersetzt werden. Dann aber sind die ursprünglichen Grössen A, B, C,.... einer Gattung eigentlich durch die ihnen proportionalen a, b, c,... einer anderen Gattung ersetzt.

Da sonach alle möglichen Fälle erschöpft sind, so gilt der Satz ganz allgemein.

3.

AA. Benützung dieser Gleichungen zur Ableitung von Hauptgleichungen der geradlinigen Trigonometrie.

Sind a, b, c die Seiten eines geradlinigen Dreieckes und α, β, γ in derselben Ordnung ihre Gegenwinkel, so erweist man bekanntlich höchst einfach die beiden folgenden Sätze:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0, \tag{1}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}. \tag{2}$$

Aus ihnen aber lassen sich vermöge des so eben erwiesenen Lehrsatzes nachstehende andere Hauptgleichungen sehr leicht ableiten.

1. Aus (1) folgt $\sin\alpha=\sin(\beta+\gamma)$ oder

$$\sin\alpha=\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta. \tag{$\odot$}$$

Ersetzt man nun hierin die sin durch die ihnen vermöge (2) proportionalen Seiten, so erhält man

$$(3) \qquad a = b\cos\gamma + c\cos\beta,$$

bekanntlich die **Grundgleichung** der gesammten ebenen Trigonometrie.

II. Die Gleichung (⊙) giebt ferner

$$\sin\alpha = \sin\beta(\cos\gamma + \sin\gamma\cot\beta)$$

folglich, wenn man $\sin\alpha$, $\sin\beta$ durch ihre Proportionalen a, b ersetzt,

$$a = b\cos\gamma + b\sin\gamma . \cot\beta,$$

woraus man

$$(4) \qquad \cot\beta = \frac{a - b\cos\gamma}{b\sin\gamma}, \quad \tang\beta = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}$$

findet.

III. Erhebt man die Gleichung (⊙) zur zweiten Potenz und umstaltet diese in folgender leicht zu überschauenden Weise, so erhält man

$$\begin{aligned}
\sin\alpha^2 &= \sin\beta^2\cos\gamma^2 + \sin\gamma^2\cos\beta^2 + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma \\
&= \sin\beta^2(1-\sin\gamma^2) + \sin\gamma^2(1-\sin\beta^2) + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma \\
&= \sin\beta^2 + \sin\gamma^2 + 2\sin\beta\sin\gamma(\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma) \\
&= \sin\beta^2 + \sin\gamma^2 + 2\sin\beta\sin\gamma\cos(\beta+\gamma),
\end{aligned}$$

oder weil vermöge (1)

$$\cos(\beta+\gamma) = -\cos\alpha$$

ist,

$$\sin\alpha^2 = \sin\beta^2 + \sin\gamma^2 - 2\sin\beta\sin\gamma . \cos\alpha.$$

Setzt man abermals statt der sin die ihnen proportionirten Seiten, so erfolgt

$$(5) \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

der bekannte **erweiterte Pythagorische Lehrsatz.**

IV. Allgemein gelten für jede zwei Winkel α und β die Gleichungen

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta);$$

daher ist auch

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Gehören nun diese Winkel einem geradlinigen Dreiecke an, und ersetzt man ihre Sinus durch ihre proportionalen Gegenseiten, so erhält man den bekannten Satz

$$(6)\qquad \frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Anmerkung. Aus denselben zwei Grundgleichungen (1) und (2) hat auch schon Cauchy in seinem Cours d'analyse, Paris, 1821. S. 436. 437., deutsch von Huzler, Königsberg, 1828., S. 308. — 310., so wie Herr Prof. Grunert im Archiv, II. Theil, 1842, 2. Heft. S. 215. — 218. die Haupt- und mehrere andere wichtige Gleichungen der geradlinigen Trigonometrie abgeleitet.

B. Betrachtung zweier und dreier erstgradiger Gleichungen mit drei Unbekannten.

4.

Das Folgende einleitend betrachten wir zuvörderst folgende zwei erstgradige, die drei Unbekannten x, y, z enthaltende Gleichungen:

$$(1)\qquad ax+by+cz=0,$$
$$a'x+b'y+c'z=0.$$

Diese Gleichungen können nicht die vollständigen, sondern (vermöge des Art. 2) nur proportionale Werthe der Unbekannten bestimmen, weil sie in Bezug auf diese gleichartig sind. Zur Ermittelung dieser Proportionalen eliminiren wir je eine der drei Unbekannten, indem wir die erstere Gleichung mit einem unbestimmten Multiplicator λ multipliciren, und im Unterschiede beider Gleichungen

$$(a'-\lambda a)x+(b'-\lambda b)y+(c'-\lambda c)z=0$$

den Factor der zu eliminirenden Unbekannten Null machen.

Setzen wir, x eliminirend, $a'=\lambda a$, so wird

$$\frac{y}{\lambda c - c'} = \frac{z}{b' - \lambda b},$$

daher, wenn wir die Nenner mit a multipliciren und λa durch a' ersetzen,

$$\frac{y}{ca' - c'a} = \frac{z}{ab' - a'b}.$$

Setzen wir, y eliminirend, $b' = \lambda b$, oder vertauschen wir in der letzten Gleichung y mit x, also b mit a; so erhalten wir

$$\frac{x}{b'c - bc'} = \frac{z}{a'b - ab'}.$$

Diese Ausdrücke gleich stellend finden wir zu den Gleichungen (1) die ihnen gleich geltenden Verhältnissgleichungen

$$(2) \qquad \frac{x}{bc' - b'c} = \frac{y}{ca' - c'a} = \frac{z}{ab' - a'b},$$

in denen die, den Unbekannten x, y, z proportionirten, Unterschiede aus den Coefficienten der Gleichungen (1) nach einem leicht überschaulichen Gesetze gebildet werden.

5.

Untersuchen wir als weitere Vorbereitung auch noch die folgenden drei erstgradigen Gleichungen eben der drei Unbekannten:

$$(3) \qquad \begin{aligned} ax + by + cz &= 0, \\ a'x + b'y + c'z &= 0, \\ a''x + b''y + c''z &= 0; \end{aligned}$$

so erhellt auch hier, dass aus gleichem Grunde wie vorher selbst diese drei Gleichungen blos proportionale Werthe der Unbekannten zu bestimmen geeignet sind, und auf zwei ihnen gleichgeltende Verhältnissgleichungen zurückgebracht werden können, zu denen jedoch für die dreimal drei Coefficienten eine Bedingungsgleichung hinzukommen muss.

Diese Bedingungsgleichung ergibt sich leicht, wenn man aus zwei Gleichungen, z. B. aus den beiden ersten mit den obigen (1) übereinkommenden, die Proportionalen (2) bestimmt, und diese in der dritten Gleichung substituirt; sie wird sonach

$$(4) \qquad ab'c'' - a''b'c + a'b''c - a'b''c' + a''bc' - a'bc'' = 0.$$

Weil jedes der drei aus den drei Gleichungen (3) sich ergebenden

Paare von Gleichungen drei Proportionalen zu den Unbekannten liefert, so würde man drei mal drei solche Proportionalen finden, von denen aber jede nur aus den Coefficienten je zweier Gleichungen gebildet wäre.

Um jedoch — wo möglich — Proportionalen zu finden, die aus den Coefficienten aller drei Gleichungen symmetrisch zusammengestellt werden, setzen wir

$$(4) \qquad Lx + My + Nz = u,$$

indem wir L, M, N später passlich zu wählen uns vorbehalten und eine neue Unbekannte u einführen.

Multipliciren wir sofort die Gleichungen (3) mit den unbestimmten Multiplicatoren λ, μ, ν, und ziehen die Producte von der Gleichung (4) ab, so finden wir

$$\begin{aligned} u &= (L-\lambda a)x + (M-\lambda b)y + (N-\lambda c)z \\ &= (L-\mu a')x + (M-\mu b')y + (N-\mu c')z \\ &= (L-\nu a'')x + (M-\nu b'')y + (N-\nu c'')z. \end{aligned}$$

Wären nun die Multiplicatoren L, M, N und λ, μ, ν so bemessen, dass im ersten Ausdrucke von u nur x, im zweiten nur y und im dritten nur z bliebe, daher

$$(5) \qquad u = (L-\lambda a)x = (M-\mu b')y = (N-\nu c'')z$$

ausfiele; so müsste

$$(6) \qquad L = \mu a' = \nu a'', \quad M = \nu b'' = \lambda b, \quad N = \lambda c = \mu c'$$

sein. Dies kann jedoch nur geschehen, wenn

$$LMN : \lambda\mu\nu = a'b''c = a''bc'$$

ist, also die weitere Bedingungsgleichung

$$(7) \qquad a'b''c = a''bc'$$

besteht. Zugleich fände man

$$(8) \qquad \frac{L}{a'a''} = \frac{\mu}{a''} = \frac{\nu}{a'}, \quad \frac{M}{b''b} = \frac{\nu}{b} = \frac{\lambda}{b'}, \quad \frac{N}{cc'} = \frac{\lambda}{c'} = \frac{\mu}{c}.$$

Um aber, wie es die Gleichungen (3) erheischen, die sechs unbestimmten Coefficienten unter sich zu verknüpfen, setzen wir

entweder $\frac{L}{a'a''}$ gleich einer der Zahlen b, c, denen in den beiden anderen Gleichungen ν und μ proportional sind;

oder $\frac{M}{b''b}$ gleich einer der Zahlen c', a', denen in den beiden anderen Gleichungen λ und ν proportional sind;

oder endlich $\frac{N}{cc'}$ gleich einer der Zahlen a'', b'', denen in den zwei übrigen Gleichungen μ und λ proportional sind.

Danach ergeben sich jene Coefficienten leicht, und sind nur noch in die Gleichungen (8) zu setzen, um die gewünschten Verhältnissgleichungen als Stellvertreter der vorgelegten Gleichungen (3) zu erhalten.

Beispiel. Setzen wir $\frac{L}{a'a''}=b$ so, wird

$$L=a'a''b,\ \mu=a''b,\ \nu=a'b;$$
$$M=a'b''b,\ \lambda=a'b'';$$
$$N=a'b''c=a''bc';$$

folglich sind die gesuchten Verhältnissgleichungen:

$$(9)\qquad (a''b-ab'')a'x=(a'b''-a''b')by=(c'a''-c''a')bz.$$

6.

Eine besondere Art der allgemeinen Gleichungen (3) ist diejenige, bei welcher der Bedingungsgleichung (7) dadurch entsprochen wird, dass

$$(10)\qquad b''=c'=A,\ c=a''=B,\ a'=b=C$$

ist. Hier übergehen die Gleichungen (8) in

$$(11)\qquad \frac{L}{BC}=\frac{M}{CA}=\frac{N}{AB}=\frac{\lambda}{A}=\frac{\mu}{B}=\frac{\nu}{C}.$$

Schreibt man nun die Gleichungen (3) mit Beachtung der Gleichheiten (10) und (11) ab, und lässt bei den Buchstaben b', c'' die jetzt entbehrlichen Striche weg, so erhält man folgende merkwürdige und in vielen Forschungen auftretende Art von Gleichungen*):

$$(12)\qquad \begin{aligned} ax+Cy+Bz&=0,\\ Cx+by+Az&=0,\\ Bx+Ay+cz&=0. \end{aligned}$$

Sie sind demnach vermöge (4) an die Bedingungsgleichung

---

*) Cauchy dürfte wohl der Erste sein, der sie so anordnet, z. B. in seinen Exercices de mathématiques, 1827. t. II. p. 87. bei den Trägheitsmomenten, 1828., t. III. p. 5., 10., 17., 83. bei den Flächen der 2. Ordnung.

$$(13) \qquad abc - aA^2 - bB^2 - cC^2 + 2ABC = 0$$

gebunden und den Verhältnissgleichungen

$$(14) \qquad (BC - aA)x = (CA - bB)y = (AB - cC)z$$

gleichgeltend.

Diese Verhältnissgleichungen lassen sich noch wie folgt umgestalten. Setzt man für einen Augenblick

$$(15) \qquad BC - aA = \mathfrak{A},\ CA - bB = \mathfrak{B},\ AB - cC = \mathfrak{C};$$

wodurch sich die Gleichungen (14) auf

$$(16) \qquad \mathfrak{A}x = \mathfrak{B}y = \mathfrak{C}z$$

vereinfachen, so findet man durch Multiplication:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C} = A^2BC - AbB^2 - AcC^2 + bcBC,$$
$$\mathfrak{C}\mathfrak{A} = B^2CA - BcC^2 - BaA^2 + caCA,$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = C^2AB - CaA^2 - CbB^2 + abAB.$$

Zieht man hiervon die der Reihe nach mit A, B, C multiplicirte Bedingungsgleichung (13) ab, so erhält man:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C} = bc(BC - aA) - A^2(BC - aA) = \mathfrak{A}(bc - A^2),$$
$$\mathfrak{C}\mathfrak{A} = ca(CA - bB) - B^2(CA - bB) = \mathfrak{B}(ca - B^2),$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = ab(AB - cC) - C^2(AB - cC) = \mathfrak{C}(ab - C^2).$$

Setzt man noch für einen Augenblick

$$(17) \qquad bc - A^2 = \alpha,\ ca - B^2 = \beta,\ ab - C^2 = \gamma;$$

so übergehen die letzten Gleichungen in

$$\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = \alpha,\ \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \beta,\ \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \gamma;$$

welche paarweis multiplicirt

$$(18) \qquad \mathfrak{A}^2 = \beta\gamma,\ \mathfrak{B}^2 = \gamma\alpha,\ \mathfrak{C}^2 = \alpha\beta$$

und sonach

$$(19) \qquad \alpha\mathfrak{A}^2 = \beta\mathfrak{B}^2 = \gamma\mathfrak{C}^2 = \alpha\beta\gamma,$$

folglich

$$\mathfrak{A}\sqrt{\alpha} = \mathfrak{B}\sqrt{\beta} = \mathfrak{C}\sqrt{\gamma} = \sqrt{\alpha\beta\gamma}$$

geben; wofür man bequemer

$$\mathfrak{A}:\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=\mathfrak{B}:\frac{1}{\sqrt{\beta}}=\mathfrak{C}:\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$$

setzen kann.

In den Gleichungen (16) wird man demnach $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ durch ihre Proportionalen $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$, $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ ersetzen, und erhält sofort

$$\frac{x}{\sqrt{\alpha}}=\frac{y}{\sqrt{\beta}}=\frac{z}{\sqrt{\gamma}}$$

oder nach den Gleichungen (17)

$$(20)\qquad \frac{x}{\sqrt{bc-A^2}}=\frac{y}{\sqrt{ca-B^2}}=\frac{z}{\sqrt{ab-C^2}}$$

als die neue Form der Verhältnissgleichungen.

Führt man noch in den Gleichungen (18) und (19) an die Stelle der Hilfszahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; α, β, γ ihre Ausdrücke (15) und (17) ein, so ergeben sich

$$(21)\qquad \begin{aligned}(BC-aA)^2&=(ca-B^2)(ab-C^2),\\ (CA-bB)^2&=(ab-C^2)(bc-A^2),\\ (AB-cC)^2&=(bc-A^2)(ca-B^2)\end{aligned}$$

und

$$(22)$$

$$\begin{aligned}(bc-A^2)(BC-aA^2)^2&=(ca-B^2)(CA-bB^2)^2=(ab-C^2)(AB-cC^2)^2\\ &=(bc-A^2)(ca-B^2)(ab-C^2),\end{aligned}$$

als andere Gestalten der Bedingungsgleichung (13).

Diese Bedingungsgleichung gestattet noch eine andere merkwürdige Darstellung. Theilt man sie durch ABC, so wird sie

$$\begin{aligned}0&=\frac{abc}{ABC}-\frac{aA}{BC}-\frac{bB}{CA}-\frac{cC}{AB}+2\\ &=(1-\frac{aA}{BC})+(1-\frac{bB}{CA})+(1-\frac{cC}{AB})-(1-\frac{abc}{ABC});\end{aligned}$$

und man sieht sich aufgefordert, zur Abkürzung

$$1-\frac{aA}{BC}=\mathfrak{a},\quad 1-\frac{bB}{CA}=\mathfrak{b},\quad 1-\frac{cC}{AB}=\mathfrak{c}$$

zu setzen. Dadurch wird

$$\frac{aA}{BC}=1-\mathfrak{a},\quad \frac{bB}{CA}=1-\mathfrak{b},\quad \frac{cC}{AB}=1-\mathfrak{c}$$

und das Product dieser Ausdrücke

$$\frac{abc}{ABC}=(1-\mathfrak{a})(1-\mathfrak{b})1-\mathfrak{c})$$
$$=1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}+\mathfrak{bc}+\mathfrak{ca}+\mathfrak{ab}-\mathfrak{abc}.$$

Substituirt man oben, so wird

$$0=\mathfrak{bc}+\mathfrak{ca}+\mathfrak{ab}-\mathfrak{abc}$$

Theilt man diese Gleichung durch $\mathfrak{abc}$, so übergeht sie in

$$\frac{1}{\mathfrak{a}}+\frac{1}{\mathfrak{b}}+\frac{1}{\mathfrak{c}}=1$$

oder, wenn man die früheren Ausdrücke wieder herstellt, in

$$\text{(23)}\qquad \frac{1}{1-\frac{aA}{BC}}+\frac{1}{1-\frac{bB}{CA}}+\frac{1}{1-\frac{cC}{AB}}=1,$$

welches die gesuchte bemerkenswerthe Gestalt der Bedingungsgleichung (13) ist.

7.

Will man die eigenthümlich geformten Gleichungen (12) unmittelbar, ohne von einer allgemeineren Form zu ihnen herabzusteigen, in Behandlung nehmen, so dürfte der folgende Vorgang vor anderen den Vorzug verdienen.

Theilt man diese Gleichungen der Ordnung nach durch BC, CA, AB, so lassen sich ihnen folgende Formen ertheilen:

$$\text{(24)}\qquad \begin{aligned}\frac{aA}{BC}\cdot\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}&=0,\\ \frac{x}{A}+\frac{bB}{CA}\cdot\frac{y}{B}+\frac{z}{C}&=0,\\ \frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{cC}{AB}\cdot\frac{z}{C}&=0.\end{aligned}$$

Diese Formen fordern aber sogleich zur Einführung nachstehender Abkürzungen auf:

$$\text{(25)}\qquad \frac{x}{A}=\xi,\ \frac{y}{B}=\eta,\ \frac{z}{C}=\zeta;$$

$$\text{(26)}\qquad \frac{aA}{BC}=\alpha,\ \frac{bB}{CA}=\beta,\ \frac{cC}{AB}=\gamma;$$

durch deren Einführung die letzten Gleichungen die höchst einfache Gestalt

$$(27)\qquad \begin{aligned} \alpha\xi+\eta+\zeta&=0,\\ \xi+\beta\eta+\zeta&=0,\\ \xi+\eta+\gamma\zeta&=0 \end{aligned}$$

annehmen, in der sie sogar nur noch drei Coefficienten anstatt der früheren sechs enthalten.

Setzt man noch für einen Augenblick

$$\xi+\eta+\zeta=\omega,$$

zieht hievon die Gleichungen (27) einzeln ab, und benutzt die Addition der Verhältnissglieder; so erhält man

$$\omega=(1-\alpha)\xi=(1-\beta)\eta=(1-\gamma)\zeta$$
$$=\frac{\xi}{\frac{1}{1-\alpha}}=\frac{\eta}{\frac{1}{1-\beta}}=\frac{\zeta}{\frac{1}{1-\gamma}}$$
$$=\frac{\xi+\eta+\zeta=\omega}{\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}+\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Mithin lassen sich die Gleichungen (27) durch die Verhältnissgleichungen

$$(28)\qquad (1-\alpha)\xi=(1-\beta)\eta=(1-\gamma)\zeta$$

ersetzen, und ihre Coefficienten sind an die Bedingungsgleichung

$$(29)\qquad \frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}+\frac{1}{1-\gamma}=1$$

gebunden, welche durch Beseitigung der Nenner die Form

$$(30)\qquad \alpha\beta\gamma-\alpha-\beta-\gamma+2=0$$

annimmt.

Aus eben jener Bedingungsgleichung findet man anderweitig

$$\frac{1}{1-\alpha}=1-\frac{1}{1-\beta}-\frac{1}{1-\gamma}=\frac{\beta\gamma-1}{(1-\beta)(1-\gamma)}$$

oder

$$(31)\qquad (1-\beta)(1-\gamma)=(1-\alpha)(\beta\gamma-1),$$ und nachgebildet

$$(1-\gamma)(1-\alpha)=(1-\beta)(\gamma\alpha-1),$$
$$(1-\alpha)(1-\beta)=(1-\gamma)(\alpha\beta-1).$$

Die Producte je zweier solcher Gleichungen liefern sofort

$$(32)\qquad \begin{aligned}(1-\alpha)^2&=(\alpha\beta-1)(\alpha\gamma-1),\\ (1-\beta)^2&=(\beta\gamma-1)(\beta\alpha-1),\\ (1-\gamma)^2&=(\gamma\alpha-1)(\gamma\beta-1).\end{aligned}$$

Multiplicirt man aber jede der Gleichungen (31) mit dem ersten Factor ihres zweiten Theiles, so findet man

$$(33)\qquad \begin{aligned}(1-\alpha)^2(\beta\gamma-1)=(1-\beta)^2(\gamma\alpha-1)=(1-\gamma^2)(\alpha\beta-1)\\ =(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma),\end{aligned}$$

und hieraus

$$(34)\qquad (1-\alpha)\sqrt{\beta\gamma-1}=(1-\beta)\sqrt{\gamma\alpha-1}=(1-\gamma)\sqrt{\alpha\beta-1}.$$

Sofort können in den Gleichungen (28) die Factoren $1-\alpha$, $1-\beta$, $1-\gamma$ durch ihre Proportionalen

$$\frac{1}{\sqrt{\beta\gamma-1}},\quad \frac{1}{\sqrt{\gamma\alpha-1}},\quad \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta-1}}$$

ersetzt werden, wodurch jene Verhältnissgleichungen die Form

$$(35)\qquad \frac{\xi}{\sqrt{\beta\gamma-1}}=\frac{\eta}{\sqrt{\gamma\alpha-1}}=\frac{\zeta}{\sqrt{\alpha\beta-1}}$$

annehmen.

Stellt man nun endlich in den Gleichungen (28), (29), (30), (32), (33), (35) für ξ, η, ζ und α, β, γ ihre Ausdrücke aus (25) und (26) wieder her; so erhält man mittels ganz leichter Zurückleitungen die vorher in Art. 6. genannten Gleichungen (14), (23), (13), (21), (22), (20).

8.

BB. Verwendung dieser Gleichungen zur Aufstellung von Hauptgleichungen der ebenen Trigonometrie.

Bezeichnen a, b, c die Seiten und α, β, γ die ihnen gegenüber liegenden Winkel eines ebenen Dreieckes; so findet man dadurch, dass man die dasselbe begrenzende geschlossene, dreigliedrig gebrochene Linie $\overline{abc}$ der Reihe nach auf drei Axen projicirt, deren positive Richtungen denen der Seiten a, b, c selbst entgegengesetzt sind, geradezu die Gleichungen

$$(36)\qquad \begin{aligned} -a+b\cos\gamma+c\cos\beta&=0,\\ a\cos\gamma-b+c\cos\alpha&=0,\\ a\cos\beta+b\cos\alpha-c&=0. \end{aligned}$$

Hält man sie an die obigen Gleichungen (12), so hat man zu ersetzen

die dortigen $x, y, z;\ a, b, c;\ A, B, C;$
durch die hiesigen $a, b, c;\ -1, -1, -1;\ \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma.$

Dadurch gewinnt man aus den Gleichungen (13), (21), (22) und (23) durch geringe Vereinfachung die folgenden einander gleich geltenden:

$$(37)\qquad \cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2-1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0;$$

$$(38)\qquad \begin{aligned} \cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma&=\sin\beta\sin\gamma,\\ \cos\beta+\cos\gamma\cos\alpha&=\sin\gamma\sin\alpha,\\ \cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta&=\sin\alpha\sin\beta; \end{aligned}$$

$$(38_0)\qquad \cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha+\cot\alpha\cot\beta=1;$$

welche, vornehmlich die (38), weil sämmtliche dieser Dreieckswinkel hohl sind, auf die bekannte Gleichung

$$(39)\qquad \alpha+\beta+\gamma=180^0$$

zurückführen.

Endlich geben die Gleichungen (14), verbunden mit (38), oder die Gleichungen (20) allein, die Proportionen

$$(40)\qquad \frac{x}{\sin\alpha}=\frac{y}{\sin\beta}=\frac{z}{\sin\gamma}.$$

Bemerkung. Wer demnach in einem Lehrbuche der reinen Mathematik in der Lehre von den Gleichungen die Gleichungen (12) erforschen würde, der könnte in der ebenen Trigonometrie, sobald er die Gleichung (36) erwiesen hätte, aus ihnen vermöge der Ergebnisse jener Forschungen die Gleichungen (39) und (40) sogleich in der hier gezeigten Weise folgern.

9.

Es dürfte vielleicht nicht unangemessen sein, hier noch zu zeigen, wie auch ohne solche Vorbereitung aus den Gleichungen (36) die beiden Hauptgleichungen (39) und (40) der geradlinigen Trigonometrie höchst leicht und zugleich abgeleitet werden können.*)

*) Ich habe diese Ableitung, ohne sie irgend wo anders gefunden

Eliminirt man aus den Gleichungen (36) eine Dreiecksseite, etwa die c, was am einfachsten geschieht, wenn man ihren Ausdruck aus der letzten Gleichung in die beiden ersten setzt; so erhält man

$$a\sin\beta^2 = b(\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma),$$
$$b\sin\alpha^2 = a(\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma).$$

Aus diesen Gleichungen leuchtet ein, dass der gemeinschaftliche Schlussfactor weder Null noch negativ werden kann, weil a, b als Dreiecksseiten, und $\sin\alpha$, $\sin\beta$ als von (hohlen) Dreieckswinkeln herstammend, positiv und von Null verschieden sind.

Multipliciren wir demnach diese Gleichungen erstlich wie sie über einander stehen, dann übers Kreuz, theilen dann durch die nie verschwindenden Factoren ab und $\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma$, und ziehen endlich aus den Producten die zweiten Wurzeln, die nur positiv ausfallen können; so erhalten wir

$$\sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma$$

und

$$a\sin\beta = b\sin\alpha.$$

Die erstere Gleichung gibt:

$$\cos\gamma = -(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$
$$= -\cos(\alpha+\beta),$$

folglich, weil α, β, γ hohl sind,

$$(39) \qquad \alpha + \beta + \gamma = 180^0;$$

die andere aber

$$(40) \qquad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \text{ und nachgebildet noch } = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

---

zu haben, in §. 557. meiner Ueberarbeitung des 2. Bds. von Vega's Vorlesungen über d. Mathematik. Wien. 1. Aufl. 1835., 2. Aufl. 1848. gegeben. Unmittelbar davor in §. 556. zeigte ich nach J. J. Littrow's Elementen d. Algebra u. Geometrie. Wien 1827. S. 208. §. 1. die von Herrn Dr. Rädell im Archiv. 1. Thl. 4. H. 1841. S. 444. mitgetheilte Herleitung des erweiterten Pythogorischen Lehrsatzes ((5) in AA), die aber auch schon Carnot in seiner Géométrie de position. Paris. 1803. t. II. num. 251. gelehrt hat.

VI.

Zwei bemerkenswerth einfache Herleitungen der Hauptgleichungen der sphärischen Trigonometrie.

Von dem

Herrn Dr. Wilhelm Matzka,

Professor der Mathematik zu Tarnow in Galizien.

Bekanntlich gibt es mehrere (darunter eine sogar von Lagrange herrührende) Ableitungen der in der sphärischen Trigonometrie zwischen den Seiten und einem Winkel eines Kugeldreieckes bestehenden Grundgleichung, aus der alle übrigen Hauptgleichungen blos analytisch hergeleitet werden können. Jede derartige Ableitung wendet auf die, zweien geradlinigen Dreiecken gemeinsame Seite den erweiterten Pythagorischen Lehrsatz an. Eine solche Ableitung wird jedoch unbrauchbar, wenn entweder eine Seite oder ein Winkel des Dreieckes $= 90^0$ wird; auch unterlässt man gewöhnlich die Giltigkeit der Gleichung für alle möglichen Fälle nachzuweisen. Im Folgenden theile ich zwei Ableitungen dieser Grund- und Hauptgleichungen mit, welche der Beachtung der Geometer nicht unwürdig sein dürften. Die erste stellt jene Grundgleichung sogleich mit voller Allgemeingiltigkeit nach der bisher zu wenig beachteten und darum auch rücksichtlich ihrer unschätzbaren Vortheile gar nicht gekannten Lehre von der rechtwinkligen Projection auf, über welche ich — vielleicht in nicht ferner Zeit — eine ausführliche Abhandlung veröffentlichen zu können hoffe. Die zweite leitet sämmtliche Hauptgleichungen geometrisch und zwar aus einer einzigen Figur ab, wozu die Projectionslehre gleichfalls einen höchst schätzbaren Beitrag liefert.

A. Erste Herleitung.

1.

Grundgleichung. Sei (in Taf. I. Fig. 2.) ABC ein Kugeldreieck oder $OABC$ das ihm am Mittelpunkte O der Kugel entsprechende dreikantige Eck; danach seien $A=\alpha$, $B=\beta$, $C=\gamma$ seine Winkel und a, b, c deren Gegenseiten. Im Kugelmittelpunkte O stelle man auf den Halbmesser OA einer Spitze A des Kugeldreieckes oder auf die eine Kante OA des Eckes die senkrechte Ebene $\mathfrak{A}$ auf, projicire (winkelrecht) in diese die Halbmesser OB, OC der beiden anderen Dreieckspitzen oder die zwei übrigen Kanten nach OB', OC'. Dann ist, wenn man etwa noch zur leichteren Einsicht die Seiten $AB=c$ und $AC=b$ zu Quadranten bis D und E verlängert, $BOB'=BD=AD-DB =90^0-c$, $COC'=CE=AE-AC=90^0-b$, und $B'OC'=\alpha$.

Von einer der beiden letzteren Kanten, etwa von OB, projicire man ein beliebiges in O anfangendes Stück $OM=r$ (wofür man auch die Längeneinheit also $OM=1$ nehmen kann), mittelbar, und zwar benützend die Ebene $\mathfrak{A}$, auf die Projection OC' der anderen Kante OC, folglich seinen Endpunkt M nach N und P. Dann ist

$$ON=OM\cos BOB'=r\sin c,$$
$$NM=OM\sin BOB'=r\cos c;$$
$$OP=ON\cos B'OC'=r\sin c.\cos\alpha,$$
$$PN=ON\sin B'OC'=r\sin c.\sin\alpha.$$

Nun projicire man jene Strecke oder den Radiusvector OM in der ersten Kante OB einerseits, und die zwischen denselben Grenzpunkten O und M begriffene dreigliedrig gebrochene Linie $\overline{OPNM}$ andererseits auf die zweite Kante OC selbst; so sind ihre algebraischen Projectionen einander gleich, und es haben hiebei

die Strecken:	OM,	OP,	PN,	NM
die Projectionswinkel:	$BOC=a$,	$COC'=90^0-b$,	90^0,	$COA=b$.

Mithin ist — ganz allgemein giltig —

$$r.\cos a=r\sin c\cos\alpha.\cos(90^0-b)+r\sin c\sin\alpha.\cos 90^0+r\cos c.\cos b$$

oder wenn man durch r theilt und sonst reducirt, sogleich

$$\text{(I)}\qquad \cos a=\cos\alpha.\sin b\sin c+\cos b\cos c,$$

die in vollständiger Allgemeinheit bestehende Grundgleichung zwischen den Seiten und einem Winkel eines Kugeldreiecks.

2.

I. Erste Hauptgleichung. Bildet man zur gefundenen Gleichung (1) eine gleichgestaltete durch Verwechselung von a und b, so wie von α mit β; so findet man

$$\cos b = \cos\beta . \sin c \sin a + \cos c \cos a.$$

Substituirt man diesen Ausdruck von $\cos b$ in (1), so wird

$$\cos a (1 - \cos c^2) = \cos a \sin c^2 = (\cos\alpha \sin b + \cos\beta \cos c \sin a) \sin c.$$

Weil keine Seite eines Kugeldreiecks 0 oder 180° sein kann, folglich $\sin c$ nie $= 0$ ist, so ist es gestattet durch ihn die letzte Gleichung zu dividiren; und sofort erfolgt

$$(2) \qquad \cos a \sin c = \cos\alpha \sin b + \cos\beta \cos c \sin a,$$

die zwischen den Seiten und zwei Winkeln bestehende Hauptgleichung.

II. Eine Hilfsgleichung zwischen allen sechs Stücken des Dreiecks. Vertauscht man in (2) a und c unter sich, und α mit γ, so erscheint

$$\cos c \sin a = \cos\gamma \sin b + \cos\beta \cos a \sin c.$$

Schreibt man nun diesen Ausdruck von $\cos c \sin a$ in (2), so übergeht diese in

$$\cos a \sin c (1 - \cos\beta^2) = \cos\alpha \sin b + \cos\beta \cos\gamma \sin b$$

oder in

$$(3) \qquad \cos a \sin c \sin\beta^2 = (\cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma) \sin b.$$

III. Zweite und dritte Hauptgleichung. Wenn man in (3) die β und γ so wie die b und c unter einander verwechselt, so verwandelt sie sich in

$$\cos a \sin b \sin\gamma^2 = (\cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma) \sin c.$$

Multiplicirt man diese zwei letzten Gleichungen mit einander, und zwar zuerst so wie sie über einander stehen und dann kreuzweis, und zieht man aus den Producten die zweite Wurzel; so erhält man

$$\pm \cos a \sin\beta \sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma,$$

$$\pm \sin\beta \sin c = \sin\gamma \sin b.$$

In diesen Gleichungen können jedoch nur die oberen Vorzeichen gelten. In der ersten, weil für $\beta = \gamma = 90°$, wie man aus der

Lehre von den sphärischen Winkeln weiss, $a=\alpha$ sein muss; in der zweiten, weil nur solche Kugeldreiecke, in denen Seiten und Winkel zwischen 0 und 180° liegen, betrachtet zu werden pflegen. Danach wird die erstere Gleichung

$$(4) \qquad \cos\alpha = \cos a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta \cos\gamma,$$

die zweite Hauptgleichung zwischen den Winkeln und einer Seite;

die letztere Gleichung aber

$$\frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma},$$

oder durch Verwechselung von b mit a und β mit α vervollständigt:

$$(5) \qquad \frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma},$$

die dritte Hauptgleichung zwischen je zwei Seiten und ihren Gegenwinkeln *).

IV. Vierte Hauptgleichung. Setzt man in der ersten Hauptgleichung (2) für $\sin b$ seinen aus der dritten Hauptgleichung (5) erfolgenden Ausdruck

$$\sin b = \sin a \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

um b aus diesen zwei Gleichungen zu eliminiren; so ergibt sich

$$\cos a \sin c = \sin\beta \cot\alpha \sin a + \cos\beta \cos c \sin a,$$

daher wenn man durch den nie verschwindenden $\sin a$ theilt:

$$(6_0) \qquad \sin c \cot a = \sin\beta \cot\alpha + \cos c \cos\beta,$$

oder symmetrischer geordnet:

$$(6) \qquad \cos c \cos\beta = \sin c \cot a - \sin\beta \cot\alpha$$

als die vierte Hauptgleichung zwischen vier unmittelbar nach einander folgenden Dreiecksstücken α, c, β, a, von denen zwei, c und β, Mittel- oder eingeschlossene Stücke, die beiden anderen, a und α Aussen- oder äussere Stücke und zu einander Gegenstücke sind.

---

*) Diese gleichzeitige Ableitung der zweiten und dritten Hauptgleichung habe ich — vielleicht der Erste — in meiner Ueberarbeitung des zweiten Bandes von Vega's Vorles. über d. Mathem., Wien. 1. Aufl. 1835., 2. Aufl. 1848., in §. 567. u. 568. gegeben.

B. Zweite Herleitung.

3.

Grundgleichung und erste Hauptgleichung. Indem man die obigen Bezeichnungen beibehält und nur noch des Kugelhalbmessers Zahlenwerth wie üblich $=1$ setzt, projicire man (in Taf. I. Fig. 3.) eine Dreiecksspitze A mittels senkrechter Ebenen auf die Halbmesser oder Kanten OB, OC der zwei anderen Dreiecksspitzen B und C nach E und F, und dadurch zugleich mittels der als Durchschnitt dieser zwei projicirenden Ebenen sich ergebenden senkrechten Geraden AD auf die Ebene BOC jener zwei Kanten.

Danach ist

$$OE = \cos c, \qquad EA = \sin c, \qquad AED = \beta$$

$$ED = EA \cos AED = \sin c \cos\beta, \; DA = EA \sin AED = \sin c \sin\beta$$

$$OF = \cos b, \qquad FA = \sin b, \qquad AFD = \gamma$$

$$FD = FA \cos AFD = \sin b \cos\gamma, \; DA = FA \sin AFD = \sin b \sin\gamma.$$

Projicirt man nun den Umfang des (ebenen) Viereckes $OFDE$, in welchem $EOF = a$, $E = 90^0 = F$, also $EDF = 180^0 - a$ ist, auf die Seite OE (als Hauptaxe) und auf ihre Senkrechte (als Nebenaxe der Projection); so haben

die Vierecksseiten	OE,	OF,	FD,	DE
die Projectionswinkel	0,	a,	$a-90^0$,	-90^0;

und sonach erhält man für die Haupt- und Nebenprojection der Seite OE den Doppelausdruck

$$OE \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} 0 = OF \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} a + FD \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} (a-90^0) + DE \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} (-90^0).$$

Substituirt man den Seiten ihre obigen Ausdrücke, vereinzelt die Gleichungen, reducirt die goniometrischen Stammfunctionen und versetzt die Glieder in geeigneter Weise, so erhält man eines Theils

$$(1) \qquad \cos c = \cos\gamma \sin a \sin b + \cos a \cos b$$

die **Grundgleichung**, und anderen Theils

$$(2) \qquad \cos b \sin a = \cos\beta \sin c + \cos\gamma \cos a \sin b$$

die **erste Hauptgleichung**.

Anmerkung. Die Projection auf OF liefert ein Paar verwandte Gleichungen.

4.

I. **Dritte Hauptgleichung.** Setzt man die vorher für DA gefundenen zwei Ausdrücke einander gleich, so ist

$$\sin c \sin\beta = \sin b \sin\gamma,$$

also

$$\frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma},$$

oder durch Vertauschung von b mit a und β mit α vervollständigt:

$$(5) \qquad \frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma},$$

welches die dritte Hauptgleichung ist.

II. **Zweite Hauptgleichung.** Projicirt man in den rechtwinkligen Dreiecken ADE, ADF die Spitze D des rechten Winkels mittels der Senkrechten DG, DH auf die Hypotenusen AE, AF; so sind bekanntlich die Winkel $ADG = AED = \beta$ und $ADH = AFD = \gamma$. Zugleich stehen diese projicirenden Senkrechten auch auf den beiden Seitenebenen AOB, AOC der Kante OA im dreikantigen Ecke $OABC$ senkrecht.

Denn weil die Ebene AED auf OB senkrecht steht, so ist sie auch auf der Ebene AOB senkrecht; und weil in der ersteren Ebene auf die Durchschnittslinie AE beider Ebenen die DG senkrecht gefällt ist, so muss diese auch auf der anderen Ebene AOB senkrecht stehen. Eben so erweist man, dass auch die DH auf der Ebene AOC senkrecht steht.

Der Winkel GDH der Normalen DG, DH der zwei Ebenen AOB, AOC ergänzt sich aber mit der **Schmiege***) dieser

---

*) Mit Bezug auf den von Herrn R. **Wolf** und mir im Archiv. Theil 3., H. 4., S. 446. und Th. 6., H. 2., S. 120., Note †. ausgesprochenen Wunsch bemerke ich, dass ich für den s. g. „Winkel zweier Ebenen" eine ganz passende Benennung gefunden zu haben glaube. Ich schlage nemlich vor zu nennen: die Ablenkung (der Streckungen) zweier Ebenen oder genauer zweier Halbebenen (Ebenenhälften) an ihrer Durchschnittslinie von einander **die Schmiege** (franz. le biais) dieser Halbebenen; ihre Durchschnittslinie die **Schneide** oder **Schärfe**, die Halbebenen selbst aber die **Wände** oder **Wangen** der Schmiege. — Zur Rechtfertigung diene Folgendes: Nach **Heinsius** und **Heyse** ist „die **Schmiege** 1. bei den Werkleuten ein **Winkel** sowohl **über** als unter 90 Grad, welchen zwei Linien oder **Flächen** (Ebenen?) bilden (auch **Schmiegung**), 2. ein **Werkzeug**, welches in einem beweglichen Winkelmaasse besteht, das sich mittels einer Stellschraube öffnen und einschlagen lässt und zum Messen der gedachten Winkel von den Tisch-

zwei Ebenen zu 180°; was man leicht einsieht, wenn man seine auf diesen Ebenen und also auch auf ihrer Durchschnittskante OA senkrechte Ebene bis zum Durchschnitt mit ihnen erweitert. Mithin ist $GDH = 180^0 - \alpha$.

Endlich ist der Winkel EDF, den wir oben $= 180^0 - a$ fanden, gleich der Schmiege der zwei Ebenen AED und AFD, weil AD auf der Ebene BOC, also auch auf DE und DF senkrecht steht.

In dem an der Spitze D entstandenen dreikantigen Ecke $DAGH$ hat man demnach die Seiten $ADG = \beta$, $ADH = \gamma$ und $GDH = 180^0 - \alpha$, und den Winkel an der Kante DA gleich $EFD = 180^0 - a$. Wendet man daher auf dieses Eck oder auf ein ihm entsprechendes, auf einer um D als Mittelpunkt gelegten Kugelfläche gebildetes, Kugeldreieck die bereits gefundene Grundgleichung (1) an; so findet man

$$\cos(180 - \alpha) = \cos(180 - a) \sin\beta \sin\gamma + \cos\beta \cos\gamma,$$

folglich nach leichter Reduction

$$(4) \qquad \cos\alpha = \cos a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta \cos\gamma,$$

die zweite Hauptgleichung.

III. Vierte Hauptgleichung. Zieht man die Verbindungsgerade OD, so sind die Strecken DE, DF Katheten in zwei Paar rechtwinkligen Dreiecken, von denen das eine Paar ADE, ADF, die zweite Kathete AD, das andere Paar OED, OFD die Hypotenuse OD gemeinsam hat. Das erstere Dreieckspaar gibt

$$DE : DF = \frac{DE}{AD} : \frac{DF}{AD} = \operatorname{tang} DAE : \operatorname{tang} DAF$$
$$= \cot AED : \cot AFD = \cot\beta : \cot\gamma,$$

das letztere aber, wenn man für einen Augenblick $EOD = a'$, $FOD = a''$ setzt,

---

lern, Schlossern u. dergl. gebraucht wird (der Winkellappen, das Schrägmaass)." (Vergl. Karmarsch, Grundr. d. mechan. Technol 2. Bd. S. 98.) Rollin (Nouv. Dict. de poche, Berlin 1822) übersetzt Schmiege mit le biais und umgekehrt dieses mit Schräge, Schiefe; biais gras, maigre, aigu stumpfer, scharfer, spitziger Winkel. Bei „schmiegen" sagt Heinsius: „die Werkleute schmiegen (machen genau anpassend) eine Wand, wenn sie dieselbe nach einem Winkel über oder unter 90° genau nach der Schmiege aufführen." Nach Kaltschmidt heisst die Kante (zweier Ebenen an einem ebenflächigen Körper) so viel als die Schärfe, die Schneide. Beide letzteren sind zugleich analog der Spitze beim Winkel. Als Analogon für Schenkel am Winkel passt bei der Schmiege am besten Wand, weil die Mauer- und andere so genannten Wände fast immer eben sind und vielfältig sich durchschneiden, auch noch Wange, insofern diese Körpertheile bei Thieren meist convergiren, auch manche Seitenebenen an Maschinenbestandtheilen so heissen.

$$DE:DF = \frac{DE}{OD} : \frac{DF}{OD} = \sin EOD : \sin FOD$$
$$= \sin a' : \sin a'',$$

folglich der Verein beider Verhältnissgleichheiten:

$$\cot\beta : \cot\gamma = \sin a' : \sin a''.$$

Es ist aber $a' + a'' = a$, also $a'' = a - a'$, und

$$\cot\gamma : \cot\beta = \sin(a - a') : \sin a'$$
$$= \sin a \cos a' - \cos a \sin a' : \sin a',$$

folglich wenn man theilt:

$$\tang\beta \cot\gamma = \sin a \cot a' - \cos a.$$

Es gibt endlich das an E rechtwinklige Dreieck OED

$$\cot a' = \frac{OE}{ED} = \frac{\cos c}{\sin c \cos\beta} = \frac{\cot c}{\cos\beta};$$

daher, wenn man substituirt und den Nenner $\cos\beta$ weg multiplicirt, erhält man

$$\sin\beta \cot\gamma = \sin a \cot c - \cos a \cos\beta$$

oder versetzt

$$(6) \qquad \cos a \cos\beta = \sin a \cot c - \sin\beta \cot\gamma,$$

die vierte Hauptgleichung.

VII.

Ueber die mittlere Entfernung des Ackers vom Hofe, in Bezug auf Anwendung.

Von dem

Feldmesser Herrn C. Wasmund

zu Stralsund.

In der vor Kurzem unter dem Titel: Ueber die mittlere Entfernung einer Figur von einem Punkte, oder über die sogenannte mittlere Entfernung des Ackers vom Hofe. Von J. A. Grunert. Greifswald. 1848*) erschienenen

---

*) Um Lesern, denen obige Schrift etwa noch nicht zu Händen gekommen sein sollte, wenigstens anzudeuten, worum es sich handelt, will ich den Begriff der mittlern Entfernung der Kürze wegen in der Sprache des vorigen Jahrhunderts hersetzen: Unter der mittlern Entfernung einer Linie, Fläche oder eines Körpers von einem Punkte wird verstanden das arithmetische Mittel aus den Entfernungen sämmtlicher Elemente derselben vom gedachten Punkte, oder hieraus hervorgehend und noch bequemer für die Anknüpfung der Rechnung: Die mittlere Entfernung ist die Summe der Entfernungsmomente sämmtlicher Elemente, dividirt durch die Summen sämmtlicher Elemente, unter Entfernungsmoment das Product des Elements in seine Entfernung verstanden.

Ist also $y=f_x$ die Gleichung einer ebenen Curve für rechtwinklige Coordinaten, so ist die mittlere Entfernung des Curvenstücks zu dem Abscissenintervall $a-\alpha$ vom Anfange der Coordinaten ab: $M=\dfrac{\int_a^\alpha \partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\right)^2}\cdot\sqrt{x^2+(f_x)^2}}{\int_a^\alpha \partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\right)^2}}$, wo der Nenner natürlich das Curvenstück selbst ist. Für die gerade Linie ab, $\alpha\beta$, deren Gleichung also $y=f_x=\dfrac{b-\beta}{a-\alpha}x+\dfrac{a\beta-\alpha b}{a-\alpha}$ ist, giebt dies, weil hier $\dfrac{\partial f_x}{\partial x}$ constant ist.

Schrift giebt der Herr Verfasser, nachdem zunächst der Begriff festgestellt worden ist, Formeln für die mittlere Entfernung eines Dreiecks von einem Punkte, und zeigt dann, wie sich hiernach die mittlere Entfernung jeder geradlinigen Figur durch ihre Zerlegung in Dreiecke finden lasse. Die Formeln sind jedoch etwas complicirt, und überhaupt hat man es in der Praxis auch mehr mit ganz gesetzlosen Curven zu thun. Ich suchte deshalb nach einem möglichst einfachen Verfahren für diese Fälle, wo man sich doch lediglich mit Näherungen behelfen muss, und kam dabei auf folgenden Satz:

Für den concentrischen Ring mit den Halbmessern r und ϱ, oder einen Ausschnitt desselben, ist vom Mittelpunkte abgerechnet die mittlere Entfernung $M=\frac{2}{3}\left(\frac{r^2+r\varrho+\varrho^2}{r+\varrho}\right)$, woraus für $\varrho=0$, für den Kreis oder Kreisausschnitt vom Halbmesser r, hervorgeht $M=\frac{2}{3}r$.

Hierauf lässt sich nun das nachstehende Verfahren gründen, welches mir für die Praxis genügend scheint. Soll die mittlere Entfernung der Fläche aaa..... (Taf. I. Fig. 4), deren Inhalt $=F$, vom Punkte C ermittelt werden, so theile man die-

---

$$M=\frac{1}{a-\alpha}\int_\alpha^a \partial x\sqrt{x^2+(fx)^2},\text{ oder entwickelt:}$$

$$M=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a-\alpha)a+(b-\beta)b}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\sqrt{a^2+b^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(a-\alpha)\alpha+(b-\beta)\beta}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(a\beta-\alpha b)^2}{\sqrt{((a-\alpha)^2+(b-\beta)^2)^3}}.\log\frac{(a-\alpha)a+(b-\beta)b+\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}.\sqrt{a^2+b^2}}{(a-\alpha)\alpha+(b-\beta)\beta+\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}.\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Sind ferner $z=F\varphi$ und $z=f\varphi$ die Polargleichungen zweier Curven, so ist die mittlere Entfernung des Flächenstücks zwischen beiden Curven für das Bogenintervall $a-\alpha$ vom Pole ab:
$$M=\frac{\int_\alpha^a\partial\varphi\int_{f\varphi}^{F\varphi}z^2\partial z}{\int_\alpha^a\partial\varphi\int_{f\varphi}^{F\varphi}z\partial z},$$
wo der Nenner das Flächenstück selbst ist.

Für den concentrischen Ringausschnitt mit den Halbmessern r und ϱ und dem Mittelpunktswinkel a, sind für den Mittelpunkt als Pol die Gleichungen der beiden Kreise $z=F\varphi=r$ und $z=f\varphi=\varrho$, daher dessen mittlere Entfernung vom Mittelpunkte ab:

$$M=\frac{\int_0^a\partial\varphi\int_\varrho^r z^2\partial z}{\int_0^a\partial\varphi\int_\varrho^r z\partial z}=\frac{2}{3}\left(\frac{r^3-\varrho^3}{r^2-\varrho^2}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{r^2+r\varrho+\varrho^2}{r+\varrho}\right),$$

welches der oben benutzte Satz ist. Dies möge zur Andeutung des Begriffs hier genügen.

selbe von C aus in concentrische Ringe 1, 2, 3, ...n, ermittele die Flächengrössen f_1, f_2, f_3, ...f_n, so wie nach obigem Satze auch die mittlern Entfernungen m_1, m_2, m_3, ...m_n dieser Ringe von C ab, dann ist der Gesammtfläche mittlere Entfernung: $M = \frac{m_1 f_1 + m_2 f_2 + m_3 f_3 \ldots + m_n f_n}{F}$ (Grunert a. a. O. §. 17.). Liegt der Punkt C innerhalb der Fläche $a\,a\,a$....., so wird bei der Eintheilung auch noch ein voller Kreis, oder ein Kreisausschnitt vorkommen, was jedoch in der Berechnung keinen Unterschied macht.

Betreffend die weitere Anwendung der mittlern Entfernung, halte ich es noch für eine sehr schwer zu lösende Aufgabe, selbst unter Voraussetzung einer ganz speciellen Nutzungsart, die Funktion der Flächengrösse F, Bonität B und mittlere Entfernung M eines Grundstücks von einem Punkte zu ermitteln, welcher die Werthe mehrerer Grundstücke in Bezug auf diesen Punkt proportional zu nehmen sind. Namentlich würde man der Praxis sehr widersprechende Resultate erhalten, besonders für extreme Werthe von F, B und M, wollte man diese Funktion $= \frac{FB}{M}$ setzen. Wenn auch vielleicht der Zähler FB sollte bleiben können, so würde doch dann der Nenner ausser von M auch noch wieder von F und B abhängig sein müssen, wie dies auch schon zum Theil aus Herrn von Thünen's Bemerkungen über diesen Gegenstand in seinem isolirten Staate hervorgeht. Bei der Schwierigkeit, welche die Herstellung einer solchen stichhaltigen Funktion hat, wird die ökonomische Berücksichtigung der Entfernung bei der Werthbestimmung von Grundstücken wohl nur in der Art Statt finden können, dass man Grundstücke in verschiedenen Entfernungen veranschlagt, und dadurch eine Progression von Werthreductionsfactoren ermittelt für stufensweise wachsende Entfernungen. Hierbei wird dann aber die Kenntniss der mittlern Entfernung von erheblichem Nutzen sein.

Ganz natürlich wird man bei Betrachtungen obiger Art noch zu der Aufgabe geleitet, für den Acker den vortheilhaftesten Ort des Hofes zu ermitteln, rücksichtlich der Entfernung, d. h. für eine gegebene Fläche den Punkt zu bestimmen, von welchem ab die mittlere Entfernung derselben ein Minimum ist. Für ein Dreieck wird aber hierzu schon ein beträchlicher Rechnungsaufwand erfordert werden, so dass man bei wirklichen neuen Hofanlagen wohl auf eine mathematische Lösung wird verzichten, und sich damit trösten müssen, dass in den allermeisten Fällen doch auch noch andere Umstände als die Entfernung eine entschiedene Mitberücksichtigung verlangen.

Nachschrift des Herausgebers.

In meiner Schrift: Ueber die mittlere Entfernung einer Figur von einem Punkte oder über die sogenannte mittlere Entfernung des Ackers vom Hofe. Greifswald.

1848., auf welche sich die Bemerkungen in dem obigen Aufsatze beziehen, habe ich vorzugsweise die geometrische oder eigentlich überhaupt die theoretische Seite dieses Gegenstandes in's Auge gefasst, und habe versucht, mit völliger mathematischer Strenge, welche bei derartigen Untersuchungen leider nur zu häufig vernachlässigt wird, zu Resultaten zu gelangen, welche sich sowohl durch ihre Allgemeinheit, als auch durch ihre Eleganz auszeichnen und empfehlen, und glaube, dass auf diese beiden Prädicate insbesondere der Ausdruck S. 79. §. 11. Nr. 71., welchen ich als das in dieser Schrift gewonnene Hauptresultat betrachte, Anspruch machen zu dürfen vollkommen berechtigt ist. Wenn ich deshalb auch dergleichen elegante Ausdrücke nicht mit dem Namen „complicirt" belegen möchte, so bin ich doch mit dem geehrten Herrn Verfasser des obigen Aufsatzes darin vollkommen einverstanden, dass die Rechnung nach den in meiner Schrift entwickelten Ausdrücken ungeachtet ihrer Eleganz für die gewöhnliche Praxis in den meisten Fällen noch zu weitläufig ist, und habe daher auch schon in der im Literar. Ber. Nr. XLII. S. 602. gelieferten Anzeige der obigen Schrift die Leser des Archivs zur gefälligen Mitwirkung bei der weiteren Vereinfachung des fraglichen Gegenstandes, und dessen Gestaltung für den gewöhnlichen praktischen Gebrauch aufgefordert. Es kann mich demnach auch nur freuen, dazu in dem obigen Aufsatze, ungeachtet der grossen Einfachheit seines Inhalts, einen nach meiner Meinung recht zweckmässigen Anfang gemacht zu sehen, und hoffe, dass es dem geehrten Herrn Verfasser desselben nicht unangenehm sein werde, wenn ich mir erlaube, seinen Betrachtungen noch die folgenden Bemerkungen hinzuzufügen, indem ich ihn zugleich zu weiteren Untersuchungen, zu denen ihm vielleicht seine Praxis Gelegenheit darbieten dürfte, aufzufordern mir erlaube.

Der von dem Herrn Verfasser angegebenen Methode liegt hauptsächlich ein Ausdruck für die mittlere Entfernung eines zwischen zwei concentrischen Kreisen enthaltenen Rings von deren gemeinschaftlichem Mittelpunkte zum Grunde. Dieser Ausdruck, welchen der Herr Verfasser in einer Note durch die Integralrechnung ableitet, ist, wie ich jetzt zeigen werde, eine unmittelbare oder wenigstens leichte Folge aus den in meiner Schrift enthaltenen Ausdrücken, wenn er auch in dieser Schrift nicht selbst gegeben worden ist, was nicht nöthig war, weil ich keineswegs die Absicht hatte, in derselben den fraglichen Gegenstand ganz zu erschöpfen.

Wenn wir die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks durch a, seine beiden gleichen Schenkel durch b, seinen Inhalt durch Δ, die halbe Summe seiner Seiten durch s, und seine mittlere Entfernung von seiner Spitze durch M bezeichnen, so ist nach der Formel Nr. 79) auf S. 104. meiner Schrift, wenn wir in dieser Formel $b=c$ setzen:

$$M=\frac{1}{3}b-\frac{4\Delta^2}{3a^3}l'(1-\frac{a}{s}).$$

Weil aber in diesem Falle

$$2s=a+2b,\ 1-\frac{a}{s}=1-\frac{2a}{a+2b}=\frac{2b-a}{2b+a}$$

oder

$$1-\frac{a}{s}=\frac{1-\frac{a}{2b}}{1+\frac{a}{2b}}$$

ist, so ist

$$M=\frac{1}{3}b-\frac{4\Delta^2}{3a^3}l\frac{1-\frac{a}{2b}}{1+\frac{a}{2b}}.$$

Nun ist ferner, wie man leicht findet:

$$\Delta^2=\frac{1}{4}a^2(b^2-\frac{1}{4}a^2),\ \frac{4\Delta^2}{3a^3}=\frac{b^2-\frac{1}{4}a^2}{3a};$$

also

$$M=\frac{1}{3}b-\frac{b^2-\frac{1}{4}a^2}{3a}\ l\frac{1-\frac{a}{2b}}{1+\frac{a}{2b}}.$$

Denken wir uns jetzt in einen mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreis ein reguläres Vieleck von n Seiten beschrieben, und bezeichnen jede Seite desselben durch a, so ist für jedes der n gleichschenkligen, im Mittelpunkte des Kreises zusammenstossenden Dreiecke, in die sich dasselbe zerlegen lässt, in Bezug auf den Mittelpunkt des Kreises nach dem Vorhergehenden:

$$M=\frac{1}{3}r-\frac{r^2-\frac{1}{4}a^2}{3a}\ l\frac{1-\frac{a}{2r}}{1+\frac{a}{2r}},$$

und folglich immer in Bezug auf den Mittelpunkt des Kreises für das ganze reguläre $n$eck nach S. 111. meiner Schrift:

$$M=n\frac{\Delta}{n\Delta}\left\{\frac{1}{3}r-\frac{r^2-\frac{1}{4}a^2}{3a}\ l\frac{1-\frac{a}{2r}}{1+\frac{a}{2r}}\right\},$$

d. i. eben so wie vorher:

$$M=\frac{1}{3}r-\frac{r^2-\frac{1}{4}a^2}{3a}l\frac{1-\frac{a}{2r}}{1+\frac{a}{2r}}$$

oder

$$M=\frac{1}{3}r+\frac{r^2-\frac{1}{4}a^2}{3a}l\frac{1+\frac{a}{2r}}{1-\frac{a}{2r}}.$$

Also ist, da jedenfalls immer

$$-1<\frac{a}{2r}<+1$$

ist, nach einer sehr bekannten logarithmischen Reihe (m. s. u. A. meinen Leitfaden für den ersten Unterricht in der höhern Analysis. Leipzig. 1838. S. 64.):

$$M=\frac{1}{3}r+\frac{r^2-\frac{1}{4}a^2}{3a}\cdot 2\left\{\frac{a}{2r}+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2r}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{a}{2r}\right)^5+\ldots\ldots\right\},$$

d. i.

$$M=\frac{1}{3}r+\frac{2}{3}\left(r^2-\frac{1}{4}a^2\right)\left\{\frac{1}{2r}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2r}\left(\frac{a}{2r}\right)^2+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2r}\left(\frac{a}{2r}\right)^4+\ldots\right\};$$

und wenn man nun, um M für den Kreis selbst zu erhalten, n in's Unendliche wachsen, also a in's Unendliche abnehmen lässt, und in der vorhergehenden Gleichung zu den Gränzen übergeht, so ergiebt sich für den Kreis:

$$M=\frac{1}{3}r+\frac{2}{3}r^2\cdot\frac{1}{2r},\text{ d. i. } M=\frac{2}{3}r.$$

Für einen Kreisausschnitt, der $\frac{1}{k}$ des ganzen Kreises ist, sei jetzt M die mittlere Entfernung vom Mittelpunkte des Kreises, so ist nach S. 111. meiner Schrift offenbar

$$\frac{2}{3}r=k\cdot\frac{1}{k}M,\text{ also } M=\frac{2}{3}r;$$

wie für den ganzen Kreis, was sich auch von selbst versteht.

Endlich sei die mittlere Entfernung M eines ringförmigen Stücks wie $ABA'B'$ in Taf. I. Fig. 5. von dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte C der beiden Kreise, zwischen denen dieses

ringförmige Stück enthalten ist, zu finden. Zu dem Ende seien r und r' respective die Halbmesser des grösseren und des kleineren Kreises; die Flächenräume der beiden Kreisausschnitte ACB und $A'CB'$ seien respective $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$, und $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ seien deren mittlere Entfernungen von C; so haben wir nach S. 111. meiner Schrift die Gleichung:

$$\mathfrak{M}=\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}\mathfrak{M}'+\frac{\mathfrak{S}-\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}M.$$

Aber bekanntlich, da die Sectoren $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ demselben Winkel am Mittelpunkte entsprechen:

$$\mathfrak{S}:\mathfrak{S}'=r^2:r'^2, \text{ also } \mathfrak{S}:\mathfrak{S}-\mathfrak{S}'=r^2:r^2-r'^2;$$

und nach dem Vorhergehenden:

$$\mathfrak{M}=\frac{2}{3}r,\ \mathfrak{M}'=\frac{2}{3}r';$$

folglich nach dem Obigen

$$\frac{2}{3}r=\frac{r'^2}{r^2}\cdot\frac{2}{3}r'+\frac{r^2-r'^2}{r^2}M$$

oder

$$\frac{2}{3}r^3=\frac{2}{3}r'^3+(r^2-r'^2)M,$$

woraus

$$M=\frac{2}{3}\cdot\frac{r^3-r'^3}{r^2-r'^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{r^3-r'^3}{(r+r')(r-r')}=\frac{2}{3}\cdot\frac{r^2+rr'+r'^2}{r+r'}$$

folgt, ganz wie der Herr Verfasser des obigen Aufsatzes auf anderem Wege gefunden hat, wenn man nur in der dortigen Formel r' für ϱ setzt. Auch ist

$$M=\frac{2}{3}\left(r+\frac{r'^2}{r+r'}\right)=\frac{2}{3}\left(r'+\frac{r^2}{r+r'}\right).$$

Dass Ableitungen von Formeln, wie die obige, durch strenge Gränzenbetrachtungen aus anderen Formeln, zu den instructivsten Betrachtungen, namentlich für Anfänger, gehören, wenn sie auch von einer gewissen Weitläufigkeit zuweilen nicht ganz frei zu sprechen sind, dürfte wohl jetzt ziemlich allgemein anerkannt sein, und ich selbst bin der Meinung, dass Anfänger, welche in der Mathematik weiter zu gehen, und namentlich die Analysis in ihrem neuesten Zustande kennen zu lernen beabsichtigen, nicht häufig genug sich mit dergleichen Betrachtungen bekannt machen und dieselben selbst anzustellen versuchen können.

So wie im vorhergehenden Falle wird man auch fast in allen in der Praxis sich vielleicht darbietenden Fällen die erforderlichen Formeln aus den in meiner Schrift entwickelten Ausdrücken ohne Schwierigkeit abzuleiten im Stande sein.

Bei der wirklichen Anwendung der von dem Herrn Verfasser des obigen Aufsatzes vorgeschlagenen praktischen Methode wird man häufig in den Fall kommen, die Flächenräume ringförmiger Stücke wie $ABA'B'$ bestimmen zu müssen. Deshalb wird es vielleicht zweckmässig sein, auch darüber noch ein Paar Bemerkungen dem Obigen hinzuzufügen.

Bezeichnen wir den Flächeninhalt des ringförmigen Stücks $ABA'B'$ durch F, und einen den Winkel ACB oder $A'CB'$ am Mittelpunkte messenden Kreisbogen in einem mit der Einheit als Radius beschriebenen Kreise durch ω; so ist nach bekannten Sätzen

$$F=\frac{1}{2}(r^2-r'^2)\,\omega=\frac{1}{2}(r-r')(r+r')\,\omega\,.$$

Bezeichnen wir nun die Sehne des Bogens AB durch σ, so ist

$$\sigma=2r\sin\frac{1}{2}\,\omega\,,\quad \sin\frac{1}{2}\,\omega=\frac{\sigma}{2r}\,;$$

folglich

$$\frac{1}{2}\,\omega=\text{Arcsin}\frac{\sigma}{2r}\,,\quad \omega=2\text{Arcsin}\frac{\sigma}{2r}\,.$$

Weil aber, da jedenfalls

$$0<\frac{\sigma}{2r}<1$$

ist, nach einer bekannten Reihe (m. s. u. A. meine Elemente der Differential- und Integralrechnung. Zweiter Theil. Leipzig. 1837. S. 92.)

$$\text{Arcsin}\frac{\sigma}{2r}=\frac{\sigma}{2r}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sigma}{2r}\right)^3+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{\sigma}{2r}\right)^5+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{\sigma}{2r}\right)^7+\ldots\ldots$$

ist, so ist nach dem Obigen

$$F=(r-r')(r+r')\left\{\begin{array}{l}\frac{\sigma}{2r}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sigma}{2r}\right)^3+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{\sigma}{2r}\right)^5\\ \qquad+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{\sigma}{2r}\right)^7+\ldots\end{array}\right\},$$

d. i.

$$F=\frac{(r-r')(r+r')\sigma}{2r}\left\{1+\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^2+\frac{3}{640}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^4+\frac{5}{7168}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^6+\ldots\right\}.$$

oder

$$F = \frac{1}{2}\left(1-\frac{r'}{r}\right)\left(1+\frac{r'}{r}\right) r\sigma \left\{1+\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^2 + \frac{3}{640}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^4 + \frac{5}{7168}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 + \ldots\right\}.$$

Von diesen Reihen wird man immer nur so viele Glieder beibehalten, als die bei der Rechnung beabsichtigte Genauigkeit erfordert.

Für das Product des ringförmigen Stücks $ABA'B'$ in seine mittlere Entfernung vom Mittelpunkte C hat man nach dem Vorhergehenden den Ausdruck

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{r^2+rr'+r'^2}{r+r'}\cdot(r-r')(r+r')\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sigma}{2r},$$

d. i.

$$\frac{2}{3}(r-r')(r^2+rr'+r'^2)\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sigma}{2r},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{(r-r')(r^2+rr'+r'^2)\sigma}{r}\left\{1+\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^2+\frac{3}{640}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^4+\ldots\ldots\right\},$$

oder auch

$$\frac{2}{3}r^2\sigma\left(1-\frac{r'}{r}\right)\left\{1+\frac{r'}{r}+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^2+\frac{3}{640}\cdot\left(\frac{\sigma}{r}\right)^4+\ldots\ldots\right\}.$$

Diese Ausdrücke scheinen mir bei der Ausführung der durch die Anwendung der von dem Herrn Verfasser des obigen Aufsatzes angegebenen für die Praxis recht zweckmässigen Methode nöthiggemachten Rechnungen die meiste Bequemlichkeit darzubieten.

Rücksichtlich der in dem letzten Absatze des obigen Aufsatzes gemachten Bemerkung stimme ich dem Herrn Verfasser desselben vollkommen bei. Ueber das aber, was in dem vorletzten Absatze dieses Aufsatzes bemerkt worden ist, muss ich die Entscheidung den Landwirthen und Nationalökonomen anheim stellen, und bemerke nur noch, dass einige auf den in diesem Absatze angeregten Gegenstand bezügliche Bemerkungen schon von dem sehr einsichtsvollen Recensenten meiner Schrift in den Heidelberger Jahrbüchern. 1848. Nr. 29. S. 459., Herrn Doctor J. Dienger, früher in Sinsheim bei Heidelberg, jetzt Vorstand der höheren Bürgerschule zu Ettenheim, gemacht worden sind, worauf ich daher die für diesen, namentlich in der jetzigen bewegten Zeit bei der Beurtheilung des Werths der Grundstücke mit Berücksichtigung aller dabei in Betracht kommenden Elemente, wie Areal, Bonität, aufzuwendende Arbeitskraft u. dergl., gewiss der allgemeineren Beachtung in landwirthschaftlicher und überhaupt national-ökonomischer Rücksicht sehr werthen Gegenstand, sich etwa interessirenden Leser des Archivs

zu verweisen mir erlaube. Die am Schluss und in der Vorrede meiner Schrift bloss ganz in der Kürze angegebenen Verhältnisse, über deren Richtigkeit oder Unrichtigkeit Untersuchungen ganz ausserhalb des Zweckes meiner zunächst lediglich eine geometrische Tendenz habenden Schrift lagen, sind in der That auch nur deshalb von mir hingestellt worden, um zu einer sorgfältigen Untersuchung dieses practisch sehr wichtigen Gegenstandes zu veranlassen; und vielleicht wird das Archiv bald eine Abhandlung über denselben bringen. Eine andere ganz eben so einsichtsvolle Recension meiner Schrift von Herrn Böttcher in Rudolstadt, die von allen denen, welche dieselbe bei ihren etwaigen theoretischen oder praktischen Arbeiten über den mehr erwähnten Gegenstand zu benutzen beabsichtigen, wegen verschiedener sehr zu beachtender theils allgemeiner, theils specieller Bemerkungen gleichfalls nicht unbeachtet gelassen werden darf, findet sich in einem der neuesten Hefte der Jahrbücher für Philologie und Pädagogik, das ich, — weil ich in diesem Augenblicke dazu nicht im Stande bin und diese Zeilen überhaupt nur aus dem Gedächtnisse schreibe, — seiner Nummer nach später noch gelegentlich angeben werde, und für jetzt nur dem geehrten Herrn Verfasser für seine höchst einsichtsvolle Beurtheilung verbindlichst zu danken, die hier sich dargebotene Gelegenheit nicht unbenutzt vorübergehen lassen will.

VIII.

Beitrag zur Theorie der quadratischen Formen.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

In den art. 213. und 214. der Disquisitiones arithmeticae findet man eine Lösung des Problems: „Zu beurtheilen, ob eine Form (F) von der Determinante D eine andere (f) von der Determinante Dee eigentlich einschliesst, oder nicht, und im ersten Falle alle eigentlichen Transformationen aus F in f zu berechnen.“

Nach der von Gauss hiezu angewandten Methode muss man vorerst alle die Formen (Ω) entwickeln, welche aus F durch die Transformation $m, k, 0, n$ entstehen, so dass m jedweden posi-

tiven Theiler von e, k jedwede zwischen den Grenzen 0 und $m-1$ incl. eingeschlossene ganze Zahl, n den Quotienten $\frac{e}{m}$ bedeutet. Hierauf hat man mit allen Formen Ω, deren Anzahl offenbar der Summe aller Theiler von e gleichkommt, den Versuch anzustellen, ob sie mit f eigentlich aequivalent sind, oder nicht, und nur diejenigen unter ihnen, Ω', Ω'', Ω''', etc., welche es wirklich sind, in Betracht zu ziehen. In Bezug auf die erste derselben Ω', welche aus F durch die Substitution m', k', 0, n' entstanden sein mag, stelle p, q, r, s jedwede eigentliche Transformation aus Ω' in f dar; man wird mehrere eigentliche Transformationen aus F in f unter der Form $m'p+k'r$, $m'q+k's$, $n'r$, $n's$ erhalten, und wenn man mit den übrigen Formen Ω'', Ω''', etc. ebenso verfährt, so gelangt man zu den sämmtlichen eigentlichen Transformationen aus F in f.

Man wird nicht verkennen, dass das angedeutete Verfahren in der Ausübung sehr weitläufig, in den meisten Fällen so gut wie unausführbar ist, und dies hat mir Veranlassung gegeben, eine andere Auflösung des obigen Problems zu suchen, welche sich in practischer Beziehung durch Kürze, in theoretischer durch mehrere Bemerkungen, zu welchen sie Gelegenheit giebt, zu empfehlen scheint.

Die Form F von der Determinante D sei (A, B, C), die Form f von der Determinante Dee sei (a, b, c). Wir nehmen zuvörderst an, dass F in f durch die eigentliche Substition α, β, γ, δ übergehe, und sehen zu, was daraus folgt. Man hat folgende Gleichungen:

$$[1] \ldots A\alpha\alpha+2B\alpha\gamma+C\gamma\gamma=a,$$
$$[2] \ldots A\alpha\beta+B(\alpha\delta+\beta\gamma)+C\gamma\delta=b,$$
$$[3] \ldots A\beta\beta+2B\beta\delta+C\delta\delta=c,$$
$$[4] \ldots\ldots \alpha\delta-\beta\gamma=e \ (e \text{ positiv und } >1).$$

Die Zahlen α und γ können ein grösstes gemeinschaftliches Maass n haben, welches positiv genommen wird, so dass $\alpha=n\alpha^0$, $\gamma=n\gamma^0$, α^0 und γ^0 relative Primzahlen sind; nach [4] wird n ein Theiler von e sein, oder wenn $e=nm$ gesetzt wird, so ist m eine ganze Zahl, und die Gleichung [4] reducirt sich auf $\alpha^0\delta-\beta\gamma^0=m$. Bestimmt man nun zwei andere Zahlen β^0, δ^0 so, dass $\alpha^0\delta^0-\beta^0\gamma^0=1$ wird, (was auf unendlich viele Arten möglich), so muss bekanntlich $\beta=\beta^0m+k\alpha^0$, $\delta=\delta^0m+k\gamma^0$ sein, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet, und man kann zugleich β^0, δ^0 so nehmen, dass k zwischen den Grenzen 0 und $m-1$ incl. enthalten ist. Substituirt man nun die für α, β, γ, δ gefundenen Werthe in [1], [2], [3], so kommt

$$[5] \ldots \begin{cases} A\alpha^0\alpha^0+2B\alpha^0\gamma^0+C\gamma^0\gamma^0=\dfrac{a}{nn}, \\ A\alpha^0\beta^0+B(\alpha^0\delta^0+\beta^0\gamma^0)+C\gamma^0\delta^0=\dfrac{bn-ak}{mnn}, \\ A\beta^0\beta^0+2B\beta^0\delta^0+C\delta^0\delta^0=\dfrac{cnn-2bkn+akk}{mmnn}. \end{cases}$$

Hieraus sieht man, dass $\frac{a}{nn}$, $\frac{bn-ak}{mnn}$, $\frac{cnn-2bkn+akk}{mmnn}$ ganze Zahlen sind, welche wir resp. durch A', B', C' bezeichnen, und dass die Form $F..(A, B, C)$ in die Form $F'..(A', B', C')$ durch die Substitution α^0, β^0, γ^0, δ^0, für welche $\alpha^0\delta^0-\beta^0\gamma^0=1$ ist, übergeht, folglich mit derselben eigentlich aequivalent ist. Aus den Werthen von A' und B' folgt, dass n in b aufgeht, setzen wir $b=nb'$, so folgt

$$A'=\frac{a}{nn},\; B'=\frac{b'-A'k}{m},\; C'=\frac{c-2b'k+A'kk}{mm};$$

und da $B'^2-A'C'=B^2-AC=D$, so kann C' auch aus der Formel $C'=\frac{B'B'-D}{A'}$ bestimmt werden, falls A' nicht verschwindet.

Aus diesen Betrachtungen ziehen wir den ersten Schluss: Bestimmt man alle die Theiler von e, nämlich n, deren Quadrate die Zahl a messen, und welche folglich wegen der Gleichung $bb-ac=Dee$ in b aufgehen, und findet $\left(\frac{e}{n}=m,\; \frac{a}{nn}=A',\; \frac{b}{n}=b'\right.$ gesetzt) für keinen derselben eine Zahl k unter m, die $\frac{b'-A'k}{m}$, $\frac{c-2b'k+A'kk}{mm}$ zu ganzen Zahlen macht, so ist die Form f unter der Form F nicht enthalten. Findet man aber Werthe von n und k, für welche alle diese Bedingungen erfüllt sind, so ist zu untersuchen, ob eine oder mehrere der resultirenden Formen (A', B', C') mit F eigentlich aequivalent sind, oder nicht; ergiebt sich keine solche Form, so ist f unter F nicht enthalten; findet sich wirklich eine (F'), so wird f von F eigentlich eingeschlossen.

Denn bedeutet α^0, β^0, γ^0, δ^0 eine eigentliche Transformation aus F in F', so sind die Gleichungen [5] vorhanden, und man findet, dass die Gleichungen [1] bis [4] durch die Werthe $\alpha=n\alpha^0$, $\beta=m\beta^0+k\alpha^0$, $\gamma=n\gamma^0$, $\delta=m\delta^0+k\gamma^0$ befriedigt werden, weshalb α, β, γ, δ eine eigentliche Transformation aus F in f sein wird.

Diese Resultate bahnen uns den Weg zur Auflösung des Problems: „Alle eigentlichen Transformationen der Form F in die Form f, welche unter jener eigentlich enthalten sein soll, zu finden.“

Man stelle alle möglichen, im Vorhergehenden charakterisirten, Formen (A', B', C') auf, und ziehe diejenigen unter ihnen, welche mit F eigentlich aequivalent sind, in Betracht; man bezeichne dieselben mit F', F'', F''', etc. Hierauf suche man alle eigentlichen Transformationen aus F in F', nämlich $\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \delta^0$; es entstehen auf diese Weise eben so viele eigentliche Transformationen aus F in f unter der Form $n\alpha^0$, $m\beta^0+k\alpha^0$, $n\gamma^0$, $m\delta^0+k\gamma^0$, und wenn man mit den übrigen Formen F'', F''', etc. ebenso verfährt, so wird man zu allen eigentlichen Transformationen aus F in f gelangen.

Die Richtigkeit dieser Auflösung erhellt aus dem Vorhergehenden. Man kann ferner zeigen, dass alle auf die obige Weise

bestimmten Transformationen unter einander verschieden sind. Dass zwei verschiedene Transformationen aus F in dieselbe Form F' nicht dieselbe Transformation aus F in f hervorbringen können, wird man sogleich bemerken. Es seien also α^0, β^0, γ^0, δ^0; $\alpha^{0'}$, $\beta^{0'}$, $\gamma^{0'}$, $\delta^{0'}$ Transformationen aus F in die verschiedenen Formen F', F'', zu den Werthen n', m', k' gehörend, welche die nämlichen Werthe von α, β, γ, δ geben. Dann ist $n\alpha^0 = n'\alpha^{0'} \ldots (1)$, $m\beta^0 + k\alpha^0 = m'\beta^{0'} + k'\alpha^{0'} \ldots (2)$, $n\gamma^0 = n'\gamma^{0'} \ldots (3)$, $m\delta^0 + k\gamma^0 = m'\delta^{0'} + k'\gamma^{0'} \ldots (4)$, $mn = m'n' = e \ldots (5)$. Aus (1) und (3) folgt $nn'(\alpha^0\gamma^{0'} - \gamma^0\alpha^{0'}) = 0$, folglich, da wir annehmen, dass n, n' nicht verschwinden, $\alpha^0\gamma^{0'} - \gamma^0\alpha^{0'} = 0$, aber α^0 und γ^0, so wie $\alpha^{0'}$ und $\gamma^{0'}$ relative Primzahlen, folglich $\alpha = \alpha^{0'}$, $\gamma = \gamma^{0'}$, mithin auch $n = n'$, $m = m'$; daher nach (2) und (4): $m(\beta^0 - \beta^{0'}) = (k' - k)\alpha^0$, $m(\delta^0 - \delta^{0'}) = (k' - k)\gamma^0$, folglich sind $(k' - k)\alpha^0$, $(k' - k)\gamma^0$, mithin auch $(k' - k)\alpha^0\delta^0$, $(k' - k)\beta^0\gamma^0$, also die Differenz $(k' - k)(\alpha^0\delta^0 - \beta^0\gamma^0) = k' - k$ durch m theilbar, was wegen $k < m$, $k' < m$ unmöglich ist. Deshalb ist $k' = k$, $\beta^0 = \beta^{0'}$, $\delta^0 = \delta^{0'}$, und die Formen F', F'' werden somit identisch.

Die vorhergehende Methode mag nun an einem Beispiel erläutert werden, welches zugleich nach der Gaussischen Methode behandelt werden soll, um den Unterschied beider deutlicher hervortreten zu lassen.

Es sei $F \ldots (A, B, C) = (2, 7, 15)$, wo $D = 19$; $f \ldots (a, b, c) = (-9, 12, 60)$, wo $bb - ac = 19.6^2$, also $e = 6$. Die gemeinschaftlichen Theiler von e und a sind 1, 3 und beider Quadrate gehen in a auf. Für $n = 1$, $m = 6$ kommt $A' = -9$, $b' = 12$, die Bedingung $b' - A'k \equiv 0 \pmod{m}$ giebt $k = 0, 2, 4$; $B' = 2, 5, 8$ resp.; $C' = \dfrac{B'B' - D}{A'} = \dfrac{-15}{-9}, \dfrac{6}{-9}, -5$; also kommt nur die eine Form $(A', B', C') = (-9, 8, -5)$. Man findet, dass sie mit F eigentlich aequivalent ist, und daraus durch die eigentliche Substitution $+3, -2, -1, +1$ hervorgeht; daher sind nach den bekannten Formeln Disq. Arithm. art. 162. p. 181. sämmtliche Transf. aus F in (A', B', C') begriffen in $3t - 6u$, $-2t - u$, $-t - u$, $t + 3u$, wo t, u alle Werthe bedeuten, welche der Gleichung $t^2 - 19u^2 = 1$ genügen. Hieraus folgen die zu den Werthen $n = 1$, $k = 4$ gehörenden Transformationen

$$[T] \ldots \alpha, \beta, \gamma, \delta = 3t - 6u,\ -30u,\ -t - u,\ 2t + 14u.$$

Für $n = 3$, $m = 2$ kommt $A' = -1$, $b' = 4$, $-k \equiv 4 \pmod{2}$, $k = 0$, $B' = 2$, $C' = 15$. Die Form $(-1, 2, 15)$ ist mit F eigentlich aequivalent, $+4, -25, -3, +19$ eine eigentliche Substitution, folglich alle Substitutionen in $4t + 17u$, $-25t - 110u$, $-3t - 13u$, $19t + 83u$ enthalten, daher die folgenden Transformationen aus F in f:

$$[T'] \ldots \alpha, \beta, \gamma, \delta = 12t + 51u,\ -50t - 220u,\ -9t - 39u,\ 38t + 166u.$$

Nach der Gaussischen Methode hat man folgende 12 Formen Ω, welche aus F durch die Substitutionen 1, 0, 0, 6; 2, 0, 0, 3; 2, 1, 0, 3; 3, 0, 0, 2; 3, 1, 0, 2; 3, 2, 0, 2; 6, 0, 0, 1; 6, 1, 0, 1; 6, 2, 0, 1; 6, 3, 0, 1; 6, 4, 0, 1; 6, 5, 0, 1 hervorgehen:

(2, 42, 540) (8, 42, 135) (8, 46, 179) (18, 42, 60) (18, 48, 90) (18, 54, 124)
(72, 42, 15) (72, 54, 31) (72, 66, 51) (72, 78, 75) (72, 90, 103) (72, 102, 135) *)

Von diesen Formen sind, wie der Versuch zeigt, nur die folgenden vier, welche den Substitutionen 6, 0, 0, 1; 6, 2, 0, 1; 6, 3, 0, 1; 6, 5, 0, 1 entsprechen, mit f eigentlich aequivalent: (72, 42, 15) (72, 66, 51) (72, 78, 75) (72, 102, 135), und man findet die sämmtlichen eigentlichen Transf. aus diesen Formen in f resp.

$$124T-1081U,\ 195T-1700U,\ -131T+1142U,\ -206T+1796U;$$
$$3905T-18788U,\ 6141T-53536U,\ -3051T+26598U,\ -4798T+41828U;$$
$$-T+U,\ T+24U,\ T+2U,\ -2T-28U;$$
$$16T-139U,\ 25T+120U,\ -9T+78U,\ -14T+124U;$$

wo T, U alle Werthe bedeuten, welche der Gleichung $T^2-76U^2=1$ Genüge leisten. Daraus resultiren endlich die folgenden vier Formeln, in denen alle eigentlichen Transformationen aus F in f begriffen sind:

$$[\tau]\ldots 744T-6486U,\ 1170T-10200U,\ -131T+1142U,\ -206T+1796U;$$
$$[\tau']\ldots 17328T-60732U,\ 27250T-237560U,\ -3051T+26598U,\ -4798T+41828U;$$
$$[\tau'']\ldots -3T+12U,\ 60U,\ T+2U,\ -2T-28U;$$
$$[\tau''']\ldots 51T-444U,\ 80T+1340U,\ -9T+78U,\ -14T+124U.$$

Wiewohl die erste Methode nur zwei allgemeine Formeln $[T]$, $[T']$ lieferte, während die zweite deren vier giebt, so giebt es doch keine in den letzten Formeln begriffenen Werthe, welche in den ersten nicht ebenfalls enthalten wären; es würde sich übrigens leicht zeigen lassen, dass die Formel $[T]$ die Formeln $[\tau]$ und $[\tau'']$, $[T']$ die Formeln $[\tau']$ und $[\tau''']$ zugleich umfasst. Dieser Nachweis darf dem Leser füglich überlassen werden.

Einige besondere Fälle, welche nicht selten vorkommen, verdienen noch besonders betrachtet zu werden.

1°. Es sei $a=0$, so dass $bb=Dee$, mithin D eine Quadratzahl hh ist, und $b=he$ gesetzt werden kann, wenn man das Zeichen von h so nimmt, dass es mit dem von b übereinkommt. Für diesen Fall ist nun $A'=0$, $B'=\frac{b}{mn}=h$, $C'=\frac{c-2b'k}{mm}$, folglich c durch m theilbar, oder $c=mc'$, mithin $C'=\frac{c'-2hk}{m}$. Die Con-

*) Wie man sich die Berechnung dieser Formen sehr erleichtern kann, wird der Erfahrene leicht finden.

gruenz $2hk \equiv c'$ (mod. m) ist nur lösbar, wenn $2h$ und m entweder relative Primzahlen sind, oder ihr grösstes gemeinschaftliches Maass ϑ die Zahl c' misst, und im letztern Falle lässt ϑ verschiedene Werthe von k unter m zu.

2°. Ist e gegen a prim, so hat n nur den einen Werth 1, und es kommt $A' = a$, $B' = \frac{b-ak}{e}$, $C' = \frac{B'B'-D}{a}$. Die Congruenz $ak \equiv b$ (mod. e) ist immer lösbar, und lässt nur einen Werth von k unter e zu; für diesen Werth, der durch k^0 bezeichnet werde, ist also $B' = \frac{b-ak^0}{e}$ eine ganze Zahl. Ferner wird behauptet, dass c' ebenfalls eine ganze Zahl wird. Denn es ist $eB' \equiv b$ (mod. a); multiplicirt man diese Congruenz mit f, und bestimmt diese Zahl so, dass $ef \equiv 1$ (mod. a), so kommt $B' \equiv bf$, $B'B'-D \equiv b^2f^2-D$ (mod. a). Da nun $bb-ac = Dee, b^2 \equiv Dee$, (mod. a) $b^2f^2 \equiv D(ef)^2 \equiv D$, so folgt $B'B'-D \equiv 0$ (mod. a), mithin $\frac{B'B'-D}{a}$ eine ganze Zahl. Dies führt zu dem allgemeinen

Theorem: Wenn e gegen a prim ist, und $f\ldots(a, b, c)$ eine Form von der Determinante Dee, so giebt es immer Formen $F\ldots(A, B, C)$ von der Determinante D, welche die Form f eigentlich einschliessen, aber sie sind alle der Form (a, B', C') eigentlich aequivalent, oder gehören in eine Klasse, indem $B' = \frac{b-ak}{e}$, k die Zahl unter e ist, welche $b-ak$ durch e theilbar macht*).

Beispiel. $F\ldots(A,B,C) = (3,2,5)$, $D = -11$; $f\ldots(a,b,c) = (44, 165, 1125)$, $bb-ac = -11 . 45^2$, also $e = 45$. Da e gegen a prim ist, so hat man $44k \equiv 165$ (mod. 45), $k = 15$, folglich A', B', C' resp. $= 44, -11, 3$. Die Form $(44, -11, 3)$ findet man mit F eigentlich aequivalent, und es giebt nur zwei eigentliche Transformationen, nämlich $-3, 1, -1, 0$; und $+3, -1, +1, 0$, daher auch nur zwei eigentliche Transformationen aus F in f, nämlich $-3, 0, -1, -15$; und $+3, 0, +1, +15$.

Die Zahl e hat die Theiler 1, 3, 5, 9, 15, 45; nach der Gaussischen Methode müsste man also $1+3+5+9+15+45 = 78$ Formen (Ω) aus der Form F durch die Substitutionen 1, 0, 0, 45; 3, 0, 0, 15; 3, 1, 0, 15 etc. herleiten, und jede derselben in Bezug auf ihre Aequivalenz mit f untersuchen — eine harte Probe für die Geduld des Rechners!

3°. Es sei a durch kein Quadrat theilbar, und ϑ das grösste gemeinschaftliche Maass zwischen a und e, $a = \vartheta a'$, $e = \vartheta e'$, so dass a' und e' relat. Primzahlen sein werden. Da nun $bb-ac = Dee$, so wird ϑ in bb aufgehen; aber ϑ ist durch kein Quadrat theilbar (da a keinen quadratischen Factor enthält), folglich geht ϑ in b auf, oder $b = \vartheta b'$. Daher kommt $\vartheta b'b' - a'c = D\vartheta e'e'$, $a'c$ durch ϑ theilbar; nun ist ϑ gegen a' prim (weil sonst $a = \vartheta a'$ einen quadratischen Factor enthielte), folglich c durch ϑ theilbar, oder $c = \vartheta c'$

*) Etwas Aehnliches gilt für den Fall, in welchem e gegen c prim ist.

und $b'b' - a'c' = De'e'$. Hieraus folgt, dass D quadratischer Rest von a' ist. Ist nun die Form f unter F enthalten, so dass sie daraus durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hervorgeht, folglich $A\alpha\alpha + 2B\alpha\gamma + C\gamma\gamma = a$ sein wird, wo α und γ relative Primzahlen sein müssen, indem a durch kein Quadrat theilbar, so ist $BB - AC = D$ quadratischer Rest von $a = \vartheta a'$ (Disquisitiones arithmeticae. Sect. V. art. 154), mithin auch Rest von ϑ. Daher das

Theorem: Es sei $f \ldots (a, b, c)$ eine Form von der Determinante Dee, a durch kein Quadrat theilbar, ϑ das grösste gemeinschaftliche Maass von a und e. Ist dann D ein Nichtrest von ϑ, so kann keine Form von der Determinante D die Form f einschliessen.

Es werde nun angenommen, dass D Rest von ϑ sei. Nach dem Vorhergehenden ist von selbst $a = \vartheta a'$, $e = \vartheta e'$, $b = \vartheta b'$, $c = \vartheta c'$ (a' und e' relat. Primzahlen). Die Congruenz $ak \equiv b \pmod{e}$*) welche mit $a'k \equiv b' \pmod{e'}$ zusammenfällt, ist immer lösbar, und lässt ϑ verschiedene Werthe von k unter e zu, nämlich k', $k' + e'$, $k' + 2e', \ldots k' + (\vartheta - 1)e'$, indem k' den positiven Werth von k unter e' bedeutet. Für jeden dieser Werthe ist $B' = \frac{b' - a'k}{e'}$ eine ganze Zahl. Man hat nun $e'B' \equiv b' \pmod{a'}$, folglich, wenn man mit f multiplicirt, und $e'f \equiv 1 \pmod{a'}$ macht, $B' \equiv b'f$, $B'B' - D \equiv b'^2 f^2 - D \pmod{a'}$. Nun war $b'^2 \equiv De'^2 \pmod{a'}$, folglich $b'^2 f^2 \equiv D$, also $B'B' - D \equiv 0 \pmod{a'}$ für jeden der obigen Werthe von k. Im Allgemeinen aber werden diese Werthe von k nicht sämmtlich geeignet sein, um $B'B' - D$ durch $\vartheta a'$ theilbar zu machen, und die dieser Bedingung wirklich genügenden Werthe ergeben sich durch folgendes Verfahren:

Da vorausgesetzt worden, dass D Rest von ϑ ist, so hat die Congruenz $zz \equiv D \pmod{\vartheta}$ mehrere verschiedene Wurzeln r, r', r'', etc. Sind diese Werthe sämmtlich bestimmt, so suche man z. B. in Bezug auf den ersten derselben den kleinsten positiven Werth von k, welcher der Congruenz $a'k \equiv b' - re' \pmod{\vartheta e'}$ Genüge leistet**), und verfahre ebenso in Bezug auf die Werthe, r', r'' etc., so werden die resultirenden Werthe von k alle möglichen sein, für welche $B' = \frac{b' - a'k}{e'}$, $C = \frac{B'B' - D}{a}$ ganze Zahlen werden. Denn zuerst ist offenbar B' eine ganze Zahl, sodann kommt $e'B' \equiv re' \pmod{\vartheta e'}$, oder $B' \equiv r \pmod{\vartheta}$, $B'^2 \equiv r^2 \equiv D \pmod{\vartheta}$; da nun $B'^2 - D$ auch durch a' theilbar ist (was vorher bewiesen), und ϑ gegen a' prim, so wird $B'^2 - D$ durch $\vartheta a'$ theilbar sein. Ist endlich k so beschaffen, dass B' und C' ganze Zahlen werden, so muss es der Congruenz $a'k \equiv b' - re' \pmod{\vartheta e'}$ Genüge leisten, so dass r eine Wurzel der Congruenz $zz \equiv D \pmod{\vartheta}$ bedeutet, wie man leicht finden wird, folglich hat man auch *alle* geeigneten Werthe von k erhalten.

Dies Resultat ist in folgendem Theorem enthalten:

Es sei $f \ldots (a, b, c)$ eine Form von der Determinante

---

*) Da a durch kein Quadrat theilbar, so muss $n = 1$ sein.

**) $\vartheta e'$ ist nämlich prim gegen a'.

Dee, a durch kein Quadrat theilbar, ϑ das grösste gemeinschaftliche Maass zwischen a und e, welches folglich ebenfalls keinen quadratischen Factor enthalten wird. Ist nun D quadratischer Rest von ϑ, und man bezeichnet die verschiedenen Werthe von z, welche der Congruenz $zz \equiv D (\text{mod.} \vartheta)$ Genüge leisten, durch r, r', r'', etc., ihre Anzahl durch i, so existiren immer i Formen (a, B', C') von der Determinante D, welche so beschaffen sind, dass jede Form F von der nämlichen Determinante, welche f eigentlich einschliesst, einer (oder mehreren) derselben eigentlich aequivalent ist. Setzt man $a = \vartheta a'$, $e = \vartheta e'$, $b = \vartheta b'$, so werden $\frac{b' - a'k}{e'}$, $\frac{b' - a'k'}{e'}$, $\frac{b' - a'k''}{e'}$ etc. die sämmtlichen Werthe von B' sein, indem k, k', k'', etc. die kleinsten positiven Werthe bedeuten, welche den Congruenzen $a'k \equiv b' - re' (\text{mod.} \vartheta e')$, $a'k' \equiv b' - r'e'$ $(\text{mod.} \vartheta e')$, $a'k'' \equiv b' - r''e' (\text{mod.} \vartheta e')$ etc. Genüge leisten.

Beispiel. $(a, b, c) = (35, 10, 20)$, $bb - ac = -6.10^2$, $e = 10$, $D = -6$. Hier ist $\vartheta = 5$, $a' = 7$, $b' = 2$. $e' = 2$. Die Congruenz $zz \equiv -6 (\text{mod.} 5)$ giebt r, $r' = 2, 3$; $7k \equiv -2$ (mod. 10) giebt $k = 4$; $7k' \equiv -4$ (mod. 10) giebt $k' = 8$; daher $B' = -13, -27$; $C' = 5, 21$. Alle Formen von der Determinante -6 also, welche die Form $(35, 10, 20)$ von der Det. -600 eigentlich einschliessen, sind mit einer der Formen $(35, -13, 5)$, $(35, -27, 21)$ eigentlich aequivalent, und da man diese unter einander eigentlich aequivalent findet, so werden alle jene Formen in eine Klasse gehören, deren Repräsentant $(3, -1, 4)$ ist, wie man leicht findet.

Aus dem Vorhergehenden ersieht man, dass es überhaupt immer eine endliche Anzahl von Formen der Determinante D giebt, deren einer wenigstens jede Form der nämlichen Determinante eigentlich aequivalent sein muss, wenn sie eine gegebene Form von der Determinante Dee eigentlich einschliesst, und man kann alle einschliessenden Formen in ebenso viele Klassen theilen, so viele verschiedene Klassen es giebt, welchen die sämmtlichen Formen (A', B', C'), die wir oben aufzustellen gelehrt haben, angehören.

Zum Schluss wird bemerkt, dass, wenn man den Fall, in welchem die Determinante $bb - ac$ verschwindet (wobei $BB - AC$ Null oder nicht Null sein kann), nach unserer Methode einer besondern Betrachtung unterwirft, man zu denselben Resultaten gelangt, welche Gauss im art. 215 der Disquisitiones arithmeticae entwickelt, und an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lassen.

IX.

Berechnung der Fehler der Horizontalwinkel bei geneigter Ebene des Messtisches oder des Horizontalkreises am Winkelmesser.

Von

Herrn Dr. Wilh. Matzka,

k. k. Professor der Mathematik und prakt. Geometrie an der ständ. techn. Lehranstalt zu Prag.

1.

Die Lehrer der praktischen Geometrie sind über die Grösse des Fehlers in den Horizontalwinkeln, welche eine vom Horizonte abweichende Stellung der Ebene des Messtisches oder des Horizontalkreises an einem Winkelmesser verursacht, nicht einig; was wohl zumeist nur daher rührt, dass sie zu wenig genäherte Auflösungen dieser Aufgabe aufstellten, die jedoch gerade bei jenen Höhenwinkeln der Visuren unrichtig wurden, welche bei dem Gebrauche des Messtisches oder Theodoliten am gewöhnlichsten vorkommen. Jene Ungewissheit und die eigenthümlichen analytischen Schwierigkeiten dieser Aufgabe, welche die Bestimmung des möglich grössten Fehlers mit sich führt, gaben ihr in meinen Augen einen besonderen Reiz, der mich antrieb, sie möglichst umständlich und scharf zu lösen.

2.

Die Ebene eines Messtisches oder Horizontalkreises, von denen jener die Winkel zeichnet, dieser sie misst, sei gegen die Horizontalebene unter einem gewissen Winkel ε geneigt; wesswegen sie diese in einer bestimmten Geraden CO (Taf. II. Fig. 1.)

schneidet. Eine Visur CM, mittels eines Diopters oder Fernrohrs, auf den Horizont selbst (winkelrecht) projicirt, falle in die eigentlich geforderte und richtige Gerade CP; während sie auf die geneigte Messtischebene projicirt in die fast immer unrichtige Gerade CQ zu liegen komme. Danach werden im Allgemeinen diese Projectionen mit jener fixen Horizontallinie CO ungleiche Winkel $OCP=\alpha$ und $OCQ=\alpha'$ machen, deren Unterschied

$$(1) \qquad \alpha'-\alpha=\Delta\alpha$$

der eigentlich gesuchte Fehler im Horizontalwinkel α ist.

Zur Bestimmung desselben legen wir um den Scheitel C der betrachteten Winkel eine Kugelfläche; diese werde von dem Horizonte in dem Kreisbogen OA, von der Messtischebene im Bogen OB und von den die Visur CM projicirenden Ebenen in MP und MQ geschnitten. Danach ist $AOB=\varepsilon$, $OP=\alpha$, $OQ=\alpha'$ und der Höhenwinkel $MCP=MP$ sei $=h$.

Zieht man zur Hilfe noch den Kreisbogen OM, und setzt $90^0-OM=k$, $90^0-MOA=\eta$; so gibt das an P rechtwinklige Kugeldreieck OPM

$$(2) \qquad \tang\eta=\sin\alpha\cot h$$

und

$$\tang\alpha=\cot k\sin\eta,$$

das bei Q rechtwinklige Kugeldreieck OQM aber

$$\tang\alpha'=\cot k\sin(\eta+\varepsilon).$$

Eliminirt man aber aus den beiden letzten Gleichungen den Hilfsbogen k durch Theilung, so findet man

$$(3) \qquad \frac{\tang\alpha'}{\tang\alpha}=\frac{\sin(\eta+\varepsilon)}{\sin\eta} \text{ oder } \tang\alpha'=\frac{\sin(\eta+\varepsilon)}{\sin\eta}\tang\alpha.$$

Man wird demnach aus α und h nach (2) zunächst den Hilfswinkel η, dann hieraus und aus ε nach (3) den unrichtigen Horizontalwinkel α' und endlich nach (1) seinen Fehler $\Delta\alpha$ berechnen; wobei man die Logarithmen vortheilhaft benutzen kann, weil ε immer nur sehr klein ist, also η und $\eta+\varepsilon$, daher auch α und α', in der goniometrischen Tafel nicht weit von einander abstehen.

Will man α' unmittelbar durch die Angaben (Daten) ε, α, h ausdrücken, so wird man aus (2) und (3) η eliminiren; wonach man findet

$$(4) \qquad \tang\alpha'=\cos\varepsilon\tang\alpha+\frac{\sin\varepsilon\tang h}{\cos\alpha}.$$

Diese Gleichung erhält man unmittelbar und einfacher, wenn man noch den grössten Kreis $ABA'B'$ der Pole K und L des Horizontes und der Messtischebene benützt. Denn da ist im

Kugeldreiecke KLM, wie leicht nachweisbar, $KL = AB = \varepsilon$, $MK = 90^0 - h$, $MKL = A'O + OP = 90^0 + \alpha$ und $KLM = OB - OQ = 90^0 - \alpha'$; daher

$$\cos\varepsilon \cos(90^0 + \alpha) = \sin\varepsilon \cot(90^0 - h) - \sin(90^0 + \alpha) \cot(90^0 - \alpha'),$$

folglich wieder

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{tang}\alpha' = \cos\varepsilon \operatorname{tang}\alpha + \frac{\sin\varepsilon}{\cos\alpha} \operatorname{tang} h.$$

3.

Suchen wir noch den unmittelbaren Ausdruck von $\Delta\alpha$, so finden wir

$$\operatorname{tang}\Delta\alpha = \operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha' \operatorname{tg}\alpha},$$

daher nach der Substitution für $\operatorname{tg}\alpha'$, wenn wir abkürzend

$$\text{(5)} \qquad \sin\varepsilon \operatorname{tang} h - \operatorname{sinv}\varepsilon \sin\alpha = u$$

setzen,

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{tang}\Delta\alpha = \frac{u\cos\alpha}{1 + u\sin\alpha}.$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man mit Leichtigkeit in Betreff der algebraischen Beziehungszeichen der vorkommenden Grössen Folgendes:

1. Wenn die Winkel α und h zugleich ihre Vorzeichen ändern, erfolgt dasselbe auch bei u, dagegen bleiben die Vorzeichen von $\cos\alpha$ und $u\sin\alpha$ ungeändert, mithin ändert sich das Vorzeichen des Fehlers $\Delta\alpha$.

2. Wenn der Winkel α in seinen Supplementswinkel $180^0 - \alpha$ übergeht, bleiben $\sin\alpha$ und u ungeändert, aber $\cos\alpha$, daher auch $\Delta\alpha$, ändern ihr Vorzeichen.

Man wird demnach wie gewöhnlich den Neigungswinkel ε nur spitz und positiv, die Winkel α und h zwar auch nur spitzig, aber eben sowohl positiv als negativ voraussetzen.

4.

Da die Neigung ε der Messtischplatte nur immer sehr klein ist, so wird man leicht versucht, $\Delta\alpha$ in eine nach den Potenzen von ε aufsteigende Reihensumme zu entwickeln. Thut man dies, so findet man, wenn man den Gehren (d. i. den Winkel,

dessen bestimmender Kreisbogen so lang wie sein Halbmesser ist) durch Γ bezeichnet, und zur Abkürzung tang$h = a$ setzt, zunächst

$$u = a\frac{\varepsilon}{\Gamma} - \frac{1}{2}\sin\alpha.\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^2 - \frac{1}{6}a\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^3 + \frac{1}{24}\sin\alpha.\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^4 + \frac{1}{120}a.\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^5 \ldots,$$

$$\begin{aligned}\text{tang}\,\varDelta\alpha = \frac{\varepsilon}{\Gamma}a\cos\alpha - \left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^2\left(a^2+\frac{1}{2}\right)\sin\alpha\cos\alpha \\ + \left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^3\left(a^2\sin\alpha^2 + \sin\alpha^2 - \frac{1}{6}\right)a\cos\alpha \\ + \left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^4\left[-a^4\sin\alpha^2 + a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\sin\alpha^2\right) - \frac{1}{4}\sin\alpha^2 + \frac{1}{24}\right]\sin\alpha\cos\alpha \\ + \left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^5\left[a^4\sin\alpha^4 - a^2\left(\frac{1}{2} - 2\sin\alpha^2\right) + \frac{3}{4}\sin\alpha^4 - \frac{1}{4}\sin\alpha^2 + \frac{1}{120}\right]a\cos\alpha \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und sofort

$$\begin{aligned}(7)\qquad \varDelta\alpha = \varepsilon.a\cos\alpha - \varepsilon.\frac{\varepsilon}{\Gamma}\left(a^2+\frac{1}{2}\right)\sin\alpha\cos\alpha \\ + \varepsilon.\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^2\left[a^2.\frac{4\sin\alpha^2 - 1}{3} + \sin\alpha^2 - \frac{1}{6}\right]a\cos\alpha \\ + \varepsilon.\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^3\left[a^4(1-2\sin\alpha^2) - a^2\left(2\sin\alpha^2 - \frac{5}{6}\right) - \frac{1}{4}\sin\alpha^2 + \frac{1}{24}\right]\sin\alpha\cos\alpha \\ + \varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^4\left[a^4\frac{6\sin\alpha^4 - 2\sin\alpha^2 + 1}{5} + a^2\left(2\sin\alpha^4 - \frac{1}{2}\sin\alpha^2\right) + \frac{3}{4}\sin\alpha^4 - \frac{1}{4}\sin\alpha^2 + \frac{1}{120}\right]a\cos\alpha \\ + \ldots\ldots\end{aligned}$$

Ich habe diese Reihensumme in so viel Gliedern entwickelt, um ersichtlich zu machen, welchen namhaften Einfluss auf den Fehler $\varDelta\alpha$ des Horizontalwinkels der Höhenwinkel h der Visur äussert, und wie unfügsam diese Glieder gestaltet sind, so dass man, selbst wenn man nur noch das zweite Glied ausrechnen wollte, weit mehr zu thun hätte als wenn man die ganz scharfe Rechnung nach den Gleichungen (2), (3) und (1) ausführen möchte. *)

---

*) Dieser Fall tritt auch bei manchen anderen Reihenentwickelungen und näherungsweisen Rechnungsformen der praktischen Geometrie ein. Zumeist sucht man dabei die Anwendung der Logarithmen oder goniometrischen Functionen zu umgehen, die (so wie die Decimalbrüche),

5.

In den geschriebenen Heften der Vorträge des Herrn Professors **Stampfer** über praktische Geometrie am polytechnischen Institute zu Wien, finde ich in zwei Exemplaren anstatt des zweigliedrigen Factors $a^2 + \frac{1}{2}$ des zweiten Gliedes nur den eingliedrigen $\frac{1}{2}$. Dies rührt von einer unrichtig eingeleiteten Abkürzung her, indem er zwar richtig $\sin\Delta\alpha \doteq \Delta\alpha$, aber unrichtig $\cos\Delta\alpha \doteq 1$ setzt, also in der Grundanlage zwar die **zweiten** Potenzen von $\Delta\alpha$ und ε vernachlässigt, in dem Endergebnisse sie aber gleichwohl noch mit bestimmt.

Er macht ferner die Unterschiede zweier solcher Fehler $\Delta\alpha$, um den Fehler des Winkels zweier Visurprojectionen auf dem Messtische zu bestimmen. Allein weil hierbei sowohl zweierlei α als auch zweierlei h vorkommen, muss dieses Unterschiedes Ausdruck sehr complicirt ausfallen. Zudem kommt es doch hauptsächlich blos darauf an, den **äussersten** Betrag des Fehlers $\Delta\alpha$ zu erfahren. Desswegen ziehe ich es vor, zuerst zu erforschen, wie jedes einzelne der Rechnungselemente ε, h, α auf diesen Fehler $\Delta\alpha$ einwirkt, und dann, weil derselbe in Bezug auf sämmtliche Werthe von α ein **Grösstes** zulässt, dieses zu bestimmen.

Dabei bleibt aber noch zu erwägen, dass man den **möglich grössten Fehler des Winkels zweier Visurprojectionen** dem Doppelten dieses grössten Fehlers $\Delta\alpha$ gleich halten müsse, wenn der einen Visur derjenige Winkel α, für den dieses Grösste von $\Delta\alpha$ eintritt, der anderen Visur aber der Winkel $180-\alpha$ zugehört; was durch Nr. 2. in Art. 3. gerechtfertiget ist.

6.

I. **Wächst der Neigungswinkel ε allein**, so muss, weil mit α und h vermöge der Gleichung (2) auch η unverändert bleibt, in Gleichung (3) das fast immer positive Verhältniss $\sin(\eta+\varepsilon):\sin\eta$, daher auch das ihm gleiche $\tan(\alpha+\Delta\alpha):\tan\alpha$, desto mehr sich verändern, je mehr ε wächst; darum muss auch der absolute Betrag des Fehlers $\Delta\alpha$ um so mehr zunehmen. — Dasselbe zeigt Taf. II. Fig. 2. Denn bleibt α beständig, so bleibt P und PK an seiner Stelle; bleibt dann auch noch h beständig, so ist auch der Punkt M fest. Wächst nun $\varepsilon = AOB$, so wachsen auch die mit ihm gleichgradigen Bogen AB und KL, der Punkt L entfernt

---

trotz der Möglichkeit einer leicht verständlichen Darstellung, leider noch immer vielen Praktikern und Zifferrechnern mathematische Schreckbilder sind.

sich von K, also nimmt im Dreieck KLM der Winkel an L ab, daher auch der ihm gleichgradige Bogen BQ; folglich wächst der Bogen $OQ = \alpha' = \alpha + \Delta\alpha$, und sonach auch der Fehler $\Delta\alpha = OQ - OP$.

II. Wächst der absolute Betrag des Höhenwinkels h von 0 bis 90°, so wächst in Gleichung (4) auch jener des Schlussgliedes und desto mehr ändert sich auch $\tang\alpha'$ und damit $\alpha' = \alpha + \Delta\alpha$, daher auch der Betrag des Fehlers $\Delta\alpha$ selbst. — Nach Taf. II. Fig. 2. muss, wenn $\varepsilon = AOB$ beständig bleibt, mit OA auch OB, daher mit K auch L unverrückt an seiner Stelle bleiben. Bleibt sich nun auch $\alpha = OP$ gleich, so bleibt auch der Quadrant PK fest; daher wenn $h = PM$ wächst, muss M von P nach K hin sich bewegen, daher wird der Punkt Q von O sich entfernen, also $OQ = \alpha + \Delta\alpha$ wachsen und sofort auch der Fehler $\Delta\alpha = OQ - OP$ sich vergrössern. — Dies bestätigt endlich auch die Gleichung (6), wenn man ihr die Form

$$\tang\Delta\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha + \frac{1}{u}}$$

ertheilt, weil nach Gleichung (5) mit wachsendem h auch u wächst, folglich $\frac{1}{u}$ abnimmt, daher $\tang\Delta\alpha$ und $\Delta\alpha$ sich vergrössert.

III. Wächst endlich der Horizontalwinkel α allein, und zwar von $-90°$ bis $+90°$, so wird für diese beiden Grenzwerthe, $\cos\alpha = 0$, daher nach Gleichung (6) die $\tang\Delta\alpha$ also auch $\Delta\alpha = 0$. — Dies erhellet auch aus Taf. II. Fig. 2. Denn für $OP = -90° = OA'$ wird $OQ = OB' = -90°$ und für $OP = +90° = OA$ wird $OQ = OB = +90°$, daher jedesmal $OQ - OP = \Delta\alpha = 0$. — Für $\alpha = 0$ wird $\tang\Delta\alpha = u = \sin\varepsilon \tang h$. Mithin muss es zwischen $\alpha = -90°$ und $\alpha = +90°$ ein Grösstes von $\Delta\alpha$ geben. Mit der Aufsuchung dieses Grössten werden wir uns fortan beschäftigen, da es hinreicht, nur den grössten Fehler $\Delta\alpha$ zu kennen, dem man bei einer gewissen Neigung ε der Messtisch- oder Kreisebene ausgesetzt ist.

7.

Bestimmen wir nun, da mit $\Delta\alpha$ auch $\tang\Delta\alpha$ zugleich stetig wächst und abnimmt, von $\tang\Delta\alpha$ das nach α genommene Differentialverhältniss, und setzen es gleich Null; so erhalten wir gemäss den Gleichungen (6) und (5)

$$(1 + u\sin\alpha)\left(\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha} - u\sin\alpha\right) - u\cos\alpha\left(\sin\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha} + u\cos\alpha\right) = 0$$

oder reducirt

$$\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}-u(u+\sin\alpha)=0,$$

und nach der Gleichung (5)

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}=-(1-\cos\varepsilon)\cos\alpha=-\operatorname{sinv}\varepsilon\cos\alpha,$$

daher

$$u^2+u\sin\alpha+\operatorname{sinv}\varepsilon\,.\,\cos\alpha^2=0. \tag{8}$$

Diese Gleichung in Verbindung mit (5) gibt denjenigen Werth der Hilfszahl u und des Winkels α, für den der Fehler $\Delta\alpha$ am grössten ausfällt. Leichter ist es aus ihnen u zu bestimmen, indem man $\sin\alpha$ eliminirt, wodurch man erhält:

$$u^2-3u\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}h=2\sin\frac{\varepsilon^2}{2}(\operatorname{tg}\frac{\varepsilon^2}{2}-\operatorname{tg}h^2), \tag{9}$$

und, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin h}=n \tag{10}$$

setzt,

$$u=\frac{3\pm\sqrt{1+8n^2}}{2}\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tang}h.$$

Das richtige Vorzeichen der Wurzel findet man aus folgender Betrachtung. Nach Gleichung (5) ist

$$\operatorname{sinv}\varepsilon.\sin\alpha-\sin\varepsilon\operatorname{tang}h+u=0,$$

daher, wenn man für u substituirt, nach einigen einfachen Reductionen

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\alpha\cot h-\cos\frac{\varepsilon}{2}+\frac{3\pm\sqrt{1+8n^2}}{4\cos\frac{1}{2}\varepsilon}=0.$$

Für $\lim\varepsilon=0$ erhält man nun auch $\lim n=0$ und

$$-1+\frac{3\pm1}{4}=0,$$

welche Gleichung aber lediglich bei dem oberen Vorzeichen bestehen kann. Mithin ist

$$(11) \qquad u = \frac{3+\sqrt{1+8n^2}}{2} \operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tang} h.$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$(12) \qquad \frac{\sqrt{1+8n^2}+1}{2} = v,$$

so ist, weil ε also auch n von Null verschieden vorausgesetzt wird, $v > 1$ und

$$(13) \qquad u = (v+1) \operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tang} h.$$

Schreibt man nun diesen Ausdruck in dem aus der Gleichung (5) folgenden

$$(14) \qquad \sin\alpha = \frac{\sin\varepsilon \operatorname{tang} h - u}{\sin v\,\varepsilon},$$

so erfolgt

$$\sin\alpha = \frac{\sin\varepsilon - (v+1) \operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}}{2\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2} . \operatorname{tang} h$$

$$= \frac{2\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2 - (v+1)}{\sin\varepsilon} . \operatorname{tang} h,$$

oder, weil $v > 1 > \cos\varepsilon$ ist,

$$(15) \qquad \sin\alpha = -\frac{v-\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon} \operatorname{tang} h,$$

woraus erhellet, dass h und α jederzeit entgegengesetzte Beziehungszeichen haben.

8.

Ein anderer Ausdruck für $\sin\alpha$ ergibt sich folgendermassen. Es ist nach Gleichung (14)

$$\sin\alpha = \cot\frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tang} h - \frac{u}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2} = \cot\frac{1}{2}\varepsilon^2 + 1\right)$$

$$= -\frac{u}{2} - \cot\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{u}{2}\cot\frac{\varepsilon}{2} - \operatorname{tang} h\right),$$

daher, wenn man das letztere u nach (13) ausdrückt,

$$-\sin\alpha-\frac{u}{2}=\cot\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tang}h\left(\frac{v-1}{2}\right).$$

Setzt man demnach

$$(16) \qquad (v-1)\operatorname{tang}h\cot\frac{\varepsilon}{2}=(v-1)\frac{\operatorname{tang}h}{\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}}=t,$$

so ist

$$(17) \qquad -\sin\alpha=\frac{t+u}{2}.$$

Für t lässt sich noch ein anderer bemerkenswerther Ausdruck aufstellen. Es ist nach Gleichung (12)

$$(2v-1)^2=1+8n^2,$$

daher nach der Annahme (10)

$$v(v-1)=2\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}{\sin h^2},$$

folglich

$$v-1=\frac{2}{v}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}{\sin h^2},$$

und sofort

$$t=\frac{2}{v}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\cos\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin h\cos h}$$

oder

$$(18) \qquad t=\frac{2}{v}\cdot\frac{\sin\varepsilon}{\sin 2h}.$$

Dabei ist das Verhältniss

$$\frac{u}{t}=\frac{v+1}{v-1}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2=\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{2}{v-1}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2$$
$$=\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{v\sin h^2}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2}$$

$$= \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{\sin h(\sin h + \sqrt{\sin h^2 + 8\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2})}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Ist nun nicht allein ε — wie immer — sondern auch noch h sehr klein, so fällt dies Verhältniss $u:t$ offenbar so klein aus, dass man u in Vergleich gegen t vernachlässigen, folglich näherungsweise

$$(19) \qquad -\sin\alpha \doteq -\frac{t}{2} = \frac{v-1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tang} h}{\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{\sin\varepsilon}{v\sin 2h}$$

setzen darf.

9.

Hat man u und α zur Hilfe berechnet, so bestimmt man den gesuchten möglich grössten Fehler $\Delta\alpha$ selbst nach der Gleichung

$$(6) \qquad \operatorname{tang}\Delta\alpha = \frac{u\cos\alpha}{1 + u\sin\alpha}$$

Nun ist u vermöge der Gleichung (5) von derselben Ordnung der Kleinheit wie ε, folglich $u\sin\alpha$ gewiss noch kleiner und sofort der $\log(1 + u\sin\alpha)$ fast immer so klein, dass er ausser Acht gelassen werden darf. Besitzt man eine logarithmisch-goniometrische Tafel, in welcher die kleinsten Winkel von Secunde zu Secunde vorschreiten, so möchte die Berechnung von $\Delta\alpha$ wohl am einfachsten nach Gleichung (6) erfolgen.

Dividirt man im zweiten Theile von (6), so wird

$$(20) \qquad \operatorname{tang}\Delta\alpha = \underset{\mathrm{I}}{u\cos\alpha} - \underset{\mathrm{II}}{u\cos\alpha \,.\, u\sin\alpha} + \ldots\ldots$$
$$= u\cos\alpha - \mathrm{I}.\, u\sin\alpha + \ldots,$$

wo man nur höchst selten von dem berichtigenden zweiten Gliede Gebrauch machen wird.

Besitzt man jedoch keine wie oben beschriebene goniometrische Tafel, so ist es besser $\Delta\alpha$ selbst nach der Formel

$$\frac{\Delta\alpha}{\Gamma} = \operatorname{tang}\Delta\alpha - \frac{1}{3}\operatorname{tg}\Delta\alpha^3 + \frac{1}{5}\operatorname{tg}\Delta\alpha^5 - \ldots\ldots$$

zu entwickeln, wonach man erhält

$$(21) \qquad \Delta\alpha = \underset{\mathrm{I}}{\Gamma u\cos\alpha} - \underset{\mathrm{II}}{I.\, u\sin\alpha} + \ldots\ldots$$

Da wo der Winkel α zureichend klein ist, kann man die Gleichung (6) auch dadurch umgestalten, dass man $\cos\alpha = 1-2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$ setzt. Danach ergiebt sich

$$\operatorname{tang}\Delta\alpha = u - \frac{u + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha}{1 + u\sin\alpha} \cdot u\sin\alpha .$$

Ist nun das zweite Glied wegen der Kleinheit von α schon genügend klein, so kann man es vernachlässigen, folglich näherungsweise setzen

$$\text{(22)} \qquad \operatorname{tang}\Delta\alpha \doteq u = (v+1)\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tang}h$$

und

$$\text{(23)} \qquad \Delta\alpha \doteq \Gamma u = \Gamma(v+1)\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tang}h .$$

10.

Bevor wir in unserer Untersuchung weiter schreiten, betrachten wir gewisse ausgezeichnete Höhenwinkel h, auf die uns theils die Natur der Aufgabe, theils die Annahme (10) aufmerksam macht, nemlich $h=0$, $\frac{\varepsilon}{2}$ und $90°$.

I. Für $h = \pm 0$

wird n und $v=\infty$, aber $\operatorname{tang}h = \pm 0$, daher in (13) und (15) $v\operatorname{tang}h = \pm\infty . 0$. Es ist jedoch gemäss (12) und (10)

$$v\operatorname{tang}h = \frac{\sqrt{\sin h^2 + 8\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2} + \sin h}{2\cos h}$$

und für $h = \pm 0$

$$= \pm\sqrt{2}.\sin\frac{1}{2}\varepsilon ,$$

daher nach (13) und (15)

$$u = \pm\sin\frac{1}{2}\varepsilon\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon . \sqrt{2} ,$$

$$\text{(24)} \qquad \sin\alpha = \mp \frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin\varepsilon}\sqrt{2} = \mp \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{2}}.$$

Aus dem Letzteren findet man

$$\cos\alpha = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon} \cdot \sqrt{\frac{\cos\varepsilon}{2}},$$

$$\text{(25)} \qquad \tang\alpha = \mp \frac{1}{\sqrt{\cos\varepsilon}};$$

$$\cos 2\alpha = -\tang\tfrac{1}{2}\varepsilon^2. \quad \sin 2\alpha = \mp \frac{\sqrt{\cos\varepsilon}}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2};$$

$$\tang 2\alpha = \pm \frac{\sqrt{\cos\varepsilon}}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}.$$

Sofort ist

$$\tang\Delta\alpha = \pm \frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}{\sqrt{\cos\varepsilon}},$$

daher

$$\tang\Delta\alpha . \tang 2\alpha = 1,$$

und also

$$\pm 2\alpha \pm \Delta\alpha = \pm\alpha \pm \alpha' = 90^0.$$

Demnach dürfte zur Berechnung von $\Delta\alpha$ am geeignetesten sein

$$\pm \sin\Delta\alpha = \cos \pm 2\alpha = -\tang\tfrac{1}{2}\varepsilon^2$$

oder

$$\text{(26)} \qquad \sin\Delta\alpha = \mp \tang\tfrac{1}{2}\varepsilon^2,$$

oder in eine Reihe entwickelt

$$\text{(27)} \qquad \mp\Delta\alpha = \frac{\varepsilon^2}{4\Gamma} + \frac{\varepsilon^4}{4\Gamma^3} + \ldots$$

Wegen der Kleinheit von ε ist in (24) und (25)

$\cos\frac{\varepsilon}{2} \doteq 1$, $\cos\varepsilon \doteq 1$, daher $\sin\alpha \doteq \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan\alpha \doteq \pm 1$, und sofort

höchst nahe $\alpha = \mp 45^0$. Wenn demnach $h = \pm 0$, folglich die Visur horizontal ist, so fällt sowohl für $\alpha = -45^0$ als für $\alpha = +45^0$, also an den Halbirungslinien der 4 horizontalen Quadranten, der Fehler $\Delta\alpha$ am grössten aus, und dieser ist sehr nahe der zweiten Potenz des Neigungswinkels der Messtischebene proportional.

Dies Ergebniss wird auch von der Gleichung (4) bestätigt, welche für $h = \pm 0$ in

$$\tan(\alpha' = \alpha + \Delta\alpha) = \cos\varepsilon \tan\alpha$$

übergeht, und zeigt, dass nicht nur für $\alpha = \pm 90^0$, sondern auch für $\alpha = \pm 0$ der Fehler $\Delta\alpha$ in Null übergehe, und dass demnach sowohl im positiven wie auch im negativen ersten Quadranten von α ein grösster Fehler $\Delta\alpha$ statt finde.

Bestimmt man dieses Grösste nach der letzten, auch aus einer leicht zu entwerfenden Figur unschwer ableitbaren Gleichung, indem man sie nach α differenzirt und $\frac{\partial\Delta\alpha}{\partial\alpha} = 0$ setzt; so findet man

$$\frac{1}{\cos\alpha'^2} = \frac{\cos\varepsilon}{\cos\alpha^2},$$

folglich, wenn man durch die ursprüngliche Gleichung dividirt,

$$\sin\alpha' \cos\alpha' = \sin\alpha \cos\alpha,$$

also

$$\sin 2\alpha' = \sin 2\alpha$$

und

$$\pm 2\alpha \pm 2\alpha' = 180^0,$$

oder wie oben

$$\pm\alpha \pm \alpha' = \pm 2\alpha \pm \Delta\alpha = 90^0.$$

Sonach ist

$$\frac{1}{\cos\alpha'^2} = \frac{1}{\sin\alpha^2} = \frac{\cos\varepsilon}{\cos\alpha^2} = \frac{1-\cos\varepsilon}{\sin\alpha^2 - \cos\alpha^2} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}{-\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}{\mp\sin\Delta\alpha}$$
$$= \frac{1+\cos\varepsilon}{\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2} = 2\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2,$$

folglich wie oben

$$\cos 2\alpha = -\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2 \quad \text{und} \quad \sin\Delta\alpha = \mp \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Umgekehrt findet man eben so leicht den Neigungswinkel ε, bei dem der Fehler $\Delta\alpha$ eine bestimmte zugestandene Grenze nicht übersteigt. Dafür ist nach (26) oder (27)

$$(28) \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{\sin(\mp\Delta\alpha)}, \quad \varepsilon \doteq 2\sqrt{\mp\Delta\alpha . \Gamma},$$

wo $\mp\Delta\alpha$ den absoluten Werth von $\Delta\alpha$ vorstellt.

Bei der graphischen Triangulirung soll dieser Fehler nicht 30 Secunden betragen. Setzen wir demnach $\mp\Delta\alpha = 30''$, so finden wir $\varepsilon = 1^0 22' 55'' \doteq 1\frac{3}{8}^{0}$*). Also um $1\frac{3}{8}$ Grad darf der Messtisch oder ein Winkelmesser gegen den Horizont geneigt sein, bis der grösste Fehler der Horizontalwinkel, wenn die Objecte genau im Horizonte liegen, 30 Secunden beträgt. Da man nun einen so groben Fehler in der Neigung nie begehen wird, so dürfte dieses Ergebniss leicht Manchen zu dem Irrthume verleiten, überhaupt den Einfluss dieser Neigung auf die Richtigkeit der Messung gering zu schätzen; wir werden ihn jedoch bald eines Besseren belehren.

II.

II. Für $h = \frac{\varepsilon}{2}$

wird vermöge (10), (12), (13), (16), (18), (17)

$$n = 2, \quad v = 2, \quad u = 3\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2, \quad t = 1;$$

$$(29) \qquad -\sin\alpha = \frac{1+u}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2,$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{1}{3}u - \frac{2}{9}u^2 \ldots\ldots\right);$$

$$(30) \qquad \operatorname{tang}\Delta\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(u + \frac{1}{6}u^2 + \frac{13}{36}u^3 + \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{3}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^4 + \frac{13}{4}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^6 + \ldots\ldots\right.$$

und

*) Herr Prof. Stampfer findet dafür 58·6 Minuten.

(31) $$\Delta\alpha = \frac{1}{2}\Gamma\sqrt{3}\left(u + \frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{9}u^3 + \ldots\right)$$
$$= \frac{3}{2}\Gamma\sqrt{3}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon^4 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon^6 + \ldots\right)$$
$$= \frac{3}{8}\sqrt{3}\left[\frac{\varepsilon}{\Gamma}.\varepsilon + \frac{7}{24}\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^3.\varepsilon + \frac{23}{180}\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^5.\varepsilon + \ldots\right].$$

Wegen der Kleinheit von ε ist $-\sin\alpha \doteq \frac{1}{2}$, also α sehr nahe $= -30^0$. Während also der Winkel h nur von 0 bis $\frac{\varepsilon}{2}$ aufsteigt, nimmt α von 15^0 bis 30^0 ab und der Fehler $\Delta\alpha$ wird $\frac{3}{2}\sqrt{3} = 2\cdot 6$ mal so gross.

Umgekehrt findet man zur Fehlergrenze $\Delta\alpha$ die Neigung ε aus

(32) $$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon^2 \doteq \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{tang}\Delta\alpha \quad \text{oder} \quad \varepsilon^2 \doteq \frac{8\Gamma}{3\sqrt{3}}.\Delta\alpha.\text{*)}$$

Soll z. B. der möglich grösste Fehler $\Delta\alpha = 30$ Secunden sein, so findet man $\varepsilon = 0^0 51' 26''$ und $h = \frac{\varepsilon}{2} = 0^0 25' 43''$.

III. Für $h = 90^0$ geben die Gleichungen (2), (3), (4), $\eta = 0$ und $\alpha' = 0$, also

$$\alpha + \Delta\alpha = 90^0 \text{ und } \Delta\alpha = 90^0 - \alpha;$$

was auch aus Taf. II. Fig. 2. einleuchtet, weil, wenn M nach K kommt, LMQ nach LKB, also Q nach B kommen und $OQ = \alpha' = OB = 90^0$ werden muss.

Je näher demnach h an 90^0 rückt, desto näher kommt $\Delta\alpha$ an $90^0 - \alpha$; woraus man ersieht, wie genau der Horizontalkreis wagrecht gestellt sein muss, wenn die Azimute von sehr hoch stehenden Gestirnen zu messen sind.

12.

Die in den Art. 7—9 behandelte verwickelte Bestimmung der Winkel α und $\Delta\alpha$ räth zuvörderst zu einem Versuche einer Reihenentwickelung nach den aufsteigenden Potenzen des stets nur kleinen — wohl nie einen Grad erreichenden — Neigungswinkels ε.

---

*) Ich meide hier und auch sonst gern das Wurzelzeichen, da man ja die Gleichung $x^m = a$ auch gleich also lesen kann: x ist die $m$te Wurzel aus a.

Hierbei fällt aber sogleich auf, dass bei der Entwickelung der $\sqrt{1+8n^2}$ zu unterscheiden komme, ob $8n^2 <=> 1$ sei, was offenbar von dem Höhenwinkel h abhängt, und wegen des Ausdruckes (10) von n erheischt, dass

$$\pm \sin h >=< \sin\frac{1}{2}\varepsilon.\sqrt{8}, \text{ oder nahe } \pm h >=< \varepsilon\sqrt{2},$$

also für $\varepsilon = 10'$; 20'; 30'; 40'; 50'; 1°,

dass $\pm h >=<$ 14'·1; 28'·3; 42'·4; 56'·6; 1°10'·7; 1°24'·8 sei.

I. Betrachten wir daher den **ersten Fall**, wo die Entwickelung von $(1+8n^2)^{\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von n oder ε aufsteigend gemäss dem binomischen Lehrsatze ausführbar, folglich

$$8n^2 \leqq 1, \quad \pm \sin h \geqq \sin\frac{1}{2}\varepsilon.\sqrt{8}$$

ist. Da ist

$$8n^2 = \frac{4}{\sin h^2}(1-\cos\varepsilon) = \frac{4}{\sin h^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^2 - \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^4 + \frac{1}{2.3...6}\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^6 - \ldots\right],$$

$$v = 1 + \frac{1}{2\sin h^2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{\Gamma^2} - \frac{1}{4\sin h^2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{\sin h^2}\right)\frac{\varepsilon^4}{\Gamma^4} + \frac{1}{4\sin h^2}\left(\frac{1}{180}+\frac{1}{6\sin h^2}+\frac{1}{\sin h^4}\right)\frac{\varepsilon^6}{\Gamma^6} + \ldots,$$

$$\text{tang}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{\Gamma} + \frac{1}{24}\cdot\frac{\varepsilon^3}{\Gamma^3} + \frac{1}{240}\cdot\frac{\varepsilon^5}{\Gamma^5} + \ldots;$$

und wenn man $\text{tang}\,h = a$ setzt:

$$u = a\frac{\varepsilon}{\Gamma} + \left(\frac{a}{3}+\frac{1}{4a}\right)\frac{\varepsilon^3}{\Gamma^3} - \left(\frac{7}{60}a + \frac{1}{4a} + \frac{1}{8a^3}\right)\frac{\varepsilon^5}{\Gamma^5}\ldots,$$

$$(32) \qquad -\sin\alpha = \left(a+\frac{1}{2a}\right)\frac{\varepsilon}{\Gamma} - \left(\frac{1}{6}a + \frac{11}{24a} + \frac{1}{4a^3}\right)\frac{\varepsilon^3}{\Gamma^3} + \left(\frac{31}{120}a + \frac{181}{240a} + \frac{3}{4a^3} + \frac{1}{4a^5}\right)\frac{\varepsilon^5}{\Gamma^5}\ldots,$$

$$\cos\alpha = 1 - \left(\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8a^2}\right)\frac{\varepsilon^2}{\Gamma^2} + \left(\frac{a^2}{24}+\frac{5}{12}+\frac{43}{96a^2}+\frac{1}{8a^4}\right)\frac{\varepsilon^4}{\Gamma^4}\ldots,$$

$$u\cos\alpha = a\frac{\varepsilon}{\Gamma} - \left(\frac{a^3}{2} + \frac{a}{6} - \frac{1}{8a}\right)\frac{\varepsilon^3}{\Gamma^3}$$
$$+ \left(-\frac{a^3}{8} + \frac{a}{120} - \frac{1}{32a} - \frac{1}{32a^3}\right)\frac{\varepsilon^5}{\Gamma^5}\ldots\ldots$$

$$1 + u\sin\alpha = 1 - \left(a^2 + \frac{1}{2}\right)\frac{\varepsilon^2}{\Gamma^2} - \left(\frac{a^2}{6} - \frac{1}{24} - \frac{1}{8a^2}\right)\frac{\varepsilon^4}{\Gamma^4} - \ldots\ldots$$

$$\operatorname{tang}\Delta\alpha = a\frac{\varepsilon}{\Gamma} + \left(\frac{a^3}{2} + \frac{a}{3} + \frac{1}{8a}\right)\frac{\varepsilon^3}{\Gamma^3}$$
$$-\left(\frac{a^5}{2} + \frac{3a^3}{8} - \frac{a}{120} - \frac{1}{32a} + \frac{1}{32a^3}\right)\frac{\varepsilon^5}{\Gamma^5}\ldots\ldots$$

$$(33)\qquad \Delta\alpha = a\varepsilon + \left(\frac{a^3}{6} + \frac{a}{3} + \frac{1}{8a}\right)\frac{\varepsilon^3}{\Gamma^2}$$
$$-\left(\frac{4a^5}{5} + \frac{17a^3}{24} + \frac{7a}{60} - \frac{1}{32a} + \frac{1}{32a^3}\right)\frac{\varepsilon^5}{\Gamma^4}\ldots\ldots$$

Die für $\sin\alpha$ und $\Delta\alpha$ erhaltenen Reihenentwickelungen (32) und (33) hören jedoch in der Nähe der äussersten Werthe 0 und 90° des Höhenwinkels h auf anwendbar zu sein, weil dort $\frac{1}{a}=\cot h$, hier $a=\operatorname{tang} h$ sehr gross ausfällt.

1. **Für die von diesen Grenzen genügend abstehenden Mittelwerthe des Höhenwinkels h** kann man demnach diese Reihenentwickelungen geradezu verwenden, und erhält so

$$(34)\qquad -\sin\alpha = (\operatorname{tang} h + \frac{1}{2}\cot h)\frac{\varepsilon}{\Gamma}$$
$$-\left(\frac{1}{6}\operatorname{tang} h + \frac{11}{24}\cot h + \frac{1}{4}\cot h^3\right)\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^3\ldots\ldots$$

$$(35)\qquad \Delta\alpha = \varepsilon\operatorname{tang} h + \left(\frac{1}{6}\operatorname{tg} h^3 + \frac{1}{3}\operatorname{tg} h + \frac{1}{8}\cot h\right)\frac{\varepsilon^3}{\Gamma^2}\ldots\ldots$$

In diesem Falle ist der Winkel α nahe $=0$, folglich tritt der grösste Fehler $\Delta\alpha$ da ein, wo die Projection der Visur nahe mit der Durchschnittslinie der Horizontal- und Messtischebene übereinfällt oder zu einer auf der Messtischplatte ziehbaren wagrechten Geraden nahe parallel läuft, also selbst nahe wagrecht ist.

Um die Grösse des 2ten Gliedes in $\Delta\alpha$ einiger Massen schätzen zu können, bemerken wir, dass selbes, wenn $\varepsilon=1$Grad ist, für nahe $h=21°23'$ und $h=33°35'$ etwa 1Sec. betrage, und für $h=27°21'$ seinen möglichst kleinsten Werth nahe $\frac{1}{2}$ Secunde erhalte, endlich bei gleichem Höhenwinkel der 3ten Potenz von ε proportional sei.

2. **Für die möglich kleinsten Höhenwinkel** h werden die mit den höchsten Potenzen von $\frac{1}{a}=\cot h$ behafteten Glieder in (32) und (33) die ausgiebigsten. Behält man nur sie bei, und setzt abkürzend $\frac{\varepsilon}{a\Gamma}=\frac{\varepsilon}{\Gamma}:\tang h=\frac{\varepsilon}{\Gamma}\cot h=k$; so erhält man

$$-\sin\alpha=\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}k^3+\frac{1}{4}k^5\ldots\ldots,$$

$$\Delta\alpha=\frac{1}{8}k^2\varepsilon-\frac{1}{32}k^4\varepsilon\ldots\ldots;$$

ersieht aber auch zugleich, dass diese Reihen zu langsam convergiren.

3. **Bei den grössten Höhenwinkeln** h fallen in (32) und (33) die mit den höchsten Potenzen von $a=\tang h$ behafteten Glieder am grössten aus. Behält man nur sie bei und setzt zur Abkürzung $a\frac{\varepsilon}{\Gamma}=\frac{\varepsilon}{\Gamma}\tang h=g$; so findet man

$$-\sin\alpha=\tang h\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}-\frac{1}{6}\frac{\varepsilon^3}{\Gamma^3}+\frac{31}{120}\frac{\varepsilon^5}{\Gamma^5}\ldots\right)=g.$$

$$\Delta\alpha=\Gamma\left(g+\frac{1}{6}g^3-\frac{4}{5}g^5\ldots\ldots\right);$$

ersieht aber auch, dass die letzte Reihe zu langsam convergirt.

13.

II. **Im zweiten Fall**, wo

$$8n^2>1,\quad \pm\sin h<\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{2}$$

ist, müsste man die $\sqrt{1+8n^2}$ nach den fallenden Potenzen von n entwickeln, ihr also zuvor die Form $2n\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{8n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ertheilen. Setzen wir abkürzend

$$\frac{1}{2n\sqrt{2}}=\frac{\sin h}{2\sqrt{2}.\sin\frac{1}{2}\varepsilon}=m,$$

so wird

$$v=\frac{\sqrt{1+m^2}+m}{2m}.$$

$$u=\frac{\sqrt{1+m^2}+3m}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon\cos h}.\sqrt{2}.\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2\,,$$

$$-\sin\alpha=\frac{\sqrt{1+m^2}-m\left(1-4\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)}{\sqrt{2}.\cos\frac{1}{2}\varepsilon\cos h}.$$

Für $\lim h=0$ wird $\lim m=0$, also

$$-\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}.\cos\frac{1}{2}\varepsilon}\text{ und }\alpha\doteq-45^0\,,$$

wie schon in Art. 10. gefunden wurde.

Die Entwickelung in Reihen kann, wie man leicht übersieht, auch hier keinen Vortheil darbieten.

14.

Wenn der Höhenwinkel h klein ist, kann man α am füglichsten nach den Gleichungen (10), (12), (13), (16) oder (18), und (17), bestimmen, dann aber $\varDelta\alpha$ nach (22) oder (23) berechnen.

Ist endlich der Höhenwinkel so klein, dass man $\sin h\doteq\frac{h}{\Gamma}\doteq\operatorname{tang}h$ setzen darf; so wird, weil man jedenfalls auch

$$\sin\frac{1}{2}\varepsilon\doteq\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{\Gamma}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon$$

zu setzen berechtiget ist, nach den erwähnten Gleichungen:

$$n\doteq\frac{\varepsilon}{2h}\,,$$

$$v\doteq\frac{\sqrt{2\varepsilon^2+h^2}+h}{2h}\,,\tag{36}$$

$$t\doteq\frac{\sqrt{2\varepsilon^2+h^2}-h}{\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{vh}\,,\tag{37}$$

$$u\doteq\frac{v+1}{2}\cdot\frac{\varepsilon h}{\Gamma^2}=\frac{v+1}{4n}\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)^2.\tag{38}$$

Den Winkel α wird man entweder gemäss der Gleichung

$$(17) \qquad -\sin\alpha = \frac{t+u}{2}$$

oder, weil hier u in Vergleich gegen t vernachlässigt werden darf, nach der Gleichung

$$(19) \qquad -\sin\alpha \doteq \frac{t}{2}$$

berechnen. Endlich wird man $\varDelta\alpha$ nach der Gleichung

$$(21) \qquad \varDelta\alpha \doteq \varGamma u \cos\alpha$$

bestimmen.

In den Ausdrücken (36) und (37) wird man anstatt ε und h einfacher nur ihre kleinsten Proportionalzahlen setzen.

Bleibt sich das Verhältniss $\frac{\varepsilon}{h}$ gleich, so bleiben v, t und nahe auch α gleich, u und $\varDelta\alpha$ aber sind der ε^2 nahe proportionirt.

Beispiel. Sei $\varepsilon = 1^0 = 60'$, $h = 2^0$, also $n = \frac{1}{4}$, $\varepsilon : h = 1:2$; dann ist

$$v = \frac{\sqrt{6}+2}{4} = 1{\cdot}11237,$$

$$\log\frac{v+1}{4n} = 0{\cdot}32477$$

$$2\log\frac{\varGamma}{\varepsilon} = 3{\cdot}51625, \quad \varGamma \text{ in Gr.}$$

$$\log u = 0{\cdot}80852 - 4$$

$$\log\varGamma = 5{\cdot}31443, \quad \varGamma \text{ in Sec.}$$

$$\log\cos\alpha = 9{\cdot}98872$$

$$\log\varDelta\alpha = 2{\cdot}11167$$

$$t \doteq \sqrt{6} - 2 = 0{\cdot}44949$$

$$u = 0{\cdot}00064$$

$$t + u = 0{\cdot}45013$$

$$-\sin\alpha = 0{\cdot}22506$$

$$-\alpha = 13^0 0'{\cdot}4$$

$$\varDelta\alpha = 129''{\cdot}3$$

$$= 2' 9''{\cdot}3$$

Bleibt $\varepsilon : h = 1:2$, so ist für $\varepsilon' = 30'$ und $h' = 1^0$

$$t' = t = 0{\cdot}44949$$

$$u' = \frac{1}{4}u = 0{\cdot}00016$$

$$t' + u' = 0{\cdot}44965$$

$$-\sin\alpha' = 0{\cdot}22482$$

$$-\alpha' = 12^0 59'{\cdot}5$$

$$\varDelta\alpha' = \frac{1}{4}\varDelta\alpha = 32''{\cdot}3.$$

15.

Dort wo keine der angegebenen Näherungsrechnungen hinreichend genau ist, oder wenn der Grad der Genauigkeit einer solchen Rechnung in einem bestimmten Falle ermittelt werden soll, wird es unumgänglich nothwendig, die umständliche aber genaue Berechnung von α und $\Delta\alpha$ nach Art. 7.—9. vorzunehmen. Um aber hiebei durchgängig die Logarithmen benützen zu können, wird man sich der Hilfswinkel bedienen.

Setzt man in den Gleichungen (10) und (12)

$$(39)\qquad n\sqrt{8}=\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin h}\sqrt{8}=\operatorname{tang}\varphi,$$

so ist

$$(40)\qquad v=\frac{\sec\varphi+1}{2}.$$

Dabei muss $\sec\varphi=\sqrt{1+8n^2}$ stets positiv ausfallen, folglich φ von -90^0 bis $+90^0$ gewählt werden.

Entweder, wenn man eine Secantentafel hat, berechnet man v ganz einfach aus (40), oder man benützt die folgende Darstellung:

$$v=\frac{1+\cos\varphi}{2\cos\varphi},$$

wonach man erhält

$$(41)\qquad v=\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi}.$$

Nach dem ersteren Ausdrucke ist die in u vorkommende Summe

$$v+1=\frac{1+3\cos\varphi}{2\cos\varphi}=3\,\frac{\cos\varphi+\frac{1}{3}}{2\cos\varphi},$$

daher, wenn man den Winkel λ so bestimmt, dass

$$\frac{1}{3}=\cos 2\lambda$$

ist, wonach jedenfalls $2\lambda=70^0 31' 43''\cdot 6$ und

$$(42)\qquad \lambda=35\ 15\ 51\cdot 8$$

ist, findet man

$$v+1=3\,\frac{\cos(\lambda+\frac{1}{2}\varphi)\cos(\lambda-\frac{1}{2}\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Demgemäss verwandelt sich die Gleichung (13) in

$$(43)\qquad u=\frac{3}{\cos\varphi}\cos(\lambda+\frac{1}{2}\varphi)\cos(\lambda-\frac{1}{2}\varphi)\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tang}h.$$

Oder man setzt im ersten Ausdrucke von $v+1$

$$\frac{1}{3\sin\varphi}=\cot\psi,$$

also

$$(44)\qquad \operatorname{tang}\psi=3\sin\varphi;$$

dann wird

$$v+1=\frac{3\sin(\varphi+\psi)}{2\cos\varphi\sin\psi}$$

und

$$(45)\qquad u=\frac{3}{2}\,\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\varphi\sin\psi}\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tang}h.$$

Zur Bestimmung von α benützt man entweder die Gleichung (15), wenn man eine Tafel der Cosinus zu Gebote hat, oder man umwandelt diese Gleichung wie folgt. Es ist

$$-\sin\alpha=\frac{v-1+2\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}{2\sin\frac{1}{2}\varepsilon\cos\frac{1}{2}\varepsilon}.\operatorname{tang}h$$

$$=\left(\frac{v-1}{2}+\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)\frac{\operatorname{tang}h}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon$$

$$=\left(1+\frac{v-1}{2\sin\frac{1}{2}\varepsilon^2}\right)\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon\operatorname{tang}h.$$

Nach (41) ist aber

$$v-1=\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi},$$

folglich, wenn man

$$(46) \qquad \sin\frac{1}{2}\varepsilon : \sqrt{\frac{v-1}{2}} = \frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\sqrt{2\cos\varphi} = \operatorname{tang}\omega$$

setzt, wonach ω immer positiv und spitz ausfällt,

$$(47) \qquad -\sin\alpha = \frac{1}{\sin\omega^2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon\operatorname{tang}h.^{*)}$$

16.

Um die Beträge des grössten Fehlers $\Delta\alpha$ im Horizontalwinkel α einiger Massen in besonderen Fällen beurtheilen zu können, habe ich mir die Mühe genommen, folgenden Abriss einer Tafel zu berechnen, in welcher zu gewissen Neigungswinkeln ε des Messtisches und für gewisse Höhenwinkel h der Visur nicht allein jener grösste Fehler $\Delta\alpha$, sondern auch derjenige Horizontalwinkel α, bei dem er statt findet, aufgeführt ist. Die Neigungswinkel ε wurden geflissentlich so aussergewöhnlich gross gewählt, weil man daraus für kleinere ε leicht $\Delta\alpha$ angenähert danach berechnen kann, dass wenigstens von $h=25$ Min. an, bei einerlei h, die Fehler $\Delta\alpha$ den Neigungswinkeln ε nahe proportional sind. Eine grössere Ausdehnung dieser Tafel muss ich jemand überlassen, dem mehr helfende Hände als mir zu Gebote stehen.

---

*) Wenn ω genug klein ausfällt, kann man mittels der logarithmisch-goniometrischen Tafel, ohne den Winkel ω selbst zu bestimmen, von $\log\operatorname{tang}\omega$ unmittelbar auf $\log\sin\omega$ übergehen. Denn für jede zwei Winkel ω und ω' ist

$$\operatorname{tang}\omega : \operatorname{tang}\omega' = \frac{\sin\omega}{\cos\omega} : \frac{\sin\omega'}{\cos\omega'} = (\sin\omega : \sin\omega')\frac{\cos\omega}{\cos\omega'},$$

daher

$$\log\operatorname{tang}\omega - \log\operatorname{tang}\omega' = \log\sin\omega - \log\sin\omega' + \log\frac{\cos\omega}{\cos\omega'}.$$

Sind nun die Winkel ω und ω' so klein, dass man sehr nahe $\cos\omega = \cos\omega'$ setzen darf, so ist hinreichend genau

$$\log\operatorname{tang}\omega - \log\operatorname{tang}\omega' = \log\sin\omega - \log\sin\omega'$$

und sofort

$$\log\sin\omega = \log\sin\omega' + (\log\operatorname{tg}\omega - \log\operatorname{tg}\omega').$$

Bezeichnet demnach ω' den Winkel, dessen logtang die untere Grenze von $\log\operatorname{tang}\omega$ in der goniometrischen Tafel ist, so hat man nur $\log\operatorname{tg}\omega'$ von dem gefundenen $\log\operatorname{tg}\omega$ abzuziehen, und den Unterschied zu dem in der Tafel auf derselben Zeile stehenden $\log\sin\omega'$ zu addiren, um sogleich den verlangten $\log\sin\omega$ zu haben.

Aus dieser Tafel ersieht man, wie der Winkel α, bei dem der grösste Fehler $\varDelta\alpha$ statt findet, für $h=0^0$ noch ein wenig über 45^0 steht, und wie er schon, während h nur auf $\frac{\varepsilon}{2}$ aufsteigt, auf 30^0 herabsinkt, und bereits für $h=5^0$ nur wenige Grade und bei $\varepsilon=10'$ nicht mehr einen vollen Grad beträgt. Dagegen sieht man, dass $\varDelta\alpha$ bei einerlei ε, so wie h, in arithmetischer Progression aufsteigt.

Höhen-winkel ±h	Des Messtisches Neigungswinkel ε											
	10′		20′		30′		40′		50′		1°	
	∓α	±Δα	∓α	±Δα	∓α	±Δα	∓α	±Δα	∓α	±Δα	∓α	±Δα
0°0′	45°0′0″·2	0″·4	45°0′0″·8	1″·7	45°0′1″·9	3″·9	45°0′3″·5	7″·0	45°0′5″·4	10″·9	45°0′7″·8	15″·7
5′	30 0 0	1·1	36 22 33	3·1	38 57 7	5·9	40 20 35	9·5	41 13′·0	14·1	41 48′·6	19·5
10′	21 28·′3	1·9	30 0 3·0	4·6	34 2·′7	8·0	36 22′·7	12·3	37 53·6	17·5	38 57·1	23·5
15′	16 18·4	2·7	25 10′·7	6·1	30 0·1	10·2	32 57·8	15·2	34 57·2	21·0	36 22 8	27·6
20′	12 59·3	3·6	21 18·3	7·7	26 38·6	12·5	30 0·2	18·1	32 20·3	24·6	34 2·9	31·9
25′	10 43·7	4·4	18 35·2	9·3	23 50·3	14·9	29 2·7	21·2	30 0·3	28·3	31 55·6	36·3
30′	9 6·6	5·3	16 18·5	11·0	21 28·4	17·3	25 10·8	24·3	27 55·6	32·2	30 0·4	40·8
1°	4 43·1	10·6	9 6·8	21·2	12 59·5	32·3	16 18·8	44·0	19 7·0	56·2	21 28·8	1′9″·2
5°	0 54·9	52·5	1 55·5	1′45″	2 53·3	2′37″	3 50·2	3′30″	4 46·6	4′23″	5 40·8	5′16″
20°	0 17·4	3′38″	0 34·7	7′17″	0 52·1	10′55″	1 9·5	14′34″	1 26·9	18′12″	1 44·3	21′50″

X.

Mit welcher Genauigkeit lassen sich die Länge eines kleinen Kreisbogens, sein Sinus und seine Tangente einander gleich stellen?

Untersucht von

Herrn Dr. Wilh. Matzka,

k. k. Professor der Mathematik und prakt. Geometrie an der ständ. techn. Lehranstalt zu Prag.

Diese für angenäherte goniometrische Rechnungen, vornehmlich in den verschiedenen Zweigen der praktischen Geometrie und Mechanik, höchst wichtige Frage habe ich noch nirgends aufgeworfen und beantwortet gefunden, wesshalb ich dies hier selbst thue.

Sei α eines Kreisbogens Gradmass, a seine Länge oder sein Zahlwerth, wenn sein Halbmesser die Längeneinheit ist; oder sei α eines Winkels Gradmass, und $a=\alpha:\Gamma$ sein analytischer Zahlwerth, wenn er nämlich durch die analytische Winkeleinheit, den Gehren Γ, ausgemessen wird. Dann ist bekanntlich

$$\sin\alpha=a-\frac{a^3}{1.2.3}+\frac{a^5}{1.2...5}-...,$$

$$\tang\alpha=a+\frac{2a^3}{1.2.3}+\frac{16a^5}{1.2...5}+.....$$

1. Soll nun a mit $\sin\alpha$ bis auf eine Decimaleinheit der $k$ten Ordnung, d. i. bis auf $\frac{1}{10^k}$, übereinstimmen, also

$$a-\sin\alpha=\frac{a^3}{6}\left(1-\frac{a^2}{20}+...\right)<\frac{1}{10^k}$$

sein; so kann mann, weil hiezu a jedenfalls schon klein sein muss, für eine erste Annäherung, wenn man die genäherten Werthe von α und a mit α' und $a'=\alpha':\Gamma$ bezeichnet,

$$\frac{\alpha'^3}{6} < \frac{1}{10^k}$$

setzen. Dies gibt

$$\alpha' < \sqrt[3]{\frac{6}{10^k}},$$

also $$a' = \Gamma\alpha' < \Gamma\sqrt[3]{\frac{6}{10^k}}.$$

Sei $$k = 3m - n,$$

so ist $$a' < \frac{\Gamma}{10^m}\sqrt[3]{6.10^n},$$

also $$\log a' < \frac{1}{3}(n + \log 6) + \log \Gamma - m.$$

Nehmen wir a' und Γ in Minuten, so finden wir

für $n=0$, $\log a' < 3{\cdot}79565 - m$, $a' < 6246'{\cdot}7 : 10^m$,
- $n=1$, $\log a' < 4{\cdot}12899 - m$, $a' < 13458 : 10^m$,
- $n=2$, $\log a' < 4{\cdot}46232 - m$, $a' < 28995 : 10^m$.

Für eine schärfere Annäherung setzen wir nun oben in $\frac{\alpha^2}{20}$ für α den genährten Werth α', und erhalten

$$\frac{\alpha^3}{6}\left(1 - \frac{\alpha'^2}{20}\ldots\right) \overset{=}{<} \frac{\alpha'^3}{6},$$

daher

$$\alpha \overset{=}{<} \alpha'\left(1 - \frac{\alpha'^2}{20}\ldots\right)^{-\frac{1}{3}},$$

$$\alpha \overset{=}{<} \alpha' + \frac{1}{60}\alpha'^3\ldots,$$

also $$\alpha < \alpha' + \frac{1}{10^{k+1}}.$$

Wenn wir sonach mit Γ multipliciren, und Kürze halber des Näherungswerthes a' Correction durch $\Delta a'$ bezeichnen, nämlich

$$\Delta a' = \frac{\Gamma = 3437'{\cdot}7}{10^{k+1}}$$

setzen, so erhalten wir

$$a < a' + \Delta a'.$$

Nimmt man nun für k die Zahlen 9 bis 2, so ergibt sich folgende Zusammenstellung:

k	m	n	α'	$\Delta\alpha'$	$\alpha \overline{\overline{<}}$	$\frac{\alpha}{\Gamma} - \sin\alpha <$
9	3	0	6·25	0′	0° 6′·25	$1:10^9$
8	3	1	13·46	0	0 13·46	$1:10^8$
7	3	2	29·0	0	0 29·0	$1:10^7$
6	2	0	62·5	0	1 2·5	$1:10^6$
5	2	1	134·6	0	2 14·6	$1:10^5$
4	2	2	290·0	0	4 50·0	$1:10^4$
3	1	0	624·7	0′.3	10 24·7	$1:10^3$
2	1	1	1345·8	3.4	22°29′·2	$1:10^2$

II. Soll a mit $\operatorname{tang} \alpha$ bis auf eine Decimaleinheit der $k$ten Ordnung, d. i. bis auf $\frac{1}{10^k}$, übereinstimmen, also

$$\operatorname{tang} \alpha - a = \frac{a^3}{3}\left(1 + \frac{2}{5}a^2 + \ldots\right) < \frac{1}{10^k}$$

sein; so kann man wegen der Kleinheit von a für eine erste Annäherung, wenn man die obige Bezeichnung beibehält,

$$\frac{a'^3}{3} < \frac{1}{10^k}$$

setzen. Dies gibt

$$a' < \sqrt[3]{\frac{3}{10^k}},$$

also

$$\alpha' = \Gamma a' < \Gamma \sqrt[3]{\frac{3}{10^k}},$$

oder

$$\alpha' < \frac{\Gamma}{10^m} \sqrt[3]{3 \cdot 10^n},$$

folglich

$$\log \alpha' < \frac{1}{3}(n + \log 3) + \log \Gamma - m.$$

Nimmt man abermals Γ und a in Minuten, so findet man

für $n = 0$, $\log \alpha' < 3{\cdot}69531 - m$, $\alpha' < 4958' : 10^m$,
- $n = 1$, $\log \alpha' < 4{\cdot}02865 - m$, $\alpha' < 10682 : 10^m$,
- $n = 2$, $\log \alpha' < 4{\cdot}36198 - m$, $\alpha' < 23013 : 10^m$.

Für eine schärfere Annäherung setze man oben in $\frac{2}{5}a^2$ für a den genäherten Werth a'; danach erhält man

$$\frac{a^3}{3}(1+\frac{2}{5}a'^2+\ldots)\overset{=}{<}\frac{a'^3}{3},$$

folglich

$$a\overset{=}{<}a'(1+\frac{2}{5}a'^2\ldots)^{-\frac{1}{3}},$$

$$a\overset{=}{<}a'-\frac{2}{15}a'^3\ldots.,$$

also

$$a\overset{=}{<}a'-\frac{4}{10^{k+1}}.$$

Multiplicirt man mit Γ, und bezeichnet wieder des Näherungswerthes α' Verbesserung durch $\Delta\alpha'$, nemlich

$$\Delta\alpha'=\frac{4\,\Gamma=13751'}{10^{k+1}},$$

so erhält man

$$\alpha\overset{=}{<}\alpha'-\Delta\alpha'.$$

Setzt man abermals für k die Zahlen 9 bis 2, so ergibt sich folgende Zusammenstellung:

k	m	n	α'	$\Delta\alpha'$	$\alpha\overset{=}{<}$	$\tan\alpha-\frac{\alpha}{\Gamma}\overset{=}{<}$
9	3	0	5'·0	0	0° 5'·0	1:10⁹
8	3	1	10·7	0	0 10·7	1:10⁸
7	3	2	23·0	0	0 23·0	1:10⁷
6	2	0	49·6	0	0 49·6	1:10⁶
5	2	1	106·8	0	1 46·8	1:10⁵
4	2	2	230·0	0'.1	3 49·9	1:10⁴
3	1	0	495·8	1.4	8 14·4	1:10³
2	1	1	1068·2	13.8	17 34·4	1:10²

III. Damit $\sin\alpha$ mit $\tan\alpha$ bis auf eine Decimaleinheit der $k$ten Ordnung übereinstimme, also

$$\tan\alpha-\sin\alpha=\frac{a^3}{6}(1+\frac{3}{4}a^2+\ldots)<\frac{1}{10^k}$$

sei; kann man für eine erste Annäherung, indem man die gebrauchte Bezeichnung beibehält, wieder

$$\frac{\alpha'^3}{6} < \frac{1}{10^k}$$

setzen, wie in I. Danach erhält man zu den drei Werthen von n auch wie in I. die obern Grenzen von α'.

Zu einer genaueren Annäherung erhält man dann durch den bekannten Vorgang

$$\frac{\alpha^3}{6}\left(1+\frac{3\,\alpha^2}{4}+\ldots\right) \overset{=}{<} \frac{\alpha'^3}{6},$$

daher

$$\alpha \overset{=}{<} \alpha' - \frac{\alpha'^3}{4}\ldots,$$

oder

$$\alpha \overset{=}{<} \alpha' - \frac{15}{10^{k+1}}.$$

Wird nun mit Γ multiplicirt und des Näherungswerthes α' Verbesserung durch $\Delta\alpha'$ bezeichnet, nemlich

$$\Delta\alpha' = \frac{15\,\Gamma}{10^{k+1}} = \frac{51566'}{10^{k+1}}$$

gesetzt, so erhält man

$$\alpha \overset{=}{<} \alpha' - \Delta\alpha'.$$

Nimmt man wieder für k die Anzahlen 9 bis 2, so erhält man folgende Zusammenstellung:

k	m	n	α'	$\Delta\alpha'$	$\alpha \overset{=}{<}$	$\tan\alpha - \sin\alpha \overset{=}{<}$
9	3	0	6′·25	0	0° 6′·25	$1:10^9$
8	3	1	13′·46	0	0 13·46	$1:10^8$
7	3	2	29·0	0	0 29·0	$1:10^7$
6	2	0	62·5	0	1 2·5	$1:10^6$
5	2	1	134·6	0	2 14·6	$1:10^5$
4	2	2	290·0	0′.5	4 49·5	$1:10^4$
3	1	0	624·7	5·2	10 19·5	$1:10^3$
2	1	1	1345·8	51′·6	21 34·2	$1:10^2$

Die Interpretaion der in den zwei Schlussspalten dieser drei Täfelchen enthaltenen Ergebnisse ist so einfach, dass ich sie hier Kürze halber wohl weglassen darf.

XI.

Populäre Vorlesungen über wissenschaftliche Gegenstände von F. W. Bessel. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von H. C. Schumacher. Hamburg. Perthes, Besser & Mauke. 1848.

Von dem
Herrn Dr. P. Wolfers,
astronomischem Rechner an der Königlichen Sternwarte zu Berlin.

Der Herausgeber des vorliegenden Werkes hat hierdurch seinem unsterblichen Freunde das schönste Denkmal gesetzt, denn wenn es auch den Männern der Wissenschaft vollkommen bekannt ist, wie vielseitig und (was selten der Fall ist) gründlich zugleich die Wirksamkeit des grossen Astronomen gewesen; so erfahren durch das vorliegende Werk auch die zahlreichen Liebhaber der astronomischen und physikalischen Wissenschaften, wieviel diese dem verstorbenen Verfasser verdanken. Während derselbe in so vielen Zweigen der Wissenschaften erschöpfende Untersuchungen angestellt hat, wusste er doch sich noch Zeit abzumüssigen, diese eben so allgemein fasslichen, als gründlichen und eleganten Abhandlungen zu schreiben. Der aufmerksame Leser derselben kann nur bedauern, dass der Verfasser nicht, wie nach einer Andeutung des Herausgebers seine Absicht war, dazu gelangt ist, die vorliegenden Bruchstücke in ein Ganzes, eine populäre Astronomie, zu vereinigen; reichlichen Dank bleiben wir aber auch für diese Gabe schuldig. Das erwähnte Denkmal ist nur dadurch unvollständig, dass der Verfasser zu bescheiden gewesen ist, um in den einzelnen Abhandlungen überall anzugeben, was er selbst in den einzelnen dort besprochenen Gegenständen geleistet hat. Diese allgemeinen Bemerkungen enthalten bereits unser Urtheil

über das Werk, wir glauben keine undankbare Arbeit zu unternehmen, wenn wir die einzelnen Abhandlungen vorzugsweise besprechen, und hierbei werden wir Gelegenheit finden, jenem Mangel theilweise abzuhelfen. Wir werden bei dieser Besprechung die Reihefolge des Buches nicht beobachten, sondern die Abhandlungen mehr nach der Verwandtschaft ihres Inhalts ordnen. Die erste Abhandlung hat die Ueberschrift:

Ueber den gegenwärtigen Standpunkt der Astronomie.

Dieselbe nimmt nur einen Raum von 33 Seiten ein, allein der Verfasser hat es verstanden, auf demselben mannichfache interessante Darstellungen niederzulegen. Um den gegenwärtigen Standpunkt der Astronomie klar zu machen, gibt der Verfasser eine kurze Uebersicht ihrer Geschichte aus dem vorigen Jahrhundert; er zeigt, wie wechselweise besonders seit Newton die Theorie und Praxis einander vorausgeeilt waren und wie eben das Voranseilen des einen Zweiges die Veranlassung war, welche das Vorwärtsschreiten des andern herbeiführte. Wüsste man nicht ohnedem, dass der Verfasser auf der Höhe beider Zweige der Wissenschaft stand, so müsste man diese Ueberzeugung daraus abnehmen können, dass er die Leistungen der hervorragendsten neuern Astronomen mit wenigen Worten klar darzustellen verstanden hat. Als eigentliche Aufgabe der Astronomie gibt er bei dieser Gelegenheit an, dass sie Vorschriften ertheilen muss, nach welchen die Bewegungen der Himmelskörper, so wie sie uns von der Erde aus erscheinen, berechnet werden können. Zuerst wird Newton's Verdienst um die Theorie dargestellt, hierauf folgen Flamsteed's Verbesserungen der astronomischen Instrumente und Beobachtungsmethoden, in deren Folge die Theorie der Praxis voranseilte. Die genauen Beobachtungen des letztern konnten desshalb nicht durch die Rechnung dargestellt werden, weil die Störungen nach Newton's allgemeiner Gravitation noch nicht berechnet waren. Hierzu bahnten Clairaut und Euler den Weg. Noch genauere Beobachtungen als Flamsteed stellt Bradley an, und diese benutzt Tobias Mayer zur Construction von Mondstafeln, mittelst deren man die Oerter des Mondes mit einer Genauigkeit voraus berechnen konnte, welche man früher nicht für möglich gehalten hatte. Jetzt konnte man durch Beobachtungen des Mondes die geographische Länge auf dem Meere finden. Durch Bradley war die Praxis vorausgeeilt, Lagrange und Laplace fördern die Theorie, die Mécanique céleste des letztern füllt eine grosse Lücke aus. Wie in den Wissenschaften überhaupt, lassen in der Astronomie insbesondere die Grössen sich nicht absolut genau bestimmen, die Grenzen ihrer Unsicherheit können nur verengert werden. Die Theorie muss daher zu jeder Zeit die zu beobachtenden Grössen so genau darstellen, dass der Unterschied zwischen Rechnung und Beobachtung den möglichen Fehler der letztern nicht übersteige. So spricht sich der Verfasser über die bisherigen Leistungen aus, er verlangt aber, dass künftig Theorie und Praxis unbekümmert um einander vorwärts geführt werden sollten.

Piazzi bearbeitete im Anfang dieses Jahrhunderts ein Verzeichniss von 7000 Fixsternen, ähnlich wie früher Tycho de

Brahe, Flamsteed, Bradley und Lalande, und entdeckte bei dieser Gelegenheit am 1. Januar 1801 die Ceres. Die leichteste Berechnung der Cometenbahnen hatte Olbers bereits 1797 gelehrt, die der Planetenbahnen mittelst weniger einander nahe liegender Beobachtungen fehlte noch; in Folge der Entdeckung der Ceres schuf diese der grosse Mathematiker Gauss. Weitere Entdeckungen von Planeten folgten schnell auf einander. Bradley's Beobachtungen wurden vom Verfasser scharf reducirt und in seinem Werke „Fundamenta astronomiae" niedergelegt. Sie haben den Weg eröffnet, die scharfen Beobachtungen der letzten 100 Jahre so fruchtbringend als möglich zu benutzen. Durch die von Legendre und Gauss unabhängig von einander erfundene Methode der kleinsten Quadrate wird, nach des Verfassers Ausdruck, die frühere Kunst, aus Beobachtungen eines Wandelsterns eine sich ihnen anschliessende Bahn zu finden, in eine Regel verwandelt. Ausser den bisher erwähnten Namen von Astronomen und Mathematikern führt der Verfasser die Arbeiten der Mechaniker Bird, Ramsden, Troughton, Reichenbach und Repsold an und bedauert am Schluss, dass er die Arbeiten von Struve und Encke zu schildern verhindert sei. Bleiben trotz des angeführten mannichfachen Inhalts dieser Abhandlung Lücken übrig, so werden diese durch die Abhandlungen 11., 13. und 14. ausgefüllt. Ihre Ueberschriften sind:

Ueber die Verbindung der astronomischen Beobachtungen mit der Astronomie;

Astronomische Beobachtungen;

Oerter der Fixsterne an der Himmelskugel.

Wir bemerken sogleich, dass die zwei ersten Abhandlungen nicht nur verwandten Inhalts, sondern die eine wahrscheinlich eine Umarbeitung der andern ist; zum Theil kommen wörtlich gleichlautende Stellen in beiden vor. Wir betrachten zunächst die erstere (11.) und finden nach einer angestellten Unterscheidung zwischen der Astrologie und Astronomie das Wesen der letztern bestimmt angegeben, welches nämlich in einer Kenntniss der Bewegungen der Gestirne besteht. Die Beobachtungen benutzt der Verstand, um das Gebäude der Astronomie aufzuführen. Es werden allgemein geltende Regeln für die Bewegungen aller Wandelsterne aufgestellt, für einen einzelnen müssen besondere Zahlenwerthe, die 6 Elemente seiner Bahn bestimmt werden. Die Uebereinstimmung der mittelst der letztern berechneten Oerter mit den beobachteten bestätigt zugleich die Richtigkeit der allgemein aufgestellten Theorie, lässt sich hingegen die letztere durch keine Verbesserung der Elemente den Beobachtungen in einem besondern Falle anpassen; so ist diess ein Beweis für die Mangelhaftigkeit der Theorie. Die ersten astronomischen Theorien waren unrichtig, Kepler's Theorie war richtig und erschien auch so lange vollständig, bis neuere genauere Beobachtungen widersprachen. Newton entdeckte hierauf die allgemeine Anziehung der Himmelskörper und bahnte so den Weg zur Vervollständigung von Kepler's Theorie. Die so vervollständigte Theorie stimmte lange mit den Beobachtungen überein, erst jetzt (1840) erhebt der Widerspruch wieder

seine Stimme und bringt nahe Entdeckungen in Aussicht. Diese Entdeckung ist, wie wir unten sehen werden, erst nach Bessel's Tode erfolgt und hat auf's Neue die vollständige Richtigkeit jener Theorie bestätigt.

In grösserer Ausführlichkeit als in der ersten Abhandlung erfahren wir hier, wie allmählig von der ältesten Zeit herab bis zur neusten die Beobachtungen vervollkommnet wurden, die Leistungen einzelner Astronomen werden klar dargelegt. Hervorragend sind hier die Namen: Ptolemäus und Almamon aus der ältern, Johann Müller Regiomontanus, Copernicus, Wilhelm IV. von Hessen, Tycho de Brahe, Flamsteed Bradley in der neuern Zeit, den letztern fügen wir einen, im Werke nicht erwähnten Namen, Bessel hinzu. Wie die Astronomen, werden die nach und nach eingeführten Instrumente erwähnt, es wird gezeigt, wie jedes die Genauigkeit der Beobachtungen zu erhöhen im Stande war. Wir erinnern an die Armillarsphäre, den Quadranten, Sextanten, die Pendeluhr, den Mauerquadranten, das Mittagsfernrohr, den Mittagskreis. Jedes dieser Instrumente bezeichnet eine Epoche in der Geschichte der beobachtenden Astronomie und in der neusten Zeit hat man gelernt, ihre Fehler zu bestimmen und durch Rechnung aus den Beobachtungen fortzuschaffen. Einige Momente mussten bestimmt werden, ehe man die genau angestellten Beobachtungen auf absolute Grössen zurückführen konnte; es sind diess die erst in der neuern Zeit bestimmte Strahlenbrechung, die Bestimmung des wirklichen Widderpunktes als Anfangspunktes der geraden Aufsteigungen u. s. w., kurz die Fundamente der Astronomie, welche Bessel aus Bradley's Beobachtungen, in Verbindung mit den in Königsberg angestellten, hergeleitet hat.

Nach dem Ausspruche von Laplace entspricht die Newton'sche Anziehung, wenn ihre Folgen mit der gehörigen Vollständigkeit entwickelt werden, vollkommen allen Beobachtungen der Planeten. Diese Aeusserung war aus den eigenen Arbeiten dieses grossen Meisters hervorgegangen. Delambre und Bouvard hatten in Folge seiner Aufforderung die in der Mécanique céleste dargestellte allgemeine Theorie auf die Planeten: Erde, Jupiter, Saturn und Uranus angewandt und Tafeln für diese berechnet, welche zwar die Beobachtungen weit besser als frühere darstellten, indessen noch immer Unterschiede von 10″ u. m. übrig liessen. Besonders auffallend zeigten sich diese Unterschiede bei dem 1781 von Herschel entdeckten Uranus, dessen bereits vor der Entdeckung angestellten, nachher aber erst aufgefundenen, so wie auch dessen neusten nach 1821 angestellten Beobachtungen die Tafeln durchaus nicht entsprachen. Wir ersehen aus dieser Abhandlung, dass Bessel bereits 1840 aussprach, diese Unterschiede würden zu einer neuen Entdeckung im Sonnensysteme, nämlich eines jenseit des Uranus befindlichen Planeten führen, dessen Bahn und Masse im voraus angegeben werden würde. Indem er selbst die dahin zielenden Arbeiten bereits begonnen hatte, ereilte ihn der Tod und kaum brauchen wir daran zu erinnern, dass kurz nachher Leverrier und Adams, unabhängig von einander, die prophetisch angekündigte Entdeckung buchstäblich zur Wahrheit geführt haben.

Die bisherigen Auszüge haben wir der 11. Abhandlung entnommen, die 13. enthält viele Mittheilungen, welche in jener bereits vorkommen, aber auch manche neue und interessante. Wir finden ausführlich angegeben und erläutert, wie Kepler seine Gesetze gefunden hat, Newton's Anziehungsgesetz wird hier erklärt. Durch Zahlen wird angegeben, wie die Beobachtungen Tycho's, Flamsteed's, Bradley's und die der neusten Zeit an Schärfe zugenommen haben und der Mittel erwähnt, durch welche diese Fortschritte herbei geführt worden sind. Wegen nothwendiger Kürze begnügen wir uns mit diesen Andeutungen, damit der Leser erfahre, dass er in jeder dieser beiden nahe verwandten Abhandlungen eigenthümliche und lehrreiche Mittheilungen finden wird. Ehe wir diesen Gegenstand verlassen, müssen wir aber noch bemerken, dass am Schluss dieser 13. Abhandlung diejenigen Untersuchungen angegeben werden, welche Bessel selbst nach eigenen Ideen angestellt hat, um die Fehler der anzuwendenden Instrumente zu bestimmen und ihren Einfluss auf die Resultate der Beobachtung fortzuschaffen.

Während die beiden eben besprochenen Abhandlungen vorzugsweise der Bewegung der Planeten gewidmet sind, beschäftigt sich die Abhandlung 14., wie auch ihre Ueberschrift andeutet, mit den Fixsternen. Der Verfasser bemerkt, was nicht in allen populären Schriften geschieht, dass die Fixsterne bei ihrer täglichen scheinbaren Bewegung keine Kreise beschreiben, eine Folge der Strahlenbrechung. Von dieser, ihren Ursachen und Wirkungen, wird eine deutliche Uebersicht gegeben, natürlich konnte hierbei nicht auf Rechnung eingegangen werden. Da man nur eine mangelhafte Kenntniss von dem Einfluss hat, welchen die Veränderungen in der Atmosphäre auf die Strahlenbrechung ausüben, diese also nur immer unsicher bekannt wird; so zeigt der Verfasser, wie man die zu beobachtenden Sterne auszuwählen habe, um diesen Einfluss zu vermindern. Tycho de Brahe hat zuerst durch Beobachtungen die Grösse der Strahlenbrechung zu bestimmen versucht, J. D. Cassini verband damit die Theorie, nach ihm vervollständigten diese Kenntniss Simpson durch Theorie, Bradley durch Beobachtungen und in der neusten Zeit haben Laplace, Kramp und Bessel dieselbe besonders bereichert.

Das älteste Verzeichniss von Fixsternen hat Hipparch 128 v. Chr. verfertigt, die Vergleichung desselben mit den 150 Jahre früher von Timocharis angestellten Beobachtungen führte zur Entdeckung der, Praecession genannten, Erscheinung. Der Einfluss derselben auf die Lage des Frühlingsnachtgleichpunktes wird hier erklärt. Es werden hierauf die spätern Sternverzeichnisse besprochen und gezeigt, wie sie unsere Kenntniss der einzelnen Sterne ihrer Lage nach erweiterten und wie die anzubringenden Correctionen vermehrt und verfeinert wurden. In der neuern Zeit war das Bedürfniss, die Oerter der Fixsterne zu kennen, grösser als früher, um mittelst derselben zu jeder Zeit den Ort eines beweglichen Gestirns bestimmen zu können. Bradley entdeckt die Nutation und Aberration und setzt so die Astronomen in den Stand, die Oerter der Fixsterne weit genauer als früher zu bestimmen. Die geraden Aufsteigungen, sowohl die absolu-

ten als die relativen, werden mittelst der Fundamentalsterne bestimmt. Unter den Arbeiten, welche die Kenntniss der Fixsternörter erweitern sollten, macht Piazzi's Katalog Epoche. Durch Verbindung desselben mit den 45 Jahre früher von Bradley angestellten Beobachtungen bestimmt Bessel weit genauer die Praecession und die eigene Bewegung vieler einzelnen Sterne. Lalande liefert in der Histoire céleste 50000, Bessel selbst, von 1821 — 1823, 75000 Beobachtungen von Sternen, die letztern in der 30° breiten Aequatorealzone. Die vier Verzeichnisse von Bradley, Piazzi, Lalande und Bessel liefern die Grundlage zu der, auf des letztern Betrieb von der Berliner Akademie veranlassten, Herausgabe von Karten. Diese haben, wie Bessel voraus gesagt, nach seinem Tode die Entdeckung 6 neuer Planeten herbeigeführt. Diesen schönen Lohn seiner umfassenden Arbeiten zu erleben, war leider dem grossen Astronomen nicht vergönnt!

Wir gehen nun zur Besprechung der 7., ihrem Inhalte nach mit der vorhergehenden verwandten, Abhandlung über, deren Ueberschrift lautet:

Messung der Entfernung des 61. Sterns im Sternbilde des Schwans.

Der grössere Theil dieser Abhandlung dient dazu, zu zeigen, dass die versuchte Bestimmung der Entfernung eines Fixsterns manche Entdeckung herbeigeführt hat, im Vergleich mit welcher die endliche Lösung der Aufgabe unbedeutend ist. Nachdem Copernicus die jährliche Bewegung der Erde gezeigt hatte, mussten die zu verschiedenen Zeiten des Jahres beobachteten Fixsterne eine Ortsveränderung, die sogenannte Parallaxe ergeben, eine um so grössere, je kleiner die Entfernung des Sterns von der Erde war. Die damaligen Beobachtungen zeigten keine derartige Ortsveränderung, Copernicus nahm kühn eine zu grosse Entfernung der Fixsterne von der Erde, nach der damaligen Beobachtungsschärfe über 1146 Halbmesser der Erdbahn an, als dass sich eine Parallaxe von 3′ zeigen könne. Die Beobachtungen mussten zunächst verschärft werden, Tycho bestimmte die Oerter bereits bis auf 1′ genau. Seine gleich scharfen Beobachtungen der Planeten führten Kepler zur Entdeckung seiner berühmten Gesetze. Seine Beobachtungen des Polarsterns zeigten dem letztern, dass die Parallaxe dieses Sterns kleiner als 30″, seine Entfernung grösser als 6875 Halbmesser der Erdbahn sein müsse.

Picard und Azout brachten das Fernrohr an den Messinstrumenten an, Flamsteed und Römer vervollkommneten die letztern anderweitig. Des erstern mehr als 30jährige Beobachtungen waren sechsmal so genau als die Tychonischen und da sie keine Parallaxe der Fixsterne zeigten, mussten diese über 41250 Halbmesser der Erdbahn entfernt sein. Unterschiede in den Beobachtungen dieser Astronomen schrieb man fälschlich der Parallaxe zu, ihre wahre Ursache zu entdecken, waren die Beobachtungen noch nicht hinreichend scharf. Hook suchte diese zu verschärfen, eben so Molineux in Kew. Der letztere fing mit einem festgestellten Fernrohre von 24′ Brennweite am 3. Decemb. 1725. Beobachtungen des Sterns γ Draconis an, Bradley setzte die-

selben fort und fand in der That Unterschiede im Orte, welche bis auf 40″ anstiegen. Diese Unterschiede entsprachen nicht einer Parallaxe, nach dreijährigem Studium erklärte Bradley sie durch die wichtige Entdeckung der Aberration des Lichtes. Hiermit hatte man einen directen Beweis für die von Copernicus aufgestellte eigene Bewegung der Erde. Bradley fand ferner aus seinen Beobachtungen eine andere, bereits von Newton angedeutete Veränderung, die Nutation, welche eine Periode von 19 Jahren hat und aus der Anziehung des Mondes auf die abgeplattete Erde hervorgeht. Die oben erwähnten Unterschiede in den Oertern der Fixsterne wurden jetzt vollständig erklärt, Bradley's Beobachtungen deuteten nichts an, was einer Parallaxe hätte zugeschrieben werden müssen, die Sterne mussten daher über 400000 Halbmesser der Erdbahn entfernt sein.

Herschel d. A. wollte die Parallaxe mittelst der optisch erscheinenden Doppelsterne bestimmen und entdeckte die physischen, d. h. die aus mehrern Fixsternen zusammengesetzten Systeme. Piazzi und Calandrelli glaubten, wie Bessel gezeigt hat, fälschlich, eine beträchtliche Parallaxe mehrerer Fixsterne 1. Grösse gefunden zu haben, Fehler in dem vielfach benutzten Instrumente des erstern waren die Ursachen dieser Täuschung. Brinkley glaubte am Athair eine Parallaxe von fast 3″ gefunden zu haben, allein Pond, welcher ihm widersprach, verengerte die Grenzen der Parallaxe für diesen Stern nebst Wega und Deneb bis auf einige Zehntel einer Secunde, eine von seinem Nachfolger Airy bestätigte Bestimmung.

So weit hatte man mittelst absoluter Ortsbestimmungen die Parallaxe, aber vergebens zu entdecken versucht, wesshalb Bessel es nothwendig fand, andere Wege einzuschlagen. Um die Fehlerursachen auszuschliessen und so die Genauigkeit zu vermehren, verfiel er darauf, einen Stern mit einem ihm sehr nahe stehenden mikrometrisch zu vergleichen. Struve hatte bereits 1835 — 1837 dergleichen Untersuchungen am Begleiter der Wega angestellt und aus denselben gefunden, dass die Parallaxe des letztern kleiner ist als die von Brinkley gefundene sein müsse.

Bessel wählte den Stern 61. im Schwan aus, theils weil dieser eine beträchtliche eigene Bewegung hat, also auch die Parallaxe muthmasslich gross sein konnte, theils weil er als Doppelstern sich genauer als ein einfacher beobachten liess, theils wegen seiner für Königsberg bequemen Stellung am Himmel. Er benutzte das damals grösste 11füssige Heliometer und verglich diesen Stern vom 16. August 1837 bis zum 2. October 1838 wiederholt mit zwei benachbarten Sternen. Die erhaltenen 183 Resultate entsprachen dem Einfluss einer Parallaxe, diese ergab sich =0″,3136 und die Entfernung des Sterns von der Sonne =657700 Halbmessern der Erdbahn, eine Strecke, welche das Licht in 10 Jahren zurücklegt. Dieser Stern legt demnach in einem Jahre einen Weg von 16 Halbmessern der Erdbahn zurück. Weil er ein Doppelstern ist, wird man künftig die Masse des Systems und jedes einzelnen Sterns bestimmen können. Das gefundene Resultat erweitert die Ausdehnung des sichtbaren Weltalls ungeheuer

und hat für die Wissenschaft als besondern Nutzen die Schärfe der Beobachtungen dargestellt.

Während die bisher besprochenen Abhandlungen sich vorzugsweise mit den Planeten und Fixsternen beschäftigen, sind die 4. und 5. der Betrachtung der Kometen gewidmet. Ihre Titel sind:

Ueber den Halley'schen Kometen, und

Von den Erscheinungen, welche der Halley'sche Komet gezeigt hat.

Nach der erstern haben die Kometen schon sehr früh die Aufmerksamkeit der Menschen auf sich gezogen, allein Gegenstand der astronomischen Beobachtung wurden sie erst sehr spät. Müller Regiomontanus stellte zuerst i. J. 1472 derartige an. Durch die Erklärung der Keplerschen Gesetze mittelst Newton's allgemeiner Anziehung wurde Edmund Halley veranlasst, die vorhandenen 200jährigen Beobachtungen von Kometen zu berechnen. Jm Jahre 1705 machte er 24 Kometenbahnen bekannt, wobei jedoch die grosse Axe und somit die Umlaufszeit nicht angegeben war. Drei derselben, die vom 4. Sept. 1531., 26. Octbr. 1607. und 14. Sept. 1682. stimmten so auffallend in ihren Elementen unter einander überein, dass Halley auf den Gedanken verfiel, es sei ein und derselbe mehrmals erschienene Komet. Er berechnete hiernach seine elliptische Bahn und bestimmte seine Wiederkehr für das Jahr 1759 voraus. Diese Vorausbestimmung traf bekanntlich zu, daher die Benennung dieses ersten periodischen Kometen nach seinem ersten Berechner. Die drei Umlaufszeiten zwischen den vier Erscheinungen sind nicht einander gleich, betragen vielmehr respective: 76 J. 2 M., 74 J. 10½ M., 76 J. 6 M. Die Unterschiede entspringen aus den Störungen, welche die Planeten auf den elliptischen Lauf des Kometen um die Sonne ausüben. Newton hatte zwar die Bahn zur Berechnung dieser Störungen gebrochen, Halley sie aber noch nicht hergeleitet. Vor der Wiederkehr des Kometen im J. 1759 hatte Lalande nach Clairaut's Vorschriften die beiden Umläufe von 1607—1682 und von 1682—1759, mit Rücksicht auf die Störungen, neu berechnet. Den neusten Umlauf von 1759—1835 haben mehrere Astronomen, Damoiseau, Pontécoulant, Rosenberger und Lehmann vor der Wiederkehr berechnet und bekannt gemacht. Ihre Angaben wichen theils mehr, theils weniger von einander ab.

Während in der ersten dieser zwei Abhandlungen das Bisherige besprochen war, gibt der Verfasser in der zweiten zunächst darüber Auskunft, in wie fern der Komet in rein astronomischer Beziehung, d. h. in Betreff seiner Bewegung den im voraus angestellten Berechnungen entsprochen habe. Rosenberger's Elemente sind hiernach den Beobachtungen am nächsten gekommen. Es folgt eine Reihe von Beobachtungen in Betreff des äussern Ansehens des Kometen, namentlich der Bildung seines Schweifes, mehrere Figuren dienen zur Erläuterung und es werden diese Erscheinungen mit ähnlichen verglichen, welche frühere Kometen von 1744, 1769, 1807, 1811 und 1824 gezeigt haben. Der Verfasser hat zugleich Messungen angestellt und zwar so scharfe, als sie bei

derartigen nicht genau begrenzten Himmelskörpern erlangt werden können. Er stellt eine Hypothese über die Entstehung der Schweife auf, erwähnt der fast ganz verschwindenden Kraft der Kometenmaterie, das Licht zu brechen, und spricht über das polarisirte Licht der Kometen selbst. Der grössere Theil dieser Abhandlung beschäftigt sich mit dem äussern Ansehen der Kometen, und bildet daher nicht mehr einen eigentlichen Gegenstand der Astronomie; noch mehr ist diess bei den nun zu besprechenden zwei Abhandlungen der Fall.

3. Ueber die physische Beschaffenheit der Himmelskörper.

15. Ueber den Mond.

Während der Verfasser in der erstern erwähnt, dass die Kraft unseres Auges, in Bezug auf die Erkenntniss der Himmelskörper, eng begrenzt sei, macht er zugleich auf anschauliche und fassliche Weise klar, wie auch für die durch das Fernrohr verstärkte Kraft eine nothwendige Grenze gesteckt ist. Hierauf zeigt er, was wir von dem uns nächsten Himmelskörper, dem Monde wissen, dass er Berge und Thäler hat und wie die Höhe der erstern gemessen worden ist. Die Arbeiten Schröters und Lohrmanns werden besprochen, die Karte des erstern stellt den Mond dar, wie er sich dem gehörig bewaffneten Auge zeigt, die des letztern, wie er wirklich ist. Die Mondberge werden, nach der Angabe des erstern, mit denen der Erde verglichen. Es wird durch Gründe dargethan, dass der Mond keine oder nur eine, im Vergleich mit der Erde höchst unbedeutende, Atmosphäre habe, so wie zugleich der Verfasser die Gründe widerlegt, welche man für das Dasein einer Mond-Atmosphäre aufgestellt hat. Der Mond hat demnach weder Luft, noch Wasser, noch Feuer und es können daher auf demselben keine lebenden Wesen, wie wir sie kennen, wohnen. Die Zeiten des Umlaufs und der Axendrehung des Mondes sind einander gleich, wesshalb wir stets nur die eine Seite des Mondes sehen, dasselbe ist wahrscheinlich bei den Trabanten der übrigen Planeten der Fall.

Hierauf bespricht der Verfasser die Sonne, deren leuchtende Hülle uns verhindert, ihren festen Körper selbst kennen zu lernen. Lücken in jener Hülle bilden die sogenannten Sonnenflecken. Manche Beobachter wollen auf den Himmelskörpern vieles wahrgenommen haben, was eine Aehnlichkeit zwischen ihnen und der Erde darthun sollte, der Verfasser hat keine Spur davon wahrgenommen und führt einige Beispiele an; dagegen hebt er die Aehnlichkeit, welche wahrscheinlich zwischen dem Mars und der Erde stattfindet, besonders hervor. Während man durch blosses Beschauen nur wenig von den Planeten erfahren kann, zeigt der Verfasser, wie man mittelst der Beobachtung ihrer Trabanten ihre Masse und, durch Verbindung derselben mit ihrer Grösse, ihre Dichtigkeit bestimmen kann.

Die Abhandlung „Ueber den Mond“ verdankt ihre Entstehung dem Erscheinen der Karte von Beer und Mädler. Die ungleichförmige Bewegung des Mondes in seiner Bahn und seine gleichförmige Axendrehung werden besprochen, wie auch die Gründe, wesshalb beide von gleicher Dauer sind. Aus

der Vereinigung beider Bewegungen entspringen scheinbare Schwankungen des Mondes, in Folge deren wir etwas mehr als seine halbe Oberfläche zu sehen bekommen. Der erste Meridian des Mondes wird erklärt und ausserdem gezeigt, warum nothwendig seine kugelförmige Oberfläche auf eine Ebene projicirt werden muss. Der Verfasser zeigt, was möglicherweise auf einer Karte vom Monde dargestellt werden kann und beweist ausführlicher als oben, dass man keine Atmosphäre auf demselben annehmen könne. Er gibt hierauf eine Uebersicht dessen, was diese Karte nebst dem sie begleitenden Werke über die Oberfläche des Mondes gelehrt haben, als die Höhen der Berge, die Bildungen der letztern, die Ringgebirge und Crater. Die beiden letztern hat man „als die Ueberreste von Aufblähungen anzu-„sehen, welche die Oberfläche des Mondes im mehr oder weni-„ger flüssigem Zustande erfahren hat.“ Eine fast wörtlich gleichlautende Erklarung vernahmen wir vor Jahren aus dem Munde des genialen Schinkel.

Ausser der Craterform gibt es auf dem Monde unsern Alpen ähnliche Gebirge, die Längenthäler fehlen aber durchaus. Einzelne Theile des Mondes haben verschiedene Lichtstärken, für die so genannten Rillen weiss der Verfasser keine Erklärung zu geben. Er schliesst diese Abhandlung mit der Erwähnung der grossen Steilheit und Rauhigkeit der Mondberge und ihrer Unveränderlichkeit.

Die nun zu besprechende Abhandlung, im Werke die zweite, hat den Titel: Ueber das, was uns die Astronomie von der Gestalt und dem Innern der Erde lehrt. Der Verf. erklärt zunächst diejenige Oberfläche der Erde, von welcher in astronomischer Beziehung allein die Rede sein kann und wonach man sich die Erde als mit einer stillstehenden Wassermenge bedeckt vorzustellen hat. Aus zwei Ursachen ist die Gestalt der Erde hervorgegangen, aus der allgemeinen Anziehung oder der Schwere und der Axendrehung. Wie aus beiden eine abgeplattete Gestalt hervorgehen musste, wird klar gemacht; Newton hat es zuerst bewiesen. Dieser fand, indem er die Erde überall gleich dicht annahm, die Abplattung $=\frac{1}{230}$, wogegen diese nur $=\frac{1}{576}$ sein würde, wenn in der Nähe des Mittelpunkts der Erde die Dichtigkeit ihren allergrössten Werth hätte. Diese Grenzwerthe konnte man durch Rechnung finden, die Beobachtung musste den wirklichen Werth der Abplattung ergeben und aus dieser kann man, mittelst obiger Zahlen, auf das wirkliche Verhältniss der Dichtigkeit im Innern der Erde schliessen.

Nach Clairaut sollte man die Zunahme der Schwere vom Aequator bis zu den Polen mittelst Pendelschwingungen bestimmen, aus dergleichen Versuchen an verschiedenen Punkten wurde eine Abplattung $=\frac{1}{288}$ hergeleitet. Diese erste Methode, die letztere durch Beobachtungen zu finden, bedarf astronomischer Zeitbestimmungen, um die Dauer der Schwingungen zu ermitteln. Die zweite Methode beruht auf astronomischen Beobachtungen des Mondes. Dieser wird, wie wir bereits erwähnt haben, anders

durch eine kugelförmige Erde, als durch eine abgeplattete angezogen. Die unter der ersten Voraussetzung angestellte Berechnung seines Laufes kann nicht mit den Beobachtungen übereinstimmen. Laplace fand durch die bereits erwähnte Nutation eine Abplattung $=\frac{1}{305}$. Die dritte Methode besteht in einer wirklichen Messung auf der Erdoberfläche, einer so genannten Gradmessung. Diese wird beschrieben und es wird eine kurze Uebersicht der verschiedenen Gradmessungen gegeben. Die grosse französische unterwirft der Verfasser einer scharfen Kritik und zeigt, dass die erst nach der Aufstellung des Meters ausgeführten Gradmessungen die Länge des Erdquadranten genauer kennen gelehrt haben. Nach dem von Bessel hergeleiteten Resultate aller bisherigen Gradmessungen kann man keine regelmässige Figur der Erde angeben, welche sie alle zugleich erklärte. Die übrig bleibenden Unterschiede deuten Unregelmässigkeiten in der Figur der Oberfläche an, welche auf eine unregelmässige Vertheilung der Massen von verschiedener Dichtigkeit im Innern schliessen lassen. Jede einzelne Gradmessung ergibt die Krümmung eines Stückes der unregelmässig geformten Oberfläche, nicht aber, wie man früher erwartete, die Gestalt ihrer ganzen regelmässigen Oberfläche. Die von Bessel aus allen Gradmessungen hergeleitete mittlere Grundform der Erde hat eine Abplattung $=\frac{1}{298}$, von dieser mittlern Oberfläche weicht die wirkliche bald nach innen, bald nach aussen ab. Am Schluss der Abhandlung werden die Instrumente und Operationen bei einer Gradmessung beschrieben.

Die 8. Abhandlung hat die Ueberschrift: Ueber Mass und Gewicht im Allgemeinen und das Preussische Längenmaass im Besondern.

Es werden zunächst die bestimmten Masse verschiedener Länder besprochen und wir erfahren, wie schwierig ein gemeinschaftliches überall einzuführen sei. Drei Urmasse, ein Längenmass, ein Mass für flüssige Körper und Getreide und eines für Gewichte sind erforderlich, um ein Maasssystem festzusetzen, dieses muss bestimmt und unveränderlich sein. Jm J. 1734., als Bouguer und Condamine unter dem Aequator, Maupertuis aber unter dem Polarkreise eine Gradmessung ausführen sollten, wurden hierzu zwei Exemplare der Toise von Eisen angefertigt. Das eine derselben wurde später durch Schiffbruch beschädigt, das andere kam unversehrt zurück und wird die Toise de Perou genannt. Dieselbe stellt die Einheit des französischen Längenmasses bei 13° R. dar. In England hatte man bis 1758 ein aus den Zeiten der Elisabeth herrührendes Exemplar der dortigen, Yard genannten, Längeneinheit. Dasselbe bestand aus Messing und da man es im J. 1758 als unvollkommen erkannte, verfertigte Bird ein neues Urmass, den Standard Yard 1757. Dasselbe ward erst im J. 1824 für die gesetzmässige Längeneinheit erklärt, war aber, wie Baily im J. 1834 fand, zur Regulirung anderer Masse nicht geeignet, wesshalb sein Untergang beim Brande der Parlamentshäuser nicht zu beklagen ist.

Der Verfasser kritisirt hier, wie in der vorhergehenden Abhandlung, das der Erdmessung entnommene metrische System der Franzosen und spricht sich überhaupt gegen ein derartiges Natur- und Urmass aus. Aehnlich verhält es sich mit dem Naturmasse, welches der Länge des Secundenpendels zu entnehmen wäre. Den ersten Vorschlag hierzu hatte Huygens bereits in der Mitte des 17. Jahrhunderts gemacht. Damals wusste man noch nichts von der Verschiedenheit dieser Länge an verschiedenen Orten der Erde, eine Folge der Abplattung, die gefundene Länge hätte also nur für Einen Ort Gültigkeit gehabt. Wenn später Borda und Kater die Länge des Pendels bestimmt haben, so zeigt Bessel die Fehler dieser Bestimmungen nach, indem die mangelhafte Schärfe der Schneide und der Widerstand der Luft nicht berücksichtigt worden waren. Der Verfasser erklärt sich demnach gegen ein Urmass, welches zu einer von der Natur gegebenen Länge ein bestimmtes Verhältniss haben soll, weil man diese nie mit absoluter Genauigkeit bestimmen kann. Er verlangt aber, dass ein einzuführendes Mass

1) völlig unzweideutig gemacht werde,
2) durch jedes Erfolg verheissende Mittel erhalten werde,
3) dass Mittel ergriffen werden, möglichst vollkommene Copien mit möglichst grösster Leichtigkeit erhalten zu können.

Hierauf bespricht der Verfasser speciell seine Arbeiten in Betreff der Regulirung des preussischen Längenmasses im Jahre 1835. Bei der Erklärung desselben im J. 1816 waren einige Unbestimmtheiten übrig geblieben, statt des damaligen Urmasses ist ein neues angefertigt worden, welches gegen Abnutzung und Beschädigung gesichert ist, leicht übertragen werden kann und unverändert bleiben muss. Dasselbe verhält sich zum französischen wie 139,13 : 144, diese Zahlen sind das Resultat 48 einzelner Messungen, welche so gut mit einander übereinstimmen, dass der mittlere Fehler nur $\frac{1}{27000}$ Linie beträgt. Zur Vergleichung hat eine von Fortin verfertigte Copie der Toise de Perou gedient, welche Arago und Zahrtmann mit dem Original verglichen haben. Der Apparat, welcher zur Vergleichung von Copien mit dem von Baumann verfertigten preussischen Urmasse dient, so wie die Operation der Vergleichung wird beschrieben. Besonders schwierig war es hierbei, die erforderliche beständige Temperatur herzustellen. Die dänische Regierung hat bereits dasselbe Mass in ihrem Lande eingeführt.

Die 6. Abhandlung ist betitelt:

Ueber Flut und Ebbe.

Diese Erscheinung sah man vor Newton als ein Zeichen des Lebens der Erde an, die allgemeine Anziehung des letztern setzt uns in den Stand, Jahrhunderte lang vorauszubestimmen, wann an einem gegebenen Tage und bis zu welcher Höhe eine Flut eintreten muss. Newton's Naturlehre hat die Flut und Ebbe von allem Wunderbaren entkleidet und in den Kreis des Nothwendigen zurückgeführt. Die ganze Erscheinung wird,

ihrer Dauer und ihrem Verlauf nach, beschrieben und Figuren dienen zur Erläuterung. Auf einer idealen, ganz mit Wasser bedeckten Erde würde der Verlauf ein anderer sein, als er auf der wirklichen Erde ist. Im erstern Falle würde jedes Viertel der Erde, welches Flut hat, etwa 100 Cubikmeilen Wasser mehr enthalten, als jedes Ebbe habende Viertel. Der grössere Theil der Strömung von Osten gegen Westen, welche das Meer hat, ist vermuthlich der Flut und Ebbe zuzuschreiben, der andere Theil muss Unterschieden der Temperatur zugeschrieben werden. Die einzelnen Continente verändern die Richtungen der Strömungen, aber umgekehrt lösen diese Theile der einzelnen Küsten ab und verändern so ihre Gestalt. Die Form der Küsten wirken auf die Zeit und Höhe der Flut ein, welche Einwirkung nicht mehr berechnet werden kann; hier muss die Beobachtung zu Hülfe gezogen werden. Der Erfahrung zufolge ist Höhe und Zeit der Flut vom Stande des Mondes gegen die Sonne und Erde, sowohl der Richtung als Entfernung nach, abhängig. Die Flut und Ebbe zeigt sich gar nicht oder nur unbedeutend in kleinen eingeschlossenen Meeren, vielmehr nur im Weltmeere, und die Franzosen und Engländer haben in diesem eigene Thürme zur Beobachtung dieser Erscheinung erbaut. Das von diesen gelieferte Material dient zum Beweise der aus Newton's Lehre der Schwere gezogenen Folgerungen. — Zur Erklärung der mechanischen Gesetze, welche die Flut und Ebbe befolgen, erklärt der Verfasser auf kurze Weise die Kräfte, ihre Richtungen, Zusammensetzung und erwähnt der Reibung. Mittelst dieser vorausgeschickten Erklärungen zeigt derselbe deutlich die Wirkung der Sonne und des Mondes auf die Erde und ihre flüssige Hülle, eben so erhält man eine deutliche Vorstellung von der geringen Einwirkung der mächtigen Sonne auf diese Erscheinung, im Vergleich mit der des weit kleinern Mondes, weil hierbei hauptsächlich der Unterschied der Entfernungen in Betracht kommt. Die Wirkung der Sonne beträgt nur $^2/_5$ von der des Mondes, beide erfolgen zugleich beim Neu- und Vollmonde und es entstehen so die grössten Fluten; bei den Mondvierteln trifft die Flut des einen Körpers mit der Ebbe des andern zusammen und daher ist hier die erstere am kleinsten. Besonders beim Monde ist auch sein Abstand von der Erde in Betracht zu ziehen. Die oben erwähnten Thürme liefern, gleich den Sternwarten, Materialien zur Berichtigung unserer Kenntniss vom Lauf und der Masse der Sonne und des Mondes. Nach Laplace's Bestimmungen befindet sich das Meer im Gleichgewicht, eine Ueberschwemmung des Festlandes ist daher nicht zu besorgen.

Die Ueberschrift der 12. Abhandlung „Gleichgewicht und Bewegung" erregte uns Zweifel, ob über diesen Gegenstand ein für Dilettanten deutlicher und unterhaltender Vortrag gehalten werden könne; der geniale Verfasser hat aber beide Schwierigkeiten überwunden. Er erklärt zunächst die Kraft, welche wir nur durch ihre Wirkung erkennen, so wie diese auch ihre Grösse bestimmt. Indem die Wirkung einer bestimmten Kraft als Einheit angenommen wird, kann man jede andere Kraft durch eine Zahl ausdrücken und so die Betrachtung der Kräfte zum Gegenstand der Mathematik machen. Bei dieser Gelegenheit schildert der Verfasser die Kraft der neuern Mathematik und zeigt den

grossen, durch Decartes herbeigeführten, Fortschritt von der ältern zur neuern um so deutlicher, als er ein passendes Beispiel anführt und bespricht. Er deutet an, wie die Aufsuchung der, jeder Frage angemessenen, mathematischen Operation zur Entdeckung der Analyse des Unendlichen durch Newton und Leibnitz geführt hat und wie in der neusten Zeit ein besonderer Zweig der Mathematik, der mathematische Calcül entstanden ist. Nach diesen und mehrern andern nicht unmittelbar zur Sache gehörenden Betrachtungen kehrt der Verfasser zur Mechanik zurück und erklärt die Masse, die bewegende Kraft und das Gleichgewicht.

Archimedes ging vom Gleichgewicht der gleicharmigen Wage aus, Galilei und seine Nachfolger vom Parallelogramm der Kräfte, Johann Bernoulli fügte diesem den Grundsatz der virtuellen Geschwindigkeiten hinzu, dessen Wahrheit Lagrange auf einfache Weise bewiesen hat. Dieser Grundsatz hat den grössten Nutzen für die Vervollkommnung der Lehre vom Gleichgewicht — der Statik. Einige hervorragende Sätze dieser Lehre werden angeführt, namentlich der Schwerpunkt und die Figuren der Körper, z. B. die Figur der Erde und die Anziehung einer Kugel auf Punkte, welche inner- oder ausserhalb derselben liegen. Findet kein Gleichgewicht unter den auf einen Körper einwirkenden Kräften statt, so wird dieser, wenn er ruht, sich zu bewegen anfangen und wenn er sich bereits bewegt, seine Geschwindigkeit, oder Richtung oder beide zugleich ändern. Durch d'Alembert's Grundsatz, wonach die Kräfte, welche die verlorenen oder gewonnenen Bewegungen der einzelnen Massentheile irgend eines Systems zu erzeugen fähig sind, unter einander im Gleichgewicht stehen, werden die Aufgaben der Lehre von der Bewegung — der Dynamik — auf die Statik zurückgeführt. Speciell besprochen und durch interessante Beispiele erläutert wird das Gesetz der Bewegung des Schwerpunktes, das Gesetz der Winkelflächen und das Gesetz der lebendigen Kraft. Das letztere gibt dem Verfasser Gelegenheit, des perpetuum mobile zu erwähnen und die Fruchtlosigkeit, dasselbe zu suchen, aus einander zu setzen. Die Aufgabe der Mechanik ist erfüllt, wenn sie jede Frage hinsichtlich des Gleichgewichts und der Bewegung in eine bestimmte Forderung verwandelt hat, welche der mathematische Calcül erfüllen muss. So weit es diesem nach seinen neusten Fortschritten möglich ist, erfüllt er seine Aufgabe, die Mechanik aber hat die ihrige ganz erfüllt.

Die 10. Abhandlung ist überschrieben: Ueber Wahrscheinlichkeits-Rechnung. Es wird zunächst gezeigt, was man für gewiss oder für wahrscheinlich zu halten habe; im gemeinen Leben wird beides bisweilen mit einander verwechselt. Die ganze Theorie der Wahrscheinlichkeiten beruht auf dem sogenannten Zufalle; an einem Beispiele wird erläutert, welchen Sinn man mit diesem Worte verbindet. Man hat Mittel gesucht, die sogenannten Zufälle im Allgemeinen zu beurtheilen, Jacob Bernoulli brach in seinem 1713 herausgegebenen Werke „ars conjectandi" die Bahn, Laplace hat in seinem grossen Werke die vielfältigen spätern Untersuchungen der Mathematiker vor Augen gelegt.

Ein Würfel dient dem Verfasser als Beispiel, um das Mass der Wahrscheinlichkeiten zu erläutern und zu zeigen, wie man aus der Beobachtung auf die Beschaffenheit der Ursache schliessen kann. Ein anderes Beispiel dient dazu zu zeigen, wie man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmt angeben und von dieser Angabe Anwendung machen kann. Mit der Anzahl der zu Grunde gelegten Beobachtungen nimmt das bestimmte Mass der Wahrscheinlichkeit an Richtigkeit zu und zuletzt wird der wahrscheinliche Fehler so klein, dass das herausgebrachte Verhältniss nicht mehr merklich von der Wahrheit abweicht. Dagegen wird durch Beispiele gezeigt, wie man fälschlich ein Ereigniss für wahrscheinlich halten konnte, weil die zu Grunde liegenden Beobachtungen nicht richtig angestellt waren.

Durch die astronomischen Beobachtungen erhält man nie den wahren, sondern nur den wahrscheinlichen Werth und diejenige Bestimmung desselben Gegenstandes ist die beste, deren wahrscheinlicher Fehler am kleinsten, deren Wahrscheinlichkeit also am grössten ist. Die Wahrscheinlichkeits-Rechnung hat gelehrt, mittelst beliebig vieler Beobachtungen eines Himmelskörpers seine beste Bahn zu bestimmen, vorher hing diess von der Geschicklichkeit des Rechners ab. Dieselbe Rechnung lehrt die Unsicherheit des gewonnenen Resultats kennen und diese dient theils dazu, unter verschiedenen Resultaten das beste auszuwählen, theils zu beurtheilen, wie weit man dem Resultate vertrauen dürfe. Die Anwendung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf die astronomischen Beobachtungen hat auch Angriffe erlitten, welche der Verfasser mit gewichtigen Gründen zurückweist, so wie er auch den Grund angibt, warum er diese Betrachtungen nicht auf andere Wissenschaften angewandt hat.

Die letzte Abhandlung, welche wir zu besprechen haben, ist die 9., ihr Titel ist: Ueber den Magnètismus der Erde.

Diese Abhandlung ist die einzige, deren Thatsachen ohne Beiträge des Verfassers sind, wie er selbst am Eingange erwähnt. Die Anziehungskraft und Polarität der magnetischen Körper, die magnetische Abweichung oder Declination und die Neigung oder Inclination, wie auch der magnetische Meridian werden erklärt. Die Declination hat Columbus, die Inclination Robert Norman entdeckt, beide sind Wirkungen der magnetischen Kraft der Erde. Beide Erscheinungen sind an verschiedenen Orten der Erde, sowohl während eines Tages als während grösserer Zeiträume, verschieden. Diese Verschiedenheit kann zur Auffindung der geographischen Länge auf dem Meere dienen, wesshalb Edmund Halley bereits 1700 eine Karte für die Abweichungen, Wilcke 1768 eine ähnliche für die Neigungen an den einzelnen Punkten auf dem Meere entwarf.

Zur Richtung der magnetischen Kraft kommt noch ihre Stärke oder Intensität, welche zuerst Humboldt an vielen Punkten der Erde bestimmt hat. Mehrere namentlich aufgeführte Reisenden haben später derartige Untersuchungen angestellt. Auch die Intensität hat an einzelnen Punkten der Erde verschiedene Werthe, welche man mittelst Karten anschaulich gemacht hat.

Nur in Bezug auf die Declination hat man bis jetzt die tägliche Veränderung des magnetischen Zustandes der Erde untersucht, dieselbe ist von 8 Uhr Morgens bis 1 Uhr Mittags am grössten im April, etwa 15′, am kleinsten im December. Diese Resultate verdankt die Wissenschaft Gauss, welcher einen eigenen Apparat zu diesem Behuf construirt hat. Ausser diesen regelmässigen Veränderungen treten andere plötzlich, und zwar an den verschiedensten Orten der Erde gleichzeitig, ein. Diese zu erforschen, hatte Humboldt bereits 1806 und 1807 gleichzeitige Beobachtungen an verschiedenen Orten veranlasst, die Zeitumstände brachten diese in's Stocken. Arago fand durch ähnliche Beobachtungen unter anderm einen Einfluss der Nordlichter auf die Magnetnadel und zwar einen gleichzeitigen in Paris und Casan. Humboldt rief von 1828—1830 aufs neue gleichzeitige Beobachtungen an 6 Orten ins Leben, allein an Genauigkeit wurden die bisherigen Beobachtungen bei weitem durch diejenigen übertroffen, welche von 1836 an Gauss an verschiedenen Orten mittelst des bereits erwähnten Apparates herbeiführte. Die Gleichzeitigkeit dieser Veränderungen ist nun durch unzählige Beobachtungen, welche an den verschiedensten Orten scharf angestellt worden sind, bestätigt.

Wie man sich die Wirksamkeit der magnetischen Kraft in einer Nadel zu denken, damit jedes Theilchen der letztern wieder einen besondern Magneten bilde und diese Kraft durch Kunst hervorgerufen werde, wird ausführlich besprochen. Wir erfahren, dass die magnetische Kraft wie die Schwere dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional sei; diess haben Coulomb, Hansteen und besonders vollständig Gauss durch Versuche dargethan. Hieraus folgt die Wirkung eines magnetischen Körpers und sein sogenannter freier Magnetismus. Diesen wird man schwerlich jemals auf geradem Wege durch Rechnung an jedem Punkte der Erde kennen lernen, die Erscheinungen, unterstützt durch das Gesetz, müssen uns dahin führen.

In der Astronomie suchte man, ehe man die Erklärung einer Erscheinung geben konnte, ihren Grund zu errathen. Copernicus, Kepler und Newton folgen auf einander, dieser erklärte die Bewegung der Himmelskörper. Eben so dachten sich Euler und Tobias Mayer, zur Erklärung der magnetischen Erscheinungen, einen in der Erde befindlichen Magneten. Hansteen nahm, nachdem die Erscheinungen vervielfältigt waren, deren zwei an. Gauss verlässt alle Annahmen und bestimmt die unzweideutigen Bedingungen, denen das Hervortreten der magnetischen Kraft auf der Oberfläche der Erde durch ihr Gesetz selbst unterworfen ist. Diese Erklärung oder, astronomisch zu sprechen, diese Elemente gelten nur für eine bestimmte Zeit, Gauss selbst hat sie mit 103 beobachteten Declinationen, 102 Inclinationen und 95 Intensitäten verglichen, Erman hat auf zwei Karten derartige Vergleichungen in Bezug auf Declination dargestellt. Am Schluss der Abhandlung werden die vielfachen Untersuchungen, welche Gauss in Gemeinschaft mit Wilhelm Weber über den Magnetismus angestellt hat, besprochen.

Hiermit ist meine Aufgabe, den Inhalt dieses Werkes in Auszügen anzudeuten, beendet; sollte diese Darstellung dazu dienen, dem trefflichen Werke manchen Leser zuzuwenden, so würde ich mich vollkommen belohnt fühlen. Die Erinnerung an den genialen Verfasser wird dadurch in jedem Leser erweckt und rege erhalten werden.

XII.

Démonstration des formules de Mr. Gauss dans la Trigonométrie sphérique.

Par

Monsieur F. Arndt,

Docteur en Philosophie à Stralsund.

On sait, que les relations entre les six parties d'un triangle sphérique, connues sous le nom de celles de Mr. Gauss, ont été déduites fréquemment des analogies de Néper; mais celles-ci résultant de celles-là par une simple division, il est, ce me semble, plus naturel, de démontrer les formules de Mr. Gauss sans avoir recours aux analogies de Néper. Il est vrai quelques auteurs ont donné des démonstrations directes de ces formules; mais toutes ces démonstrations n'étant pas assez courtes pour un objet si élémentaire, j'ai jugé utile de donner ici la mienne.

En désignant les trois côtés du triangle sphérique par a, b, c; les angles opposés resp. par A, B, C, la formule connue $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ donne

$$\cos a = \cos(b-c) - 2 \sin b \sin c \sin \tfrac{1}{2}A^2,$$

$$\cos a = \cos(b+c) + 2 \sin b \sin c \cos \tfrac{1}{2}A^2.$$

Ajoutez d'une part chaque membre de ces équations à l'unité, et le soustrayez d'autre de celle-ci, faisant usage des formules

$$2\cos\frac{1}{2}a^2 = 1 + \cos a,\quad 2\sin\frac{1}{2}a^2 = 1 - \cos a,$$

vous aurez

$$[1]\ldots\ \cos\frac{1}{2}a^2 = \cos\frac{1}{2}(b-c)^2 - \sin b\sin c\sin\frac{1}{2}A^2,$$

$$[2]\ldots\ \sin\frac{1}{2}a^2 = \sin\frac{1}{2}(b-c)^2 + \sin b\sin c\sin\frac{1}{2}A^2,$$

$$[3]\ldots\ \cos\frac{1}{2}a^2 = \cos\frac{1}{2}(b+c)^2 + \sin b\sin c\cos\frac{1}{2}A^2,$$

$$[4]\ldots\ \cos\frac{1}{2}a^2 = \sin\frac{1}{2}(b+c)^2 - \sin b\sin c\cos\frac{1}{2}A^2.$$

Au moyen de l'équation $\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a$, ou bien des équations précédentes, en changeant les quantités a, b, c, A en les suppléments $180^0 - A$, $180^0 - B$, $180^0 - C$, $180^0 - a$, on trouvera les quatre suivantes:

$$[1']\ldots\ \sin\frac{1}{2}A^2 = \cos\frac{1}{2}(B-C)^2 - \sin B\sin C\cos\frac{1}{2}a^2,$$

$$[2']\ldots\ \cos\frac{1}{2}A^2 = \sin\frac{1}{2}(B-C)^2 + \sin B\sin C\cos\frac{1}{2}a^2,$$

$$[3']\ldots\ \sin\frac{1}{2}A^2 = \cos\frac{1}{2}(B+C)^2 + \sin B\sin C\sin\frac{1}{2}a^2,$$

$$[4']\ldots\ \cos\frac{1}{2}A^2 = \sin\frac{1}{2}(B+C)^2 - \sin B\sin C\sin\frac{1}{2}a^2.$$

C'est par une simple combinaison de ces huit équations qu'on obtient les quatre formules de Mr. Gauss, savoir

la première:

$$\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(b-c) = \pm\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B+C)$$

par $[1].\cos\frac{1}{2}A^2 - [4']\cos\frac{1}{2}a^2$,

la seconde:

$$\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b-c) = \pm\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B-C)$$

par $[2].\cos\frac{1}{2}A^2 - [2']\sin\frac{1}{2}a^2$,

la troisième:

$$\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(b+c) = \pm\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(B+C)$$

par $[3].\sin\frac{1}{2}A^2 - [3']\cos\frac{1}{2}a^2$,

la quatrième:

$$\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b+c)=\pm\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(B-C)$$

$$\text{par}[4].\sin\frac{1}{2}A^2-[1']\sin\frac{1}{2}a^2.$$

En faisant le calcul prenez $\frac{1}{2}\sin A$ au lieu de $\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$, de même $\frac{1}{2}\sin a$ au lieu de $\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a$, remarquez ensuite qu'on a toujours l'équation $\sin b\sin c\sin A^2=\sin B\sin C\sin a^2$, qui résulte immédiatement par la multiplication de ces formules connues: $\sin a\sin B=\sin A\sin b$, $\sin a\sin C=\sin A\sin c$.

Quant aux doubles signes dans les équations ci-dessus, pour lever le doute, je fais remarquer qu'on suppose ici un triangle sphérique dont tous les côtés et les angles n'excèdent pas 180°.

Cela posé, d'abord il est clair qu'il faut prendre le signe supérieur dans la première et quatrième équation, tous les sinus et cosinus étant positifs; mais ce qui concerne les deux autres, pour démontrer que le signe + a également lieu, voici une méthode pour y parvenir.

En substituant dans les équations $\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B$, $\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$, la valeur $\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$ à la place de $\cos a$ et faisant les réductions nécessaires, on obtiendra les équations suivantes:

$$\cos b\sin c=\sin b\cos c\cos A+\sin a\cos B,$$

$$\cos c\sin b=\sin c\cos b\cos A+\sin a\cos C;$$

desquelles on déduit $\sin(b\pm c)(1\mp\cos A)=\sin a(\cos C\pm\cos B)$, ou

$$1)\quad \sin(b+c)\sin\frac{1}{2}A^2=\sin a\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C),$$

$$2)\quad \sin(b-c)\cos\frac{1}{2}A^2=\sin a\sin\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}(B-C).$$

Maintenant la première équation de Gauss étant

$$\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(b-c)=\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B+C),$$

supposons qu'on prenne le signe inférieur dans la seconde, de manière qu'on ait

$$\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b-c)=-\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B-C),$$

la multiplication de ces deux équations donnerait

$$\sin(b-c)\cos\frac{1}{2}A^2 = -\sin a \sin\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}(B-C),$$

ce qui ne s'accorde pas avec la formule 2). De même s'il fallait prendre le signe inférieur dans la troisième équation, la multiplication de celle-ci par la quatrième donnerait

$$\sin(b+c)\sin\frac{1}{2}A^2 = -\sin a \cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C),$$

contre la formule 1).

Voilà donc généralement démontré qu'il faut prendre le signe supérieur dans toutes les quatre formules de Gauss, dès qu'on suppose qu'aucun côté et qu'aucun angle n'est plus grand que 180°.

Stralsund le 19. mai 1849.

XIII.

Ein Wort für die Romershausen'schen Messinstrumente den Herren Barfuss und Schneitler gegenüber.

Von dem

Herrn Dr. August Wiegand,

Oberlehrer an der Realschule zu Halle.

In den Schriften: „Handbuch der höhern und niedern Messkunde etc." von Dr. Barfuss, Weimar 1847. und „Die Instrumente und Werkzeuge der höhern und niederen Messkunst etc." von Schneitler, Leipzig 1848. sind auch die Romershausen'schen Messinstrumente theilweise einer Beurtheilung unterworfen worden, und zwar wird derselben in beiden

Schriften nur mit Geringschätzung und einer gewissen Wegwerfung gedacht. Keineswegs deshalb nun, weil ich in meiner Schrift. „Der geodätische Messapparat und sein Gebrauch" 2. Auflage. Halle. 1848. jene Instrumente als zweckmässig und vortheilhaft aufgeführt habe und durch die Urtheile genannter Herren meine Autorehre verletzt glaubte, sondern lediglich aus dem Grunde, weil ich die Romershausen'schen Instrumente durch längeren unausgesetzten Gebrauch hinlänglich zu erproben Gelegenheit hatte, nehme ich Veranlassung gegen das unbegründete und übereilte Urtheil jener Herren das Wort zu ergreifen. Hören wir zunächst die Herren über das Spiegeldiopter. Der besseren Vergleichung wegen setze ich die Urtheile beider gleich neben einander:

Schneitler sagt S. 56.:	Barfuss sagt S. 159.:
„Die Idee zu diesem Instrumente ist sehr einfach und nicht neu, da im Grunde das Fallon-sche Spiegellineal, ein zu dem beschränkten Gebrauche viel zu theures Instrument, dasselbe ist.	Der Gedanke zu diesem Instrumente ist äusserst einfach und keineswegs neu, denn das Fallon'sche Spiegellineal ist im Grunde dasselbe Werkzeug.
Bei *a* und *b* (Fig. 55.) befinden sich Diopteren, von denen jedes durch zwei messingene Stifte gebildet wird, die eine schmale Spalte zwischen sich lassen. Die Spalte des Objectivdiopters *b* ist jedoch etwas breiter als die des Oculardiopters *a*, damit man noch deutlich genug einen Fluchtstab durch dieselbe sehen kann. Gegen die Visirlinie *ab* ist nun der ebne Spiegel *cd* unter 45° Neigung gestellt und wenn daher ein Strahl *mn* so darauf fällt, dass er mit der Visirlinie *ab* einen rechten Winkel macht, so wird er in der Richtung dieser Linie reflektirt und geht folglich durch das Okulardiopter *a*.	Bei *a* und *b* (Taf. V. Fig. 10.) befinden sich Diopteren, von denen jedes durch zwei messingene Stifte gebildet wird, die eine schmale Spalte zwischen sich lassen. Die Spalte des Objectivdiopters *b* ist jedoch etwas breiter als die des Okulardiopters *a*, damit man noch mit gehöriger Helligkeit einen Absteckestab durch dieselbe sehen kann. Gegen die Visirlinie *ab* ist nun der ebene Spiegel *cd* unter 45° Neigung gestellt und wenn daher ein Strahl *mn* so darauf fällt, dass er mit der Visirlinie *ab* einen rechten Winkel macht, so wird er in der Richtung dieser Linie reflektirt und geht folglich durch das Okulardioper *a*.
Hieraus ergiebt sich der Gebrauch des Instrumentes leicht. Die ganze Vorrichtung ist in einem viereckigen prismatischen Gehäuse von 4″ Länge, das an der Seite entsprechende Ausschnitte hat und worin sich noch eine ähnliche zum Abstecken von Winkeln von 45° befindet.	Hieraus ergiebt sicht der Gebrauch des Instrumentes leicht etc. Die ganze Vorrichtung ist in einem viereckigen prismatischen Gehäuse von 4 Par. Zoll Länge angeordnet, worin zugleich sich noch eine ähnliche befindet, mit der man Winkel von 45° abstecken kann.

Ohne mich weiter auf eine Untersuchung einzulassen, ob Herr Schneitler von Herrn Barfuss oder ob beide von einem dritten wörtlich abgeschrieben haben, will ich nur so viel sagen, dass weder die Beschreibung noch die beigefügte Zeichnung die geringste Aehnlichkeit mit dem Romershausen'schen Spiegeldiopter haben, dass somit beide Herren das betreffende Instrument nicht einmal gesehen, geschweige denn geprüft haben und beide also urtheilen, wie der Blinde von der Farbe.

Das Romershausensche Spiegeldiopter*) hat mit dem Fallon'schen Spiegellineal nicht die geringste Aehnlichkeit — seine Diopter sind weder durch messingene Stifte gebildet, noch ist dasselbe in einem viereckigen Gehäuse eingeschlossen. Es hat dagegen die bequemere Form eines kleinen Taschenfernrohres, dessen Ocular zwei parallele Durchsichten enthält, welche mit einer auf das Objectivglas geätzten oder durch ein feines Haar gebildeten Richtungslinie correspondiren. Im Innern des Rohrs befinden sich zwei feine, für die Winkel von 90° und 45° unwandelbar rectificirte Metallspiegel. Diese Einrichtung gewährt vor allen anderen ähnlichen Instrumenten, wegen einfacher Brechung des Lichtstrahls, mehr Klarheit, Sicherheit und Leichtigkeit im Visiren aus freier Hand; sie gestattet die bei praktischen Messungen so überaus nützliche Construction des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks auf eine schnelle und leichte Weise und in Folge dessen nicht allein Horizontal-, sondern auch Höhenmessungen, sie macht die sofortige Bestimmung der Entfernung unzugänglicher Punkte bei coupirtem Terrain möglich und giebt die Factoren zur Flächenberechnung unmittelbar auf dem Felde.

Hieraus ergiebt sich nun von selbst, dass der von obigen Herren empfohlene, mir durch längeren Gebrauch übrigens ebenfalls vollkommen bekannte, alte Adamsche Winkelspiegel nicht die Hälfte der Leistungen des Romershausen'schen Spiegeldiopters für sich in Anspruch nehmen kann — abgesehen davon, dass seine doppelte Spiegelung und wandelbare Rektification wenig Klarheit und Sicherheit im Visiren gestattet. Hr. Barfuss hofft zwar die beim Spiegeldiopter angegebenen Vortheile auch auf den Winkelspiegel übertragen zu können und will zu dem Ende entweder zwei dergleichen Instrumente für die verschiedenen Winkelgrössen vorrichten oder vier Spiegel in einem Kasten anbringen. Letzteres möchte aber wohl schwer ausführbar sein und das complicirte Instrument sehr vertheuern, ohne dass es zugleich die Bequemlichkeit und Sicherheit des kleinen und billigen Spiegeldiopters erlangte.

Nicht besser wie mit den Beurtheilungen des Spiegeldiopters sieht es mit des Herrn Schneitler Urtheile über den Romershausen'schen Längenmesser (Diastimeter) aus, und ich glaube auch hier dreist behaupten zu können, dass der genannte Herr dieses Instrument ebenfalls nie gesehen, geschweige denn geprüft

---

*) Romershausens Spiegeldiopter und Längenmesser etc. Halle, 1845.

hat. Es liesse sich wenigstens dann gar nicht begreifen, wie derselbe jenes Instrument mit dem, nach ganz andern Grundsätzen und auf ganz verschiedene Weise construirten, uralten Pantometrum Pacecciauum zusammenstellen kann. Wunderlicher Weise stützt er sich hierbei auf ein im Jahre 1819 von Schulz-Montanus abgegebenes Urtheil, wonach dieses unter allen Distanzmessern der zweckmässigste und brauchbarste sein soll, indem es auf 10000′ nur einen Fehler von $\frac{1}{31}$ der ganzen Länge zulasse. Er fügt mit einer gewissen vornehmen Verachtung noch hinzu: „Abermals ein Beweis, was von allen solchen geometrischen Wunderwerken, an die ein Newton, Tob. Mayer, Hadley, Ramsden etc. nie gedacht (?) bei Messungen, wo es auf mehr als ungefähre Weitenbestimmungen ankömmt, zu halten ist.

Hierzu nur ein paar Bemerkungen. Schulz-Montanus konnte natürlich das jetzige Diastimeter des Dr. R. nicht kennen und es ist deshalb lächerlich, wenn sich Herr Schneitler auf das Urtheil desselben beruft; noch auffallender ist es aber, wenn er Nichts anerkennen will, woran nicht schon jene älteren berühmten Mathematiker gedacht haben. Er verneint dadurch jeden möglichen Fortschritt und setzt sich mit sich selbst in Widerspruch, indem seine Schrift doch den jetzigen vervollkommneten Standpunkt sämmtlicher Messapparate darstellen soll. Er hätte daher diesen schwierigen für Civil-Militairmessung wichtigen Distanzmessungen eine besondere Aufmerksamkeit widmen und sich kein absprechendes Urtheil darüber erlauben sollen, ohne sich vorher persönlich mit den neueren Instrumenten dieser Art bekannt zu machen.

Die Messung mit dem Romershausen'schen Diastimeter giebt bei genauer und richtiger Behandlung in gehöriger Sehweite der unmittelbaren Kettenmessung nichts nach und übertrifft dieselbe an Genauigkeit bei coupirtem Terrain. Es gewährt diese Vortheile durch das ihm zu Grunde liegende eigenthümliche Princip, wornach es bei constanter Tangente des parallaktischen Winkels nur den Radius ändert und deshalb auch bei Messungen sehr kleiner Winkel nach meinen sorgfältigsten Prüfungen dem kostbarsten Theodoliten nichts nachgiebt. Eine längere Einübung erfordert dies Instrument allerdings; das kann aber doch wahrlich! kein Vorwurf für dasselbe sein, sonst wäre auch das Urtheil eines ungeübten Schützen gerechtfertigt, dass eine Büchse nichts tauge, weil er nichts damit treffe.

Herr Dr. Barfuss scheint vom Romershausen'schen Diastimeter gar nichts gehört zu haben, denn er erwähnt nur den praktisch völlig unbrauchbaren Reichenbach'schen Distanzmesser. Eben so wenig scheint ihm, sowie auch Herrn Schneitler, das nicht minder interessante und zur Messung grösserer Entfernungen bestimmte Militairfernrohr*) bekannt zu sein. Schon beim ersten Gebrauche dieses Instruments überraschte mich die Genauigkeit der damit erlangten Resultate so ungemein, dass mir

*) Romershausen's Militairfernrohr etc. Halle 1848.

die allgemeinste Anerkennung desselben unzweifelhaft schien und meine Vermuthung wurde auch bestätigt zunächst durch das Urtheil des Königl. Preuss. Premierlieutenant Hellmuth*) sowie durch die zu meiner Kenntniss gekommenen Urtheile der vierten preussischen Artilleriebrigade und eines württembergischen Ingenieurofficiers**).

Ebenso unbekannt wie das vorige Instrument sind den Herren Schneitler und Barfuss das Romershausen'sche Spiegelniveau und das Reductionsniveau. Was das erstere betrifft, so habe ich damit ein Nivellement vom Geistthore in Halle längs der Magdeburger Chaussee und von da aus links seitwärts nach dem Bade Wittekind unternommen und dasselbe mit einem sehr genau gearbeiteten Nivellirinstrumente mit Fernrohr wiederholt. Ich habe mich da überzeugt, dass der Gebrauch von jenem diesem nicht nur nichts nachgiebt, sondern namentlich wegen bedeutenderer Abkürzung der Arbeit einen grossen Vortheil voraus hat. Seine vorzügliche Brauchbarkeit dürfte auch wohl aus der Thatsache hervorleuchten, dass die Nivellements der Prinz Wilhelms-Bahn vorzugsweise damit ausgeführt worden sind. Mit dem Reductionsniveau habe ich eigene Messungen zur Zeit noch nicht unternommen und enthalte mich deshalb jeden Urtheils, muss aber hinzufügen, dass ich es von den mit der Separation in der ungemein coupirten Wettiner und Löbejüner Gegend beschäftigt gewesenen Feldmessern habe ganz vorzüglich rühmen hören.

Möchten diese Mittheilungen die Folge haben, dass den Romershaushausen'schen Instrumenten die allseitige, verdiente Anerkennung zu Theil würde.

In Bezug auf das sonst so treffliche Werk des Herrn Schneitler können wir schliesslich den Wunsch nicht unterdrücken, dass der Herr Verfasser bei einer neuen Auflage auch den neueren Instrumenten eine gerechte und aus eigener Prüfung hervorgegangene Würdigung zu Theil werden und nicht nur dem Alten und Bekannten allein das Wort reden möge.

---

*) Die Distanz-Messungen der Artillerie u. s. w. mit Hülfe des Romershausen'schen Längenmessers. Von O. Hellmuth, Premier-Lieutenant im Preuss. 27. Inf.-Regiment.

**) So eben erfahre ich durch den hiesigen Mechanikus Herrn Julius Schmidt, dass in Folge zahlreicher Bestellungen, eine Menge Militair-Fernröhre nach Schleswig-Holstein abgehen.

XIV.

Vom Maximum und Minimum, dem eine oder zwei Gerade unterworfen sind, welche von 1 oder 2 gegebenen Punkten an einen gesuchten, in einer Curve gelegenen, Punkt gehen, Punkte und Curve in derselben Ebene gedacht.

Von

Herrn Brenner,

Lehrer zu Tuttlingen im Königreich Würtemberg.

Sind die Coordinaten der Curve durch x und y, und die des gegebenen Punktes durch a und b dargestellt, so ist für den ersten Fall fragliche Linie

$$u = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2},$$

und man hat als Bedingung des *M.M.*

$$\partial u_x = -\frac{(a-x) + (b-y)\partial y_x}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}} = 0,$$

woraus folgt

$$-\frac{1}{\partial y_x} = \frac{b-y}{a-x}.$$

$-\frac{1}{\partial y_x}$ ist die Tangente des Winkels, den die Normale der Curve mit der Abscissenaxe macht. Ebenso ist $\frac{b-y}{a-x}$ die Tangente des Winkels, den eine durch die Punkte (a, b) und (x, y) gehende Linie mit derselben Axe bildet, woraus folgt, dass die gesuchte Linie mit der Normale der Curve zusammenfällt.

Im zweiten Fall seien (Taf. II. Fig. 3.) die beiden Punkte A und B mit den Coordinaten a und b, a' und b', und die Curve CV, während OX die Abscissenaxe darstellt. Ist M der gesuchte Punkt, und ziehe ich AM und BM, so ist die Summe dieser beiden Geraden

$$u = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} + \sqrt{(a'-x)^2 + (b'-y)^2}.$$

Die Bedingung des *M. M.* liefert nun die Gleichung

$$\partial u = -\frac{a-x+(b-y)\partial y_x}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}} - \frac{a'-x+(b'-y)\partial y_x}{\sqrt{(a'-x)^2+(b'-y)^2}} = 0,$$

woraus folgt

$$-\frac{1}{\partial y} = \frac{(b'-y)\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2} + (b-y)\sqrt{(a'-x)^2+(b'-y)^2}}{(a'-x)\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2} + (a-x)\sqrt{(a'-x)^2+(b'-y)^2}}.$$

Theilen wir nun den Winkel AMB durch LM in zwei gleiche Theile und untersuchen, ob nicht LM die Normale der Curve ist. In diesem Falle müsste identisch sein $\operatorname{tg}(LMN) = -\frac{1}{\partial y}$, indem wir MN parallel OX ziehen. Wir haben aber

$$\operatorname{tg}(2LMN) = \operatorname{tg}(BMN + AMN) = \frac{(b-y)(a'-x+)(b'-y)(a-x)}{(a-x)(a'-x)-(b-y)(b'-y)}.$$

Da man aber die Gleichung hat $\operatorname{tg} 2Z(1 - \operatorname{tg} Z^2) = 2\operatorname{tg} Z$, so setze man in diese Gleichung $Z = LMN$ und für $\operatorname{tg} LMN$ und $\operatorname{tg} 2LMN$ obige Werthe, während $-\frac{1}{\partial y}$ durch dessen Werth in x, y, a, b, a' und b' ersetzt wird. Macht man noch zur Abkürzung

$$\begin{aligned} a - x &= A, \\ a' - x &= A', \\ b - x &= B, \\ b' - x &= B'; \end{aligned}$$ so kommt endlich

$$\frac{AB'+A'B}{AA'-BB'}\left[1-\left(\frac{B'\sqrt{A^2+B^2}+B\sqrt{A'^2+B'^2}}{A'\sqrt{A^2+B^2}+A\sqrt{A'^2+B'^2}}\right)^2\right]$$
$$= 2.\frac{B'\sqrt{A^2+B^2}+B\sqrt{A'^2+B'^2}}{A'\sqrt{A^2+B^2}+A\sqrt{A'^2+B'^2}},$$

eine Gleichung, von deren Indentität man sich durch Reduction bald überzeugt. Es folgt hieraus, dass AM und BM mit der Normale gleiche Winkel machen; und zwar geht die Normale mitten zwischen A und B so hindurch, dass der eine Punkt auf der einen und der andere auf der andern Seite derselben gelassen wird, weil $2LMN = BMN + AMN$.

Will man nun die Aufgabe lösen:

Von einem gegebenen Punkt C an einen gesuchten in einer Curve gelegenen Punkt eine Gerade zu ziehen, die ein *M.M.* sei, so muss man in die Gleichung

$$\partial y_x(b-y) + a - x = 0$$

für y und ∂y_x die aus der Gleichung der Curve gezogenen Werthe substituiren und die Gleichung in Beziehung auf x auflösen. Oder kann man, auf Polarcoordinaten übergehend, statt der Gleichung

$$\partial y_x (b-y) + a - x = 0$$

eine andere aufstellen.

Es sei (Taf. II. Fig. 4.) die Curve LM, der gegebene Punkt A, OB die Axe, RM der Radius-Vector r, Winkel $MRB = w$, AN die Normale, so dass M den gesuchten Punkt darstellt, so ist bekanntlich

$$\operatorname{tg} NMR = \frac{\partial r}{r},$$

$$\operatorname{tg} ANB = \operatorname{tg}(w - NMR) = \frac{\operatorname{tg} w - \frac{\partial r}{r}}{1 + \operatorname{tg} w . \frac{\partial r}{r}};$$

demnach ist die Gleichung der Normale, die durch den Punkt A geht:

$y' - b = \dfrac{\operatorname{tg} w - \frac{\partial r}{r}}{1 + \operatorname{tg} w \frac{\partial r}{r}} (x' - a)$, wo x' und y' die Coordinaten der Normale.

Man hat aber für M $y' = r \sin w$ und $x' = r \cos w$, folglich

$$1) \qquad r \sin w - b = \frac{\operatorname{tg} w - \frac{\partial r}{r}}{1 + \operatorname{tg} w \frac{\partial r}{r}} (r \cos w - a),$$

welche noch mit der Gleichung der Curve zu verbinden ist, um r und w zu bestimmen.

Will man aber von zwei Punkten an einen in einer Curve gesuchten Punkt zwei Linien ziehen, deren Summe ein $M.M.$ sei, so ist

$$\operatorname{tg}(2MNB) \text{ (Taf. II. Fig. 4)} = \operatorname{tg}(2LMN) \text{ (Taf. II. Fig. 3.)}.$$

$$1 = \frac{(b-y)(a'-x) + (b'-y)(a-x)}{(a-x)(a'-x) - (b-y)(b'-y)},$$

während $\operatorname{tg} MNB = \dfrac{\operatorname{tg} w - \frac{\partial r}{r}}{1 + \operatorname{tg} w \frac{\partial r}{r}}$.

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$\operatorname{tg} 2MNB (1 - \operatorname{tg}^2 MNB) = 2 \operatorname{tg} MNB$, so hat man

$$2)\frac{(b-y)(a'-x)+(b'-y)(a-x)}{(a-x)(a'-x)-(b-y)(b'-y)}\left[1-\left(\frac{\operatorname{tg}w-\frac{\partial r}{r}}{1+\operatorname{tg}w\frac{\partial r}{r}}\right)^2\right]=2.\frac{\operatorname{tg}w-\frac{\partial r}{r}}{1+\operatorname{tg}w\frac{\partial r}{r}},$$

wo nur noch x durch $r\cos w$ und y durch $r\sin w$ zu ersetzen ist. Zur Anwendung des Obigen gehen wir auf einige specielle Aufgaben über.

Aufgabe 1.

Von einem gegebenen Punkte soll in einen noch gesuchten Punkt eines Kegelschnittes eine Gerade gezogen werden, die ein *M.M.* ist.

Auflösung.

Die allgemeine Gleichung für diese Art von Curven ist

$$r=\frac{p}{1+e\cos w}, \text{ woraus}$$

$$\partial r=\frac{pe\sin w}{(1+e\cos w)^2} \text{ und}$$

$$\frac{\partial r}{r}=\frac{e\sin w}{1+e\cos w}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{\operatorname{tg}w-\frac{\partial r}{r}}{1+\operatorname{tg}w\frac{\partial r}{r}}=\frac{\sin w}{e+\cos w}, \text{ und dadurch wird nach 1)}$$

$$p\sin w-b(1+e\cos w)=\frac{\sin w}{e+\cos w}[p\cos w-a(1+e\cos w)].$$

Die weiteren Entwicklungen und Reductionen liefern

$$3)\qquad pe\sin w+(1+e\cos w)[a\sin w-b(e+\cos w)]=0.$$

Hat man einen Werth w' gefunden, der dieser Gleichung beinahe genügt, so ist der Correctionswerth

$$h=-\frac{pe\sin w'+(1+e\cos w')[a\sin w'-b(e+\cos w')]}{pe\cos w'+(1+e\cos w')[a\cos w'+b\sin w']-e\sin w'[a\sin w'-b(e+\cos w')]}.$$

Geht man aber auf ein anderes Coordinatensystem über, so dass die Axe durch den Punkt A selbst geht, so wird das neue b' gleich Null und jenes a geht über in $a'=\sqrt{a^2+b^2}$. Die Winkel aber werden von RA angezählt. Setzt man nun $ARM=v$ und $ARB=v'$, so ist $w=v+v'$ und $\operatorname{tg}v'=\frac{b}{a}$, während ist

$$r=\frac{p}{1+e\cos(v+v')}.$$

Hierauf wird

$$\frac{\operatorname{tg}v-\frac{\partial r}{r}}{1+\operatorname{tg}v\frac{\partial r}{r}}=\frac{\operatorname{tg}v+e\operatorname{tg}v\cos(v+v')-e\sin(v+v')}{1+e\cos(v+v')+e\operatorname{tg}v\sin(v+v')}.$$

Gleichung 1) gibt somit

$$p\sin v=\frac{\operatorname{tg}v+e\operatorname{tg}v\cos(v+v')-e\sin(v+v')}{1+e\cos(v+v')+e\operatorname{tg}v\sin(v+v')}[p\cos v-a'(1+e\cos(v+v')],$$

welches nach allen Reductionen gibt

$$4)\qquad \frac{pe}{a'}\sin(v+v')+(\sin v-e\sin v')[1+e\cos(v+v')]=0.$$

Ist v'' ein Werth, der dieser Gleichung beinahe genügt, so hat man den Correctionswerth

$$h=-\frac{\frac{pe}{a'}\sin(v''+v')+(\sin v''-e\sin v')[1+e\cos(v''+v')]}{\frac{pe}{a'}\cos(v''+v')+\cos v''[1+e\cos(v''+v')]-e\sin(v''+v')(\sin v''-e\sin v')}.$$

Ist der gegebene Punkt nicht sehr weit von der Curve entfernt, so kann man für einen ersten Näherungswerth $\sin v=v$ und $\cos v=1$ setzen, weil v klein ist, und es entwickelt sich dann aus 4)

$$v=\frac{e\sin v'\left(1+e\cos v'-\frac{p}{a'}\right)}{e\cos v'\left(1+\frac{p}{a'}\right)+e+e^2\sin v'}.$$

Für einen Punkt, der in der grossen Axe der Curve selbst liegt, hat man $b=0$ und $v'=0$ und es ergibt sich sowohl aus 3) als auch aus 4)

$$\sin w(pe+a+ae\cos w)=0.$$

Diess liefert die vier Werthe

$$w=0,$$
$$w=180^0,$$

$\cos w=-\frac{p}{a}-\frac{1}{e}$, und wenn der Werth w' der letztern Gleichung entspricht,

$$w=360-w'.$$

Ist $\frac{p}{a}+\frac{1}{e}$ grösser als $+1$ oder -1, so gibt es nur zwei *M.M.* Punkte.

Um zu entscheiden, wie viele *M.M.* im Allgemeinen höchstens existiren, gehe man zur Bedingung $(a-x)+(b-y)\partial y_x=0$ zurück und verbinde sie zunächst mit der Gleichung für die Ellipse und Hyperbel $y^2=B^2\pm\frac{B^2x^2}{A^2}$, so wird man entwickeln

$$x^4-\frac{2A^2a}{A^2\pm B^2}x^3$$

$$+A^2.\left[\frac{A^2a^2\mp B^2b^2\pm(A^2\pm B^2)^2}{(A^2\pm B^2)^2}\right]x^2\mp\frac{2A^4a}{A^2\pm B^2}x\pm\frac{A^6a^2}{(A^2\pm B^2)^2}=0,$$

wodurch höchstens vier Werthe angezeigt werden. Für die Parabel aber ergibt sich bei Benützung ihrer Gleichung $y^2=2px$,

$$y^3+2py(p-a')-2p^2b=0;$$

wo a' die vom Scheitel an gerechnete Abscisse des Punktes A ist.

Will man aber die Gleichung 3) in Anwendung bringen, so muss man $e=1$ setzen und hat

$$p\sin w+(1+\cos w)[a\sin w-b(1+\cos w)]=0,$$

welches nach gehöriger Entwicklung gibt

$$\cos\tfrac{1}{2}w\left[\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^3+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w\left(\frac{2a+p}{p}\right)-\frac{2b}{p}\right]=0,$$

welches zuerst gibt $\frac{1}{2}w=90^0$ und $\frac{1}{2}w=270^0$. Beide Werthe liefern $w=180^0$, wodurch ein unendlich entfernter, folglich gar kein Punkt angezeigt wird. Die andere Gleichung

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^3+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w\left(\frac{2a+p}{p}\right)-\frac{2b}{p}=0$$

kann höchstens drei Werthe liefern, so wie es auch mit

$$y^3+2py(p-a')-2p^2b=0$$

der Fall ist. Demnach bietet die Parabel höchstens drei *M.M.* Punkte dar.

Für die Grenze, wo beide Gleichungen anfangen, zwei imaginäre Werthe zu liefern, hat man vermöge der Cardanischen Formel $b^2p-\left(\frac{2a+p}{3}\right)^3=0$, wenn man bedenkt, dass $a+a'=\frac{1}{2}p$.

Aufgabe 2.

Von zwei beliebig gelegenen Punkten an einen gesuchten in der Peripherie eines Kreises liegenden Punkt zwei Gerade zu ziehen, deren Summe ein *M.M.* sei.

Auflösung.

Es seien (Taf. II. Fig. 5.) von A und B an einen noch gesuchten Punkt D in der Peripherie eines um C beschriebenen Kreises zwei gerade Linien AD und BD zu ziehen, deren Summe ein $M.M.$ sei. Bezeichne ich die Coordinaten von A mit a, b und die von B mit a', b', die fragliche Summe mit u, so wie die Coordinaten des Punktes D mit x, y, während alle Coordinaten von C aus gerechnet werden, wo CX die Abscissenaxe ist, so haben wir folgender Bedingung zu genügen:

$$\frac{a-x+(b-y)\partial y_x}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}+\frac{a'-x+(b'-y)\partial y_x}{\sqrt{(a'-x)^2+(b'-y)^2}}=0.$$

Die Gleichung des Kreises

$r^2=x^2+y^2$ liefert aber

$\partial y_x=-\frac{x}{y}$, und diess substituirt, gibt

$$\frac{y(a-x)-(b-y)x}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}+\frac{y(a'-x)-(b'-y)x}{\sqrt{(a'-x)^2+(b'-y)^2}}=0.$$

Nehmen wir nun für einen Augenblick an, CX habe die Lage, dass sie den Punkt des $M.M.$ in der Peripherie gerade treffe, so hat man in diesem Falle $y=0$ und $x=r$, folglich

$$5)\qquad \frac{b}{\sqrt{(a-r)^2+b^2}}+\frac{b'}{\sqrt{(a'-r)^2+b'^2}}=0.$$

Es ist nun zweckmässiger, wenn wir uns an diese Bedingung halten, anstatt die Gleichung 2) zu benützen. Da die Wurzelgrössen, als absolute Werthe der Linien AD und BD, nur das positive Zeichen haben können, so sieht man zunächst, dass einer der Werthe b oder b' negativ sein muss, dass demnach der den $M.M.$ Punkt treffende Halbmesser oder dessen Verlängerung stets zwischen A und B auf solche Weise hindurch gehen muss, dass der eine Punkt auf der einen und der andere auf der andern Seite desselben zu liegen kommt, wie auch diess oben schon bemerkt worden.

Obige Relation lässt sich noch einfacher ausdrücken, wenn man die eine Grösse auf die andere Seite der Gleichung bringt, quadrirt, reducirt und wieder die Wurzel auszieht. Es ergibt sich hiedurch

$$\frac{b}{a-r}=\pm\frac{b'}{a'-r}.$$

Um nun die Fälle auszuscheiden, in denen das positive oder negative Zeichen zu wählen ist, geben wir dieser Gleichung folgende Form:

$$b' = \pm b \frac{a' - r}{a - r}.$$

Haben die beiden Grössen $a' - r$ und $a - r$ das gleiche Zeichen, d. h. liegen A und B innerhalb oder beide ausserhalb des Kreises, so ist, unter der Voraussetzung, dass b positiv ist, das negative Zeichen zu nehmen, weil b' negativ sein muss, und dadurch wird wirklich 5) befriedigt.

Haben hingegen $a' - r$ und $a - r$ verschiedene Zeichen, welches der Fall ist, wenn der eine Punkt innerhalb, und der andere ausserhalb des Kreises liegt und der den $M.M.$ Punkt treffende Halbmesser selbst (nicht dessen rückwärts gehende Verlängerung) zwischen A und B hindurchgeht, so ist das positive Zeichen zu nehmen, damit b' negativ wird.

Auch diese Bedingung befriedigt die Gleichung 5). Denn setzt man $b' = b \frac{a' - r}{a - r}$, so gibt 5)

$$\frac{b}{\sqrt{(a-r)^2 + b^2}} + \frac{b\left(\frac{a' - r}{a - r}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a' - r}{a - r}\right)^2 [(a-r)^2 + b^2]}}.$$

Der Nenner im letztern Posten stellt noch immer die absolute Grösse BD dar und damit sie wirklich positiv werde, hat man die negative Wurzel zu nehmen. Dann hat man aber

$$\frac{b}{\sqrt{(a-r)^2 + b^2}} - \frac{b}{\sqrt{(a-r)^2 + b^2}} = 0.$$

Wenn demnach beide Punkte in oder beide ausserhalb des Kreises liegen, so steht die einzige Bedingung fest

$$6) \qquad \frac{b}{a - r} + \frac{b'}{a' - r} = 0.$$

Liegt hingegen der eine Punkt in dem Kreise, der andere ausserhalb desselben, so hat man ausser der obigen auch noch folgende Bedingung zu untersuchen:

$$7) \qquad \frac{b}{a - r} - \frac{b'}{a' - r} = 0.$$

Um nun den $M.M.$ Punkt in der Peripherie des Kreises wirklich zu bestimmen, gehen wir wirklich vom ursprünglichen Coordinaten-System mit der Abscissen-Axe CX zu einem andern über, dessen Abscisse CX' durch den gesuchten Punkt D geht. Setzen wir den Winkel $X'CX = w$, so wie die secundären Abscissen des Punktes A gleich α, β und des Punktes B gleich α', β', so hat man für diesen Uebergang bekanntlich

$$\alpha = b\sin w + a\cos w,$$
$$\beta = b\cos w - a\sin w;$$
$$\alpha' = b'\sin w + a'\cos w,$$
$$\beta' = b'\cos w - a'\sin w.$$

Die Bedingung $\frac{\beta}{\alpha - r} + \frac{\beta'}{\alpha' - r} = 0$ liefert aber die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} 2\sin w\cos w(aa' - bb') + (\sin w^2 - \cos w^2)(ab' + ba') \\ + r\cos w(b + b') - r\sin w(a + a') \end{array}\right\} = 0,$$

oder auch

$$8)\qquad \left.\begin{array}{l} \sin 2w\,(aa' - bb') - \cos 2w(ab' + ba') \\ + r\cos w\,(b + b') - r\sin w\,(a + a') \end{array}\right\} = 0.$$

Die Bedingung $\frac{\beta}{\alpha - r} - \frac{\beta}{\alpha' - r} = 0$ aber gibt

$$r\sin w(a' - a) - r\cos w\,(b' - b) - (ba' - ab') = 0.$$

Bringt man diese Gleichung unter die Form

$$\sin w - \cos w\left(\frac{b' - b}{a' - a}\right) = \frac{ba' - ab'}{r(a' - a)}$$ und setzt

$\frac{b' - b}{a' - a} = \operatorname{tg}\mu$, so hat man hieraus

$$9)\qquad \sin(w - \mu) = \frac{ba' - ab'}{r(a' - a)}\cos\mu.$$

Diese Gleichung gibt zwei Werthe für w. Denn wenn der eine w' ist, so ist der andere $\pi - w' + 2\mu$. Die beiden hiedurch angezeigten Punkte sind aber nichts anders, als die Durchschnittspunkte der die Punkte A und B verbindenden Geraden mit dem Kreise. Denn substituire ich in die Gleichung

$$r\sin w\,(a' - a) - r\cos w\,(b' - b) - (ba' - ab') = 0$$

y statt $r\sin w$ und x statt $r\cos w$, so geht sie über in

$$y\,(a' - a) - x\,(b' - b) - (ba' - ab') = 0,$$

welches nichts anders ist, als die Gleichung für die Linie, die durch die Punkte (a, b) und (a', b') hindurchgeht. Uebrigens fragt sichs noch, ob beide Punkte *M.M.* Punkte sind.

Es lässt sich schon a priori einsehen, dass nur Ein Maximum und Ein Minimum existiren kann. Dennoch ist es interessant zu wissen, wie viele Werthe für w die Gleichung 8) liefert. Zu diesem Zwecke setzen wir in der der Gleichung 8) unmittelbar vorangehenden

$\sin w = \frac{y}{r}$ und $\cos w = \frac{x}{r}$, welches gibt

$$2xy(aa'-bb') + (y^2 - x^2)(ab' + ba') + r^2 x(b+b') - r^2 y(a+a') = 0.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der des Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2$$

und eliminirt eine der Unbekannten, um die andere zu bestimmen, so wird man hiedurch auf eine Gleichung des vierten Grades geführt, wodurch im Allgemeinen vier Punkte bestimmt werden.

Um die Bedeutung der beiden andern nicht zu den *M.M.* Punkten gehörigen Punkte zu erfahren, bedenken wir, dass es noch zwei Lagen des Radius, wie z. B. *CE* gibt, in denen *AE* und *EB* mit demselben zwei gleiche Winkel *AEC* und *BEF* machen. Nimmt man hier *CF* als Abscissenaxe an, so liegen beide Punkte *A* und *B* auf Einer Seite dieser Axe und man hat als Bedingung für die Gleichheit der Winkel

$$\frac{b}{r-a} = \frac{b'}{a'-r} \text{ oder } \frac{b}{r-a} + \frac{b'}{r-a'} = 0.$$

Da sich diese Bedingung von 6) in Nichts unterscheidet, so ist klar, wie bei der angegebenen Coordinaten-Verwandlung auch hier die Gleichung 8) zum Vorschein kommen muss. Demnach liefert 8) ausser den beiden *M.M.* Punkten auch noch zwei andere Punkte mit der Eigenschaft, dass die von *A* und *B* an sie gezogenen Geraden mit dem betreffenden Radius gleiche Winkel machen. In der That befriedigt auch obige Bedingung

$$b' = -b\frac{a'-r}{a-r},$$

wo $\frac{a'-r}{a-r}$ eine negative Grösse ist, die Gleichung 5) nicht. Denn diese gibt die Grösse

$$\frac{b}{\sqrt{(a-r)^2+b^2}} - \frac{b\left(\frac{a'-r}{a-r}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a'-r}{a-r}\right)^2 \cdot [(a-r)^2+b^2]}}.$$

Allein aus dem angegebenen Grunde muss die Wurzel des zweiten Postens negativ genommen werden, und dann hat man eine Grösse, die nicht $=0$ ist, nemlich

$$\frac{2b}{\sqrt{(a-r)^2+b^2}}.$$

Wollten wir nun unsere *M.M.* Punkte auf algebraischem Wege erhalten, so könnte diess nur durch Auflösung einer Gleichung des vierten Grades geschehen, indem man dazu obige zwei Gleichun-

gen in x und y benüzte. Besser ist es, 8) näherungsweise aufzulösen. Ist w' ein Werth, der dieselbe beinahe befriedigt, so ist ein Näherungswerth

$$h = \frac{\sin 2w'(aa'-bb') - \cos 2w'(ab'+ba') + r\cos w'(b+b') - r\sin w'(a+a')}{2\cos 2w'(aa'-bb') + 2\sin 2w'(ab'+ba') - r\sin w'(b+b') - r\cos w'(a+a')}$$

Die Gleichung 8) und deren Näherungswerth lassen sich vereinfachen, wenn man zu einem neuen Coordinatensystem übergeht, auf solche Weise, dass die neue Abscissenaxe den Winkel ACB halbirt. Denn gesetzt, es sei, für unsern jetzigen Zweck, CX'' diese Abscissenaxe, so ist $X''CX = \frac{1}{2}(ACX + BCX)$, folglich

$$\operatorname{tg} 2v = \frac{ba' + ab'}{aa' - bb'},$$

wenn man $X''CX = v$ setzt.

Setzt man nun die neuen Coordinaten gleich A, B und A', B'; so ist

$$A = b\sin v + a\cos v,$$
$$B = b\cos v - a\sin v;$$
$$A' = b'\sin v + a'\cos v,$$
$$B' = b'\cos v - a'\sin v.$$

Nun ist $AB' + BA' = 0$, und so bekommen wir statt 8) und deren Näherungswerth

10) $\quad 2\sin w(AA' - BB') + r(B + B') - r\operatorname{tg} w(A + A') = 0$ und

$$h = \cos w'^2 . \frac{2\sin w'(AA'-BB') + r(B+B') - r\operatorname{tg} w'(A+A')}{r(A+A') - 2\cos w'^2(AA'-BB')},$$

wo aber w von der Axe CX'' an zu rechnen ist.

Ausser der Vereinfachung bietet die Gleichung 10) noch einen andern sehr bedeutenden Vortheil dar. Sind nemlich die beiden Punkte A und B so ziemlich gleich oder auch nur sehr weit vom Kreise entfernt, oder ist der Winkel ACB ziemlich klein, so wird der das $M.M.$ treffende Radius auch beinahe den Winkel ACB in zwei gleiche Theile theilen und für eine erste Annäherung kann man dann setzen

$$\sin w' = \operatorname{tg} w' = w', \text{ welches gibt}$$

$$w' = \frac{r(B+B')}{r(A+A') - 2(AA' - BB')}.$$

Ist auf solche Weise der Winkel w bestimmt, so wird man haben

$$AD = \sqrt{a^2 + b^2 + r^2 - 2(a\cos w + b\sin w)},$$

$$BD = \sqrt{a'^2 + b'^2 + r^2 - 2(a'\cos w + b'\sin w)}.$$

Schliesslich bemerken wir noch, dass sich auf die Gleichung

$$2xy(aa'-bb')+(y^2-x^2)(ab'+ba')+r^2x(b+b')-r^2y(a+a')=0$$

eine Methode gründen liesse, vorliegende Aufgabe durch Construction, vermittelst eines Kegelschnittes, aufzulösen.

An diese Aufgabe schliesst sich von selbst die folgende an:

Aufgabe 3.

In einem Dreieck einen Punkt zu bestimmen, von dem aus drei Gerade in die Spitzen desselben gezógen, ein Minimum seien.

Auflösung.

Es sei (Taf. II. Fig. 6.) das Dreieck ABC und der gesuchte Punkt D, so wird $AD+DB+DC$ fragl. Minimum sein. Der Punkt D wird bestimmt sein, wenn ich auch nur zwei der letzten drei Linien kenne. Ich setze

$$AD=x,\quad BD=y,\quad CD=z;$$

so wie die Seiten des Dreiecks

$$BC=a,\quad AC=b,\quad AB=c.$$

Soll $x+y$ für einen beliebigen, aber bestimmten Werth von z, ein Minimum sein, so kann man sich mit z um C einen Kreisbogen gezogen denken, und dann muss, wie diess schon oben bewiesen worden, $\angle ADC=\angle BDC$ sein. Gleicherweise ist $\angle ADB=\angle BDC$, wenn $x+z$ bei beliebigem Werth von y ein Minimum sein soll. Hieraus ist klar, dass

$$ADC=ADB=BDC=120^0, \text{ wenn } x+y+z \text{ ein Min.}$$

Man hat daher

$$y^2+z^2-2yz\cos 120^0=a^2 \text{ oder}$$

$$11)\quad y^2+z^2+yz=a^2, \text{ und ebenso}$$

$$12)\quad x^2+z^2+xz=b^2,$$

$$13)\quad x^2+y^2+xy=c^2.$$

Die Summe dieser drei Gleichungen liefert

$$14)\quad x^2+y^2+z^2+\frac{1}{2}(xy+xz+yz)=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

Nun ist der Inhalt des Dreiecks $ADB=\frac{1}{2}xy\sin 120^0$ oder

$$\Delta ADB=\frac{\sqrt{3}.xy}{4}.$$ Gleicherweise ist

$$\Delta ADC = \frac{\sqrt{3}.xz}{4} \text{ und}$$

$$\Delta BDC = \frac{\sqrt{3}.yz}{4}.$$

Die Summe aber gibt den Flächeninhalt i des ganzen Dreiecks, d. h.

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(xy + xz + yz) = i, \text{ woraus}$$

$$\frac{3}{2}(xy + xz + yz) = 2\sqrt{3}.i.$$

Addire ich diess zu 14) und ziehe die Wurzel aus, so kommt

$$x + y + z = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) + 2\sqrt{3}.i}, \text{ welches ich } = q \text{ setze.}$$

Ziehe ich 11) von 12) ab, so habe ich

$$x - y = \frac{b^2 - a^2}{q}, \text{ welches gibt:}$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = \left(\frac{b^2 - a^2}{q}\right)^2, \text{ und diess von 13) abgezogen:}$$

$$xy = \frac{1}{3}\left[c^2 - \left(\frac{b^2 - a^2}{q}\right)^2\right].$$

Wird diese Gleichung aufs Neue mit $x - y = \dfrac{b^2 - a^2}{q}$ verbunden, so entwickelt sich

$$15)\quad x = \frac{b^2 - a^2}{2q} + \sqrt{\frac{1}{3}\left[c^2 - \left(\frac{b^2 - a^2}{2q}\right)^2\right]},$$

so wie durch Buchstabenverwechslung

$$16)\quad x = \frac{c^2 - a^2}{2q} + \sqrt{\frac{1}{3}\left[b^2 - \left(\frac{c^2 - a^2}{2q}\right)^2\right]};$$

$$17)\quad y = \frac{c^2 - b^2}{2q} + \sqrt{\frac{1}{3}\left[a^2 - \left(\frac{c^2 - b^2}{2q}\right)^2\right]},$$

$$18)\quad y = \frac{a^2 - b^2}{2q} + \sqrt{\frac{1}{3}\left[c^2 - \left(\frac{a^2 - b^2}{2q}\right)^2\right]};$$

$$19)\quad z = \frac{a^2 - c^2}{2q} + \sqrt{\frac{1}{3}\left[b^2 - \left(\frac{a^2 - c^2}{2q}\right)^2\right]}.$$

$$20)\qquad z=\frac{b^2-c^2}{2q}+\sqrt{\frac{1}{3}\left[a^2-\left(\frac{b^2-c^2}{2q}\right)^2\right]}.$$

Die Wurzelzeichen ergaben sich durch folgende Betrachtung. Gesetzt, es sei a die grösste Seite des Dreiecks, b die mittlere, c die kleinste, so kann die Wurzel in 15), da wir nur positive Werthe für x, y und z annehmen dürfen, nur positiv sein. Die Wurzeln in 15) und 18) sind an sich gleich; allein sie müssen auch noch gleiche Vorzeichen, d. h. das positive, haben, weil man sonst nicht hätte $x-y=\frac{b^2-a^2}{q}$, wie sein muss. Dasselbe kann auch in Beziehung auf die übrigen Wurzeln gefolgert werden aus der Verbindung von 16) mit 19) und von 17) mit 20).

Von Interesse ist auch die Beantwortung der Frage, ob es nicht Fälle gebe, wo kein Minimum möglich sei? Diese Unmöglichkeit ergibt sich für imaginäre Werthe von x oder y oder z oder auch von q. Die Grössen unter den Wurzelzeichen können nicht negativ werden, bevor sie durch Null gehen. Es wird also z. B. x erst anfangen imaginär zu werden, wenn schon vorher geworden ist

$$c^2-\left(\frac{b^2-a^2}{2q}\right)^2=0.$$

Es ist aber klar, dass nicht der eine Werth 15) von x imaginär sein kann, wenn es nicht gleichzeitig der andere 16) auch ist. Es muss daher auch sein $b^2-\left(\frac{c^2-a^2}{2q}\right)^2=0$. Somit ist auch die Wurzel in 18)$=0$, folglich auch in 17) nemlich

$$a^2-\left(\frac{c^2-b^2}{2q}\right)^2=0.$$

Und so sind gleichzeitig alle Wurzeln in 15) — 20) der Null gleich. Addirt man alle Gleichungen 15) — 20), so hat man

$$2(x+y+z)=2q=0.$$

Setzen wir nun in q den Inhalt i gleich der bekannten Formel, so haben wir

$$a^2+b^2+c^2+\sqrt{3}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}=0.$$

Setzen wir die Wurzelgrösse auf die andere Seite des Gleichheitszeichens, quadriren und reduciren, so werden wir auf die Gleichung geführt

$$a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2=0.$$

Lösen wir diese Gleichung nach einander in Beziehung auf a^2, b^2 und c^2 auf, so kommt:

$$a^2=-\frac{3}{4}(b^2-c^2)^2,\quad b^2=-\frac{3}{4}(a^2-c^2)^2,\quad c^2=-\frac{3}{4}(b^2-a^2)^2;$$

welche Gleichungen nicht existiren können, wenn nicht ist

$$b^2-c^2=0,\ a^2-c^2=0,\ b^2-a^2=0; \text{ woraus folgt}$$

$$a=b=c=0 \text{ und ebenso } x=y=z=0.$$

Somit hat sich alles auf den Punkt zurückgezogen, woraus folgt, dass im Allgemeinen so lange ein Minimum existiren wird, so lange a, b und c noch Werthe haben, d. h. also für jedes Dreieck. Dennoch gibt es einen Fall, wo insofern kein Min. statt findet, als man keine negativen Werthe für x, y und z zulässt. Bevor jedoch einer dieser Werthe negativ wird, muss er durch Null gehen, und nehmen wir diess in Beziehung auf x an, so haben wir

$$\frac{b^2-a^2}{2q}+\sqrt{\frac{1}{3}\left[c^2-\left(\frac{b^2-a^2}{2q}\right)^2\right]}=0, \text{ woraus folgt}$$

$$c^2q^2=(b^2-a^2)^2.$$

Ersetzen wir q und i durch deren Werthe, so kommt

$$2(b^2-a^2)^2=c^2[a^2+b^2+c^2+\sqrt{3}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}].$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch den Werth

$$a^2=b^2+c^2+bc, \text{ und vergleichen wir diess mit}$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos BAC, \text{ so ist}$$

$$\cos BAC=-\frac{1}{2} \text{ und } BAC=120^0.$$

In der That, nimmt man an, dass die Dreiecksspitze A auf AD mehr und mehr zurückweicht, so bilden x, y und z doch stets zusammen das Minimum, bis in D das Dreieck ABC mit DBC zusammenfällt. Weicht A auf der Verlängerung von AD noch weiter zurück, so wird x negativ und $\angle BAC > 120^0$. Daraus folgt, dass für Dreiecke, die einen grösseren Winkel als 120^0 haben, kein Min. statt findet, in so fern negative Werthe von x, y und z ausgeschlossen sind.

XV.

Ueber die Aehnlichkeit der Curven und Körper.

Von

Herrn Brenner,

Lehrer zu Tuttlingen im Königreich Würtemberg.

A. Polygone oder gebrochene Linien sind ähnlich, wenn sie gleich viel Seiten und Winkel haben, wenn die in gleicher Reihenfolge liegenden Winkel einander gleich sind, und die gleiche Winkel einschliessenden Seiten nach derselben Reihenfolge einander proportional sind. Homolog heissen diejenigen Seiten oder Stücke, z. B. Diagonalen, die die Schenkel der gleichen Winkel sind. Homolog heissen ferner zwei Punkte, von denen aus man jedes Polygon in ähnliche Dreiecke zu theilen im Stande ist, wofern in jedes Eck ein Strahl gezogen wird. Demnach sind auch diejenigen Ecken der Polygone oder gebrochenen Linien homolog, die die Scheitel gleicher Winkel enthalten. Gerade Linien heissen homolog, welche die Verbindung zweier homologen Punkte vermitteln, und man schreibt ihnen eine homologe Lage zu, selbst wenn man sich dieselben unbegrenzt denkt. In letzterm Fall heissen sie auch homologe Axen, welche nichts anders sind, als eine ununterbrochene Reihenfolge homologer Punkte. Diejenigen Seiten homologer Axen nennt man ebenfalls homolog, auf denen die ähnlichen Theile der Polygone liegen. Zieht man von beliebigen homologen Punkten im Umfang des Polygons oder in der gebrochenen Linie auf homologe Axen senkrechte Linien, so sind nicht nur diese Senkrechten selbst homolog, sondern sie schneiden von jenen Axen auch homologe Stücke ab.

B. Man bezeichne die Seiten zweier ähnlichen n Ecke durch $s', s'', s''', s'''' \ldots\ldots s^n$ und $S', S'', S''' S'''' \ldots\ldots S^n$, wo die mit gleichen Stellenzeigern versehenen homolog sind, so hat man

$$\frac{S'}{s'}=\frac{S''}{s''},$$

$$\frac{S''}{s''}=\frac{S'''}{s'''},$$

$$\frac{S'''}{s'''}=\frac{S''''}{s''''},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{S^{n-1}}{s^{n-1}}=\frac{S^n}{s^n}.$$

Multiplicirt man je die 2 ersten, 3 ersten u. s. w. Gleichungen mit einander, so hat man

$$\frac{S'}{s'}=\frac{S''}{s''}=\frac{S'''}{s'''}=\frac{S''''}{s''''}\cdots=\frac{S^n}{s^n}.$$

Alle diese Verhältnisse $\frac{S'}{s'}, \frac{S''}{s''}, \ldots \frac{S^n}{s^n}$ haben demnach eine constante Grösse, die wir gleich c setzen, und dann haben wir

$$\frac{S'}{s'}=\frac{S''}{s''}\cdots\cdots=\frac{S^n}{s^n}=c.$$

Dasselbe constante Verhältsiss lässt sich für alle homologen Linien nachweisen, z. B. auch für die oben berührten Senkrechten und die durch dieselben von homologen Axen abgeschnittenen Stücke.

C. Da sich nun jede Curve als ein Polygon oder als eine gebrochene Linie von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten betrachten lässt, so gilt alles oben Gesagte auch von ähnlichen Curven. Die Curven aber sind in der Regel durch Gleichungen gegeben, und so lässt sich demnach die Frage stellen: **Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit zwei Curven ähnlich sind?**

Nehmen wir zwei beliebige ähnliche Curven an, legen ihre Coordinaten-Axen homolog, und stellen wir die Coordinaten der erstern durch x, y, die der letztern durch x', y', vor, so haben wir, wenn wir uns in diesen Curven zwei homologe durch (x, y) und (x', y') gegebene Punkte denken:

$$\frac{y'}{y}=c \text{ und eben so } \frac{x'}{x}=c.$$

Ist demnach die Gleichung der einen Curve $y=f(x)$, der andern $y'=\varphi(x')$; so ist

$$\frac{\varphi(x')}{f(x)}=c \text{ oder } \frac{\varphi(cx)}{f(x)}=c.$$

Diess ist die Bedingung der Aehnlichkeit, und man sieht, dass

die beiden Funktionen f und φ dieselbe Form haben müssen.

Die Bedingungen aber, die die einzelnen Conflicienten der Veränderlichen x und x' zu erfüllen haben, finden sich, wenn man in $\varphi(x')$ die Veränderliche $x'=cx$ setzt, die Funktion $f(x)$ mit c multiplicirt und in der Gleichung

$$\varphi(cx)=cf(x)$$

die Coefficienten der gleichen Potenzen von x einander gleich setzt, x mag mit irgend welchen Vorzeichen versehen sein, oder nicht, z. B. mit trigonometrischen oder logarithmischen. Nur müssen die den Vorzeichen voranstehenden Coefficienten, wofern sie sich nicht unmittelbar vor x setzen, d. h wofern sie sich nicht unter das Vorzeichen bringen lassen, gleichfalls einander gleich gesetzt werden.

In Beziehung auf implicite Funktionen y von x, die durch eine Gleichung zwischen y und x gegeben sind, ist Folgendes zu bemerken, immer unter der Voraussetzung, dass von homologen Axen ausgegangen wird.

Obschon die Auflösung einer solchen Gleichung mehrere Funktionen y von x liefert, so stellt immerhin Eine Gleichung nur Eine Curve dar und die verschiedenen Werthe von y repräsentiren nur verschiedene Zweige der Curve. Sollen nun zwei Gleichungen durchaus gleich viele und lauter ähnliche Zweige liefern, so kann diess nicht anders sein, als wenn beide für y gleichviele und durchaus Funktionen von derselben Form (von x) darbieten, und diess findet nur statt, wenn auch beide Gleichungen durchaus dieselbe Form haben. Die Aehnlichkeitsbedingungen werden sich hierauf dadurch finden, dass man in die Gleichung zwischen x' und y' durchweg y' durch cy und x' durch cx ersetzt, und die Coefficienten der gleichen Potenzen von x und y einander gleich setzt, mit welchen sonstigen Vorzeichen x und y auch behaftet sein mögen.

Um für die vorgelegte Form der Gleichungen die möglichst kleine Anzahl von Bedingungen zu erhalten, wird man vorher jede Gleichung mit einer möglichst kleinen Anzahl von Coefficienten oder Constanten darstellen.

So lässt sich z. B. die Gleichung

$$ay^2+bx+cx^2=0 \text{ einfacher durch}$$
$$y^2+Ax+Bx^2=0 \text{ ausdrücken.}$$

Coefficienten vor logarithmischen und Wurzelgrössen lassen sich unter das Zeichen bringen.

So lässt sich

$a\log x^n$ darstellen durch $\log x^m$ (oder auch durch $A\log x$) und

$$a\sqrt{b+cx^2} \text{ durch } \sqrt{A+Bx^2}.$$

Da die Verhältnisszahl c unbestimmt ist, so kann man dieses c vermittelst einer der erhaltenen Gleichungen eliminiren, wodurch sich die Anzahl der Bedingungsgleichungen auf eine weniger reducirt. Dennoch ist es leicht, c zu bestimmen und dann wird c den linearen und c^2 den quadratisch vergrösserten Zustand der durch die Gleichung zwischen x' und y' dargestellten Curve bezeichnen.

1. Beispiel.

Man habe die Gleichungen

1) $y^2+ax+bx^2=0$ und

2) $y'^2+Ax'+Bx'^2=0$, so ist, $y'=cy$ und $x'=cx$ setzend,

$c^2y^2+Acx+Bc^2x^2=0$, und mit c^2 dividirend:

$y^2+\frac{A}{c}x+Bx^2=0$. Die Vergleichung mit 1) gibt $a=\frac{A}{c}$,

woraus $c=\frac{A}{a}$ und

$b=B$ als die einzige stattfindende Bedingung.

2. Beispiel.

Man habe

1) $y=a\sqrt{b+ex^2}$,

2) $y'=A\sqrt{B+Ex'^2}$, so ist, wenn $y'=cy$ und $x'=cx$

gesetzt wird, so wie die vor dem Wurzelzeichen stehenden Coefficienten unter dasselbe gebracht werden:

$$y=\sqrt{a^2b+a^2ex^2},$$

$$y=\sqrt{\frac{BA^2}{c^2}+A^2Ex^2};\ \text{woraus}$$

$$a^2b=\frac{A^2B}{c^2},\ \text{welches gibt}\ c=\frac{A}{a}\sqrt{\frac{B}{b}};\ \text{und}$$

$$a^2e=A^2E.$$

3. Beispiel.

1) $y=a\sin bx+e\cos fx$ und

2) $y'=A\sin Bx'+E\cos Fx'$ geben

$$y = \frac{A}{c} \sin Bcx + \frac{E}{c} \cos Fcx \text{ und}$$

$$a = \frac{A}{c}, \text{ welches gibt } c = \frac{A}{a},$$

$$b = Bc,$$

$$e = \frac{E}{c},$$

$$f = Fc.$$

Die Eliminationen aber liefern:

$$b = \frac{BA}{a},$$

$$e = \frac{aE}{A},$$

$$f = \frac{AF}{a}.$$

4. Beispiel.

$$1) \quad y = a\sqrt{b + e\cos^2 fx},$$

$$2) \quad y' = A\sqrt{B + E\cos^2 Fx'} \text{ liefern}$$

$$y = \sqrt{a^2 b + a^2 e \cos^2 fx},$$

$$y = \sqrt{\frac{A^2 B}{c^2} + \frac{E A^2}{c^2} \cos Fcx}; \text{ folglich}$$

$$a^2 b = \frac{A^2 B}{c^2}, \text{ woraus } c = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{B}{b}},$$

$$a^2 e = \frac{A^2 E}{c^2} \text{ oder } \frac{e}{b} = \frac{E}{B},$$

$$f = Fc \text{ oder } f = \frac{FA}{a}\sqrt{\frac{B}{b}}.$$

D. Hat man aber Polarcoordinaten, so nehme man die Axen mit homologer Lage und als Anfangspunkt homologe Punkte. Bei gleichen Winkeln v, die nach den homologen Seiten der Axen gezählt werden, sind die beiden Radii vectores r und r' selbst homolog, und so hat man $\frac{r'}{r} = c$, bei demselben v. Die Bedingungen der Aehnlichkeit werden sich daher einfach dadurch erge-

ben, dass man r' durch rc ersetzt, die beiden v aber einander gleich macht, und im Uebrigen ganz wie oben verfährt, während auch hier dieselben Bemerkungen in Beziehung auf die Vorzeichen von v und r gelten. Dass hierin auch das Verfahren für implicite Funktionen eingeschlossen ist, wird kaum zu erinnern nöthig sein, eben so wenig als dass beide Gleichungen zwischen r und v, r' und v' durchaus dieselbe Form haben müssen.

Hat man z. B.

$$r = \frac{a}{b \sin ev + f \cos gv} \text{ und}$$

$$r' = \frac{A}{B \sin Ev + F \cos Gv},$$

so gehen diese zwei Gleichungen nach obigem Verfahren über in

$$r = \frac{\frac{a}{b}}{\sin ev + \frac{f}{b} \cos gv} \text{ und}$$

$$r = \frac{\frac{A}{Bc}}{\sin Ev + \frac{F}{B} \cos Gv}, \text{ woraus folgt}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{Bc}, \text{ welches gibt} : c = \frac{A}{B} \cdot \frac{b}{a}.$$

$$E = e,$$

$$\frac{F}{B} = \frac{f}{b} \text{ und}$$

$$G = g.$$

F. Aus dem Obigen folgt, dass sich desto mehr Bedingungen der Aehnlichkeit darstellen, je mehr die Gleichung constante Coefficienten hat.

Jede Curve aber lässt sich durch verschiedene Gleichungsformen darstellen, d. h. durch Gleichungen mit mehr oder weniger Constanten; und zwar bietet die allgemeinste Gleichung einer Curve die möglich grösste Anzahl von Constanten dar, während die einfachste Gleichung die möglich kleinste Anzahl derselben enthält. Geht man nemlich für eine vorgelegte allgemeinste Gleichung auf ein neues Coordinaten-System über, dessen Axen durch ξ und ν repräsentirt sein mögen, so hat man, wenn die Coordinaten des neuen Anfangspunktes a und b sind, so wie der Winkel, den die Axe der ξ mit der Axe der x macht, gleich v gesetzt wird,

$$x = a + \xi \cos v - \nu \sin v,$$

$$y = b + \xi \sin v + \nu \cos v.$$

Substituirt man nun diese Werthe für x und y in die allgemeinste Gleichung, so kann man über die drei beliebigen Grössen a, b und v auf solche Weise verfügen, dass im Allgemeinen drei Coefficienten auf Null gebracht werden. Daraus folgt

1) dass zwei Curven ähnlich sein können, wenn auch die Form ihrer Gleichungen nicht dieselbe ist, in welchem Falle ihre Axen keine homologe Lage haben;

2) dass nur dann die möglich kleinste Anzahl von Aehnlichkeitsbedingungen zum Vorschein kommt, wenn die Form der Gleichungen die einfachste ist.

Will man daher die Aehnlichkeit zweier Curven untersuchen, so versuche man, ihren Gleichungen durch Coordinaten-Verwandlung dieselbe Form zu geben, wobei zu bemerken, dass man natürlich keine Aehnlichkeit vermuthen darf, wenn die eine Gleichung transcendent ist, die andere aber nicht, oder wenn beide ungleich transcendent sind.

Will man aber die möglich kleinste Anzahl von Bedingungsgleichungen erhalten, so gebe man jeder Gleichung ihre einfachste Form und stelle die Bedingungen ganz nach oben angegebener Weise auf, oder noch besser, man nehme die Coordinaten-Verwandlung nur in Beziehung auf Eine Curve vor, stelle, wie oben, die Aehnlichkeitsbedingungen auf, wodurch, wenn wirklich Aehnlichkeit vorhanden ist, eine homologe Lage der Axen bezweckt wird, und eliminire zuletzt, aus den erhaltenen Gleichungen, nebst c, noch a, b und v.

So enthält z. B. die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte

$$y^2 + Ax^2 + Bxy + Cy + Dx + E = 0$$

fünf Constanten, woraus sich zunächst fünf Bedingungsgleichungen ergeben. Die Elimination von c, a, b und v reducirt sie aber auf Eine, woraus folgt, dass im Allgemeinen für die Kegelschnitte höchstens Eine Aehnlichkeitsbedingung existirt.

F. Interessant ist auch die Untersuchung der Frage: Welche bekannteren Curven sind unbedingt und welche nur bedingt ähnlich?

Um diese Frage zu beantworten, ist es unumgänglich nöthig, die einfachste Form der Gleichungen zu wählen.

1) Die Gleichung der geraden Linie ist

$$y = 0, \quad y' = 0 \text{ oder } cy = 0;$$

woraus weder eine Bedingungsgleichung noch eine Bestimmung für c hervorgeht. In der That lässt sich die Gerade ganz beliebig als Curve oder gebrochene Gerade betrachten, wo zwei aneinander stossende Seiten einen Winkel von 180° mit einander machen. Setzt man $c = 1$, so sind beide Gerade congruent.

2) Die Gleichung des Kreises ist

$$y^2 + x^2 = r^2, \quad y'^2 + x'^2 = R^2.$$

Aus der letztern ist

$$y^2+x^2=\frac{R^2}{c^2}, \text{ daher } r=\frac{R}{c} \text{ und } c=\frac{R}{r}.$$

Demnach sind alle Kreise unbedingt ähnlich, wie auch aus der Elementargeometrie bekannt.

3) Die Gleichung der Parabel ist

$$y^2=2px, \quad y'^2=2Px'; \text{ daher}$$

$$y^2=\frac{2P}{c}x, \quad p=\frac{P}{c} \text{ und } c=\frac{P}{p}.$$

Alle Parabeln sind unbedingt ähnlich.

4) Diess findet überhaupt für alle zweigliedrigen Curven statt. Denn habe ich

$$y^n+px^m=0, \quad y'^n+Px'^m=0;$$

so ist

$$y^n+Pc^{m-n}x^m=0 \text{ und } p=Pc^{m-n},$$

woraus

$$c=\sqrt[m-n]{\frac{p}{P}}.$$

5) Die Gleichung der gemeinen Cycloide ist

$$x=r\,\text{arc}(\sin.\text{vers}.=\frac{y}{r})-\sqrt{2ry-y^2},$$

$$x'=R\,\text{arc}(\sin.\text{vers}.=\frac{y'}{R})-\sqrt{2Ry'-y'^2};$$

wo r und R die Radii der Erzeugungskreise bedeuten. Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$x=\frac{R}{c}\text{arc}(\sin.\text{vers}.=\frac{cy}{R})-\sqrt{\frac{2R}{c}y-y^2}.$$

Diese Gleichung fällt mit der ersten zusammen, wenn man setzt

$$r=\frac{R}{c}, \text{ woraus } c=\frac{R}{r}.$$

Demnach sind alle gemeinen Cycloiden ähnlich.

6) Anders verhält es sich mit der Ellipse und Hyperbel. Ihre Gleichung in Polar-Coordinaten ist:

$$r=\frac{p}{1+e\cos v},\quad r'=\frac{P}{1+E\cos v};$$

woraus

$$r=\frac{\frac{P}{c}}{1+E\cos v},\quad p=\frac{P}{c},\text{ oder } c=\frac{P}{p} \text{ und } e=E.$$

Zwei Ellipsen oder Hyperbeln sind also nur dann ähnlich, wenn ihre Excentricitäten gleich sind.

Will man auf die Axen übergehen, so hat man

$$p=\pm a(1-e^2),\qquad P=\pm A(1-E^2);$$

$$e^2=1\mp\frac{b^2}{a^2},\qquad E^2=1\mp\frac{B^2}{A^2};$$

woraus man ableitet $A=ca$ und $B=cb$, und wenn man c eliminirt:

$$A:a=B:b.$$

G. Will man aber eine Curve construiren, die einer gegebenen ähnlich ist, so kann man sich entweder vorsetzen:

1) die neue Curve um ein gegebenes Vielfaches vergrössert oder verkleinert darzustellen. In diesem Fall muss man der Verhältnisszahl c den bestimmten Vergrösserungswerth zuweisen, die neue Gleichung in derselben Form, nur mit unbestimmten Coefficienten, hinschreiben, und diese letzteren vermittelst obiger Bedingungsgleichungen bestimmen. Oder

2) kann man sich vorsetzen, irgend einen oder vielleicht mehreren Coefficienten einer bestimmten Zahl, z. B. der Einheit gleich zu bringen, wo dann c erst einen dieser Bedingung entsprechnenden Werth erhalten wird.

Habe ich z. B.

$$y=\frac{a}{\sqrt{b+e\,\mathrm{tg}fx^2}},$$

so setze ich

$$y'=\frac{A}{\sqrt{B+E\,\mathrm{tg}Fx'^2}}.$$

Aus 1) habe ich

$$y=\frac{1}{\sqrt{\frac{b}{a^2}+\frac{e}{a^2}\mathrm{tg}fx^2}}$$

und aus 2):

$$y=\frac{1}{\sqrt{\frac{Bc^2}{A^2}+\frac{Ec^2}{A^2}\operatorname{tg} Fc^2x^2}}$$

welches liefert

$$f=Fc^2,\quad \frac{b}{a^2}=\frac{Bc^2}{A^2},\quad \frac{e}{a^2}=\frac{Ec^2}{A^2}.$$

Hier kann man nun entweder F oder B oder E; oder zugleich B und A, E und A, nicht aber B und E der Einheit gleich setzen. Setzt man $B=A=1$, so ist

$$c=\frac{\sqrt{b}}{a};\quad E=\frac{e}{b}\quad\text{und}\quad F=\frac{fa}{\sqrt{b}}.$$

H. Alles, was über die Aehnlichkeit der Curven in der Ebene gesagt worden ist, lässt sich mit Leichtigkeit auch auf die Aehnlichkeit der Flächen, der Körper und der Curven im Raume ausdehnen, nur ist zu bemerken, dass, wenn die Bemerkungen in E. auf den Raum übertragen werden, man nicht bloss über drei, sondern über sechs beliebige Constanten der Coordinaten-Verwandlung frei verfügen kann, woraus sich die Folgerung von selbst ergibt. Auch hier haben die homologen Coordinaten homologer Punkte das constante Verhältniss c. Habe ich z. B. zwei Curven des Raumes, die durch folgende Gleichungen dargestellt werden:

$$y=ax+bx^2,\quad z=ex+fx^2$$

und

$$y'=Ax'+Bx'^2,\quad z'=Ex'+Fx'^2;$$

so setze ich

$$y'=cy;\quad z'=cz\quad\text{und}\quad x'=cx$$

und habe dann

$$y=Ax+Bcx^2,\quad z=Ex+Fcx^2$$

und folglich

$$a=A;\quad e=E;\quad b=Bc\quad\text{und}\quad f=Fc.$$

I. Sind zwei Differentialgleichungen gegeben, und ich will untersuchen, ob sie ähnliche Curven liefern, so kann ich bei ungleicher Form nicht auf die Nichtexistenz der Aehnlichkeit schliessen, weil eine und dieselbe Urgleichung sehr verschiedene Differentiale von jeder Ordnung haben kann und demnach die Möglichkeit vorhanden ist, dass zwei verschiedene Differentialgleichungen dieselben Integrale aufweisen können.

Allein wenn zwei Differentialgleichungen von derselben Form (also nur mit verschiedenen Constanten) vorhanden sind, so ist

gewiss, dass sie auch Integrale von gleicher Form liefern, welche für die Curven-Aehnlichkeit bloss noch die oben angegebenen Bedingungen in ihren Coefficienten zu erfüllen haben. Diese Aehnlichkeit oder Unähnlichkeit lässt sich jedoch schon aus den constanten Coefficienten der Differentialgleichungen selbst absehen, indem man setzt:

$$y' = cy;\ x' = cx;$$
$$\partial y' = c\partial y;\ \partial x' = c\partial x;$$
$$\partial^2 y' = c\partial^2 y;\ \partial^2 x' = c\partial^2 x; \text{ (woraus noch folgt):}$$

. . . .

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x};\ \frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 y}{c\partial x^2} \text{ u. s. w., oder}$$

$$\partial y'_{x'} = \partial y_x;\ \partial^2 y'_{x'} = \frac{1}{c}\partial^2 y_x \text{ u. s. w.}$$

und hierauf die Coefficienten derselben Differentiale oder derselben Potenzen der Veränderlichen mit einander vergleicht.

Hat man ferner nur Eine Differentialgleichung, so kann man vermittelst obiger Methode eine andere Differentialgleichung darstellen, welche eine der obigen Curve ähnliche Curve liefert. Hiebei schreibt man sich eine Differentialgleichung von derselben Form, nur mit unbestimmten constanten Coefficienten, hin, setzt $y' = cy$, $x' = cx$, $\partial y'_{x'} = \partial y_x$ u. s. w. und macht die betreffenden Coefficienten beider Gleichungen einander gleich. Man kann hiemit den Zweck verbinden, eine der Constanten einem bestimmten Werth z. B. der Einheit gleich zu machen. Hat man hierauf das Integral gefunden $y' = f(x')$, so ist

$$y = \frac{1}{c} f(cx).$$

XVI.

Note sur l'intégrale définie

$$\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,\mathrm{Cos}\,nx\partial x.$$

Par

Monsieur D. Bierens de Haan

Docteur ès sciences à Deventer.

---

1. On a fait plusieurs fois la remarque, que plus une intégrale définie contient de constantes, plus elle peut donner lieu généralement à d'autres intégrales définies, non-seulement en les spécialisant, mais surtout par l'application des théorèmes plus ou moins généraux de cette branche de l'analyse. Mon but est de traiter de cette manière l'intégrale mentionnée ci-dessus, qui en fournira plusieurs autres, à ce que je crois nouvelles.

Cette intégrale définie:

$$\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,\mathrm{Cos}\,nx\partial x=-\pi\frac{r^n}{n} \qquad (1)$$

$$\text{et}\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\partial x=0 \qquad (2),$$

[où dans la première $n>0\ldots(\alpha)$ et partout $+1\overline{\geq}r\overline{\geq}-1\ldots(\beta)$]

bien connue, se trouve entre autres dans les Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale du Prof. Dr. O. Schlömilch, page 34. Nr. [10] et [11].

Commençons par la constante r, et différentions par rapport à elle, il vient

$$\int_0^\pi\frac{-2\mathrm{Cos}\,x+2r}{1-2r\mathrm{Cos}x+r^2}\mathrm{Cos}\,nx\partial x=-\pi r^{n-1},\int_0^\pi\frac{-2\,\mathrm{Cos}\,x+2r}{1-2r\,\mathrm{Cos}x+r^2}\partial x=0;$$

d'où, puisque $\int_0^\pi \mathrm{Cos}\, nx\partial x = 0 \ldots(\mathrm{a})\ldots, \int_0^\pi \partial x = \pi \ldots(\mathrm{b})$,

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\, nx\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}\, x+r^2}$$

$$=\frac{1}{1-r^2}\int_0^\pi \frac{(1-2r\,\mathrm{Cos}\, x+r^2)-r(-2\mathrm{Cos}\, x+2r)}{1-2r\mathrm{Cos}\, x+r^2}\mathrm{Cos}\, nx\partial x$$

$$=\frac{1}{1-r^2}(-r)(-\pi r^{n-1})=\frac{\pi r^n}{1-r^2}, \tag{3}$$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\, nx\,\mathrm{Cos}\, x\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}\, x+r^2}=\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{2r-(-2\mathrm{Cos}\, x+2r)}{1-2r\,\mathrm{Cos}\, x+r^2}\mathrm{Cos}\, nx\partial x$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{2\pi r^n}{1-r^2}r-(-\pi r^{n-1})\right\}=\frac{\pi}{2}\frac{1+r^2}{1-r^2}r^{n-1}, \tag{4}$$

$$\int_0^\pi \frac{\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}\, x+r^2}$$

$$=\frac{1}{1-r^2}\int_0^\pi \frac{(1-2r\mathrm{Cos}\, x+r^2)-r(-2\mathrm{Cos}\, x+2r)}{1-2r\,\mathrm{Cos}\, x+r^2}\partial x=\frac{\pi}{1-r^2} \tag{5}$$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\, x\partial x}{1-2r\,\mathrm{Cos}\, x+r^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{2r-(-2\mathrm{Cos}\, x+2r)}{1-2r\mathrm{Cos}\, x+r^2}\partial x=\frac{1}{2}.2r.\frac{\pi}{1-r^2}=\frac{\pi r}{1-r^2}. \tag{6}$$

La formule $\mathrm{Cos}\,(n-1)x=\mathrm{Cos}\, nx\,\mathrm{Cos}\, x+\mathrm{Sin}\, nx\,\mathrm{Sin}\, x \ldots(\mathrm{c})$

donne par l'application à (3) et (4)

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}\, nx\,\mathrm{Sin}\, x\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}\, x+r^2}=\frac{\pi r^{n-1}}{1-r^2}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1+r^2}{1-r^2}r^{n-1}=\frac{\pi}{2}r^{n-1}. \tag{7}$$

Les formules (3), (5) et (7) sont respectivement les mêmes que Prof. Schlömilch a trouvées l. c. formules [7], [22] et [12]. Cette coincidence résulte des propriétés des séries, dont il a fait usage pour parvenir à ces intégrales, d'être les unes les dérivées des autres par rapport à r, ou du moins, de pouvoir être transformées aisément pour ce but.

Il y a de plus à observer, que les intégrales (5) et (6) auraient été trouvées par la substitution de $n=0$ et $n=1$ dans l'intégrale (3), qui jouit ainsi de la condition $n \geqq 0 \ldots(\gamma)$.

2. Quant à l'intégration par rapport à r il convient de faire usage des formules suivantes:

$$\int\frac{\partial r}{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}=\frac{2}{\sqrt{[4-(2\operatorname{Cos}x)^2]}}\operatorname{Arctg}\left\{r\frac{\sqrt{[4-(2\operatorname{Cos}x)^2]}}{2+(-2\operatorname{Cos}x)r}\right\}$$
$$=\frac{1}{\operatorname{Sin}x}\operatorname{Arctg}\frac{r\operatorname{Sin}x}{1-r\operatorname{Cos}x}\;....(\mathrm{d})$$

$$\int\frac{r\partial r}{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}=\frac{1}{2}l(1-2r\operatorname{Cos}x+r^2)+\frac{\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}x}\cdot\operatorname{Arctg}\frac{r\operatorname{Sin}x}{1-r\operatorname{Cos}x},$$

$$\int\frac{r^{-1}\partial r}{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}=-\frac{1}{2}l\frac{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}{r^2}+\frac{\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}x}\operatorname{Arctg}\frac{r\operatorname{Sin}x}{1-r\operatorname{Cos}x};$$

dont la somme et la différence donnent

$$\int\frac{\partial r}{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}\,\frac{1+r^2}{r}=lr+2\,\frac{\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}x}\cdot\operatorname{Arctg}\frac{r\operatorname{Sin}x}{1-r\operatorname{Cos}x}\;....(\mathrm{e})$$

$$\int\frac{\partial r}{1-2r\operatorname{Cos}x+r^2}\,\frac{1-r^2}{r}=lr-l(1-2r\operatorname{Cos}x+r^2)\;....(\mathrm{f})$$

En appliquant la formule (d) à (5) et (6), et (e) à (6) [puisque l'application de (e) à (5) coincide avec celle de (d) à (6), comme il est aisé de voir] on obtient a l'aide de la transportation des fonctions sous les signes d'intégration dans les intégrales doubles, qui en résultent,

$$\int_0^\pi\operatorname{Arctg}\frac{r\operatorname{Sin}x}{1-r\operatorname{Cos}x}\frac{\partial x}{\operatorname{Sin}x}=\pi\int\frac{\partial r}{1-r^2}=\frac{\pi}{2}l\frac{1+r}{1-r}\cdots\qquad(8)$$

$$\int_0^\pi\operatorname{Arctg}\frac{r\operatorname{Sin}x}{1-r\operatorname{Cos}x}\,\frac{\operatorname{Cos}x\partial x}{\operatorname{Sin}x}=\pi\int\frac{r\partial r}{1-r^2}=-\frac{\pi}{2}l(1-r^2)\qquad(9)$$

et

$$\int_0^\pi\left[lr+2\operatorname{Arctg}\frac{r\operatorname{Sin}x}{1-r\operatorname{Cos}x}\cdot\frac{\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}x}\right]\operatorname{Cos}x\partial x=\pi\int\frac{1+r^2}{1-r^2}\,\partial r$$
$$=\pi\left(-r+l\frac{1+r}{1-r}\right),$$

qui donne à l'aide de (a)

$$\int_0^\pi\operatorname{Arctg}\frac{r\operatorname{Sin}x}{1-r\operatorname{Cos}x}\,\frac{\operatorname{Cos}^2x\partial x}{\operatorname{Sin}x}=\frac{\pi}{2}\left(l\frac{1+r}{1-r}-r\right).\qquad(10)$$

La différence de (8) et (10) donne

$$\int_0^\pi\operatorname{Arctg}\frac{r\operatorname{Sin}x}{1-r\operatorname{Cos}x}\operatorname{Sin}x\partial x=\frac{\pi r}{2}.\qquad(11)$$

Les formules (d) et (e) donnent de cette manière pour l'intégrale (1)

$$\int_0^\pi\operatorname{Arctg}\frac{r\operatorname{Sin}x}{1-r\operatorname{Cos}x}\operatorname{Sin}nx\partial x=\frac{\pi}{2}\int r^{n-1}\partial r=\frac{\pi}{2}\frac{r^n}{n}\qquad(12)$$

$$\int_0^\pi \left[lr + 2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\cdot\frac{\mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Sin}\,x}\right]\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x\,\partial x$$

$$=\frac{\pi}{2}\int r^{n-2}(1+r^2)\partial r=\frac{\pi}{2}\left(\frac{r^{n-1}}{n-1}+\frac{r^{n+1}}{n+1}\right)$$

ou, puisque $\int_0^\pi \mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x\,\partial x=0 \ldots\ldots (g)$:

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\,\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x\,\partial x=\frac{\pi}{4}\left(\frac{r^{n+1}}{n+1}+\frac{r^{n-1}}{n-1}\right)\ldots\ldots(13)$$

Au moyen de la formule $\mathrm{Sin}\,(n+1)x=\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x+\mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x$ (h)

on a par les intégrales (12) et (13) à l'aide de la substitution de $n+1$ au lieu de n dans (12):

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\,\mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x\,\partial x=\frac{\pi}{2}\,\frac{r^{n-1}}{n+1}-\frac{\pi}{4}\left(\frac{r^{n+1}}{n+1}+\frac{r^{n-1}}{n-1}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{r^{n+1}}{n+1}-\frac{r^{n-1}}{n-1}\right). \qquad (14)$$

Enfin on obtient par l'application de la formule (f) aux intégrales (4) et (7) au moyen de la même méthode que ci-dessus

$$\int_0^\pi [lr-l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)]\,\mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x\,\partial x=\frac{\pi}{2}\int(1+r^2)\,r^{n-2}\,\partial r$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{r^{n-1}}{n-1}+\frac{r^{n+1}}{n+1}\right),$$

$$\int_0^\pi [lr-l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)]\,\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x\,\partial x=\frac{\pi}{2}\int(1-r^2)r^{n-2}\partial r$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{r^{n-1}}{n-1}-\frac{r^{n+1}}{n+1}\right),$$

d'où à cause de (g) et de $\int_0^\pi \mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x\,\partial x=0 \ldots\ldots$ (i

$$\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,\mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x\,\partial x=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{r^{n+1}}{n+1}+\frac{r^{n-1}}{n-1}\right) \quad (15)$$

$$\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x\,\partial x=\frac{\pi}{2}\left(\frac{r^{n+1}}{n+1}-\frac{r^{n-1}}{n-1}\right). \quad (16)$$

L'application de la formule (f) aux intégrales (3) et (5) reproduirait les intégrales (1) et (2). — L'intégrale (11) rentre dans (12) pour $n=1$.

Les deux dernières intégrales auraient pu être calculées au moyen de l'intégrale (1) à l'aide des formules connues

$$2\,\mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x = \mathrm{Cos}\,(n-1)\,x + \mathrm{Cos}\,(n+1)\,x \ldots (\mathrm{k})$$
$$\text{et}\quad 2\,\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Cos}\,(n-1)\,x - \mathrm{Cos}\,(n+1)\,x \ldots (\mathrm{l})$$

comme aussi les intégrales (4) et (7) au moyen de (3); de même on trouverait les intégrales (13) et (14) au moyen de (12) par les formules anologues

$$2\,\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x = \mathrm{Sin}\,(n+1)x + \mathrm{Sin}\,(n-1)x \ldots (\mathrm{m})$$
$$\text{et}\quad 2\,\mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Sin}\,(n+1)x - \mathrm{Sin}\,(n-1)\,x \ldots (\mathrm{n}).$$

De ces diverses intégrales les (8) et (10) se trouvent chez Prof. Schlömilch l. c. form. [31] et [14], la dernière pour une raison semblable à celle mentionnée pour nos intégrales (3), (5) et (7).

On a ici partout la condition $n > 0 \ldots (\alpha)$.

3. Passons à la constante n, et commençons par la différentiation par rapport à n. A cause de la conformité entre les valeurs des intégrales (1) et (12), on peut les combiner: on obtient alors:

$$-\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,\mathrm{Cos}\,nx\partial x$$
$$=+2\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}x}\;\mathrm{Sin}\,nx\partial x = \pi r^n\frac{1}{n},$$

$$+\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}x+r^2)x\,\mathrm{Sin}\,nx\partial x$$
$$=+2\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\mathrm{Cos}x}\;x\,\mathrm{Cos}\,nx\partial x = \pi r^n\frac{nlr-1}{n^2},$$

$$+\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}x+r^2)x^2\,\mathrm{Cos}\,nx\partial x$$
$$=-2\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}x}\;x^2\,\mathrm{Sin}\,nx\partial x = \pi r^n\frac{(nlr)^2-2(nlr-1)}{n^3},$$

$$-\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}x+r^2)\,x^3\,\mathrm{Sin}\,nx\partial x$$
$$=-2\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}x}\,x^3\mathrm{Cos}nx\partial x = \pi r^n\frac{(nlr)^2(nlr-3+2.3(nlr-1)}{n^4},$$

$$-\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,x^4\,\mathrm{Cos}\,nx\partial x$$
$$=+2\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\mathrm{Cos}x}\,x^4\,\mathrm{Sin}\,nx\partial x,$$

$$= \pi r^n \frac{(nlr)^4 - 4(nlr)^2(nlr-3) - 2.3.4(nlr-1)}{n^5}$$

etc. etc. etc.

d'où se déduisent aisément les formules génerales pour $p \geq 0$ et entier (δ):

$$\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)x^{2p}\,\mathrm{Cos}\,nx\,\partial x$$

$$= -2\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\,x^{2p}\,\mathrm{Sin}\,nx\,\partial x$$

$$= \frac{(-1)^{p+1}\pi r^n}{n^{2p+1}} \left\{ \begin{matrix} 2.3....2p(1-nlr)+4.5....2p(3-nlr)(nlr)^2 \\ +6.7....2p(5-nlr)(nlr)^4+....... \\ ....+2p(2p-1-nlr)(nlr)^{2p-2}+(nlr)^{2p} \end{matrix} \right\}$$

$$= \frac{(-1)^{p+1}\pi r^n \Gamma(2p+1)}{n^{2p+1}} \Big[(1-nlr) + \frac{3-nlr}{2.3}(nlr)^2 + \frac{5-nlr}{2.3.4.5}(nlr)^4 + ...$$
$$... + \frac{(2p-1)-nlr}{\Gamma(2p)}(nlr)^{2p-2} + \frac{(nlr)^{2p}}{\Gamma(2p+1)} \Big]$$

$$= \frac{(-1)^{p+1}\pi r^n \Gamma(2p+1)}{n^{2p+1}} \Big[1 - \frac{nlr}{1} + \frac{(nlr)^2}{1.2} - \frac{(nlr)^3}{2.3}$$
$$+ \frac{(nlr)^4}{2.3.4} - \frac{(nlr)^5}{2.3.4.5} + ... - \frac{(nlr)^{2p-1}}{\Gamma(2p)} + \frac{(nlr)^{2p}}{\Gamma(2p+1)} \Big]$$
$$= \frac{(-1)^{p+1}\pi r^n \Gamma(2p+1)}{n^{2p+1}} \sum_{a=0}^{a=2p} \frac{(-nlr)^a}{\Gamma(a+1)}, \qquad (17 \text{ et } 18)$$

$$\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)x^{2p+1}\,\mathrm{Sin}\,nx\,\partial x$$

$$= +2\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\,x^{2p+1}\,\mathrm{Cos}\,nx\,\partial x$$

$$= \frac{(-1)^p \pi r^n}{n^{2p+2}} \left\{ \begin{matrix} 2.3...(2p+1)(nlr-1)+4.5...(2p+1)(nlr-3)(nlr)^2 \\ +6.7...(2p+1)(nlr-5)(nlr)^4+... \\ ...+(nlr-2p-1)(nlr)^{2p} \end{matrix} \right\}$$

$$= \frac{(-1)^{p+1}\pi r^n \Gamma(2p+2)}{n^{2p+2}} \sum_{a=0}^{a=2p+1} \frac{(-nlr)^a}{\Gamma(a+1)} \qquad (19 \text{ et } 20)$$

Il résulte de la conformité entre les valeurs des intégrales (13) et (15), (14) et (16) respectivement, qui dépend seulement de celle entre (1) et (12), qu'on ait en se servant des formules (k) à (n)

$$+2\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,\mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Cos}\,x\,\partial x$$

$$=-4\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{r\,\text{Sin}\,x}{1-r\,\text{Cos}\,x}\,\text{Sin}\,nx\,\text{Cos}\,x\partial x$$

$$=\int_0^\pi l(1-2r\,\text{Cos}\,x+r^2)\,\text{Cos}\,(n-1)\,x\partial x$$

$$+\int_0^\pi l(1-2r\,\text{Cos}\,x+r^2)\,\text{Cos}\,(n+1)\,x\partial x,$$

$$+2\int_0^\pi l(1-2r\,\text{Cos}\,x+r^2)\,\text{Sin}\,nx\,\text{Sin}\,x\partial x$$

$$=+4\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{r\,\text{Sin}\,x}{1-r\text{Cos}x}\,\text{Cos}\,nx\,\text{Sin}\,x\partial x$$

$$=\int_0^\pi l(1-2r\,\text{Cos}\,x+r^2)\,\text{Cos}\,(n-1)\,x\partial x$$

$$-\int_0^\pi l(1-2r\,\text{Cos}\,x+r^2)\,\text{Cos}\,(n+1)\,x\partial x.$$

Si donc on différentie les premiers membres de ces équations par rapport à n, le résultat pourra se déduire des formules (17) et (19) en y faisant successivement n égal à $n-1$ et à $n+1$; tandis que le nouveau facteur $\text{Cos}\,x$ ou $\text{Sin}\,x$, ne contenant pas de n, la forme des intégrales elles-mêmes sera celle des intégrales (17 et 18), (19 et 20) sauf le facteur $\text{Cos}\,x$ ou $\text{Sin}\,x$, qui s'y est introduit. Ainsi on aura, en faisant attention au changement de signe, introduit par la différentiation, après une reduction facile:

(21 et 22)

$$\int_0^\pi l(1-2r\,\text{Cos}\,x+r^2)\,x^{2p}\,\text{Cos}\,nx\,\text{Cos}\,x\partial x$$

$$=-2\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{r\,\text{Sin}\,x}{1-r\,\text{Cos}\,x}\,x^{2p}\,\text{Sin}\,nx\,\text{Cos}\,x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi r^{n-1}\Gamma(2p+1)}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{(n-1)^{2p+1}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p}\dfrac{\{-(n-1)\,lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\\[2ex] +\dfrac{r^2}{(n+1)^{2p+1}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p}\dfrac{\{-(n+1)\,lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\},$$

(23 et 24)

$$\int_0^\pi l(1-2r\,\text{Cos}\,x+r^2)\,x^{2p+1}\,\text{Sin}\,nx\,\text{Cos}\,x\partial x$$

$$=2\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{r\,\text{Sin}\,x}{1-r\text{Cos}\,x}\,x^{2p+1}\,\text{Cos}\,nx\,\text{Cos}\,x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi r^{n-1}\Gamma(2p+2)}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{(n-1)^{2p+2}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p+1}\dfrac{\{-(n-1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ +\dfrac{r^2}{(n+1)^{2p+2}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p+1}\dfrac{\{-(n+1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\}$$

(25 et 26)

$$\int_0^\pi l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)\,x^{2p}\,\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x\partial x$$

$$=2\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}\,x^{2p}\,\mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi r^{n-1}\Gamma(2p+1)}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{(n-1)^{2p+1}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p}\dfrac{\{-(n-1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ -\dfrac{r^2}{(n+1)^{2p+1}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p}\dfrac{\{-(n+1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\}$$

(27 et 28)

$$\int_0 l(1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2)x^{2p+1}\mathrm{Cos}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x\partial x$$

$$=-2\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{r\,\mathrm{Sin}\,x}{1-\ r\,\mathrm{Cos}\,x}\,x^{2p+1}\,\mathrm{Sin}\,nx\,\mathrm{Sin}\,x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p}\pi r^{n-1}\Gamma(2p+2}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{(n-1)^{2p+2}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p+1}\dfrac{\{-(n-1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ -\dfrac{r^2}{(n+1)^{2p+2}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p+1}\dfrac{\{-(n+1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\}.$$

4. En différentiant les formules (3) et (4) par rapport à n, on obtient, en observant la conformité des valeurs de ces intégrales quant à cette constante:

$$-\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}nx\,\partial x}{1-2r\,\mathrm{Cos}x+r^2}\,x=\frac{2r}{1-r^2}\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}nx\,\partial x}{1-2r\,\mathrm{Cos}x+r^2}\,x\mathrm{Sin}x$$

$$=\frac{\pi}{1-r^2}\,r^n\,lr,$$

$$-\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}nx\,\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}x+r^2}\,x^2=-\frac{2r}{1-r^2}\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}nx\,\partial x}{1-2r\mathrm{Cos}x+r^2}\,x^2\,\mathrm{Sin}x$$

$$=\frac{\pi}{1-r^2}\,r^n\,(lr)^2$$

$$+\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}\,nx\,\partial x}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}x^3 = -\frac{2r}{1-r^2}\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,nx\,\partial x}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}x^3\,\mathrm{Sin}\,x$$

$$= \frac{\pi}{1-r^2}r^n(lr)^3,$$

d'où l'on conclut généralement:

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,nx\,\partial x}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}x^{2p} = (-1)^p\frac{\pi}{1-r^2}r^n(lr)^{2p}, \tag{29}$$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}\,nx\,\partial x}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}x^{2p+1} = (-1)^{p+1}\frac{\pi}{1-r^2}r^n(lr)^{2p+1}, \tag{30}$$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}\,nx\,\partial x}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}x^{2p}\,\mathrm{Sin}\,x = (-1)^p\frac{\pi}{2}r^{n-1}(lr)^{2p}, \tag{31}$$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,nx\,\partial x}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}x^{2p+1}\,\mathrm{Sin}\,x = (-1)^p\frac{\pi}{2}r^{n-1}(lr)^{2p+1}. \tag{32}$$

Au contraire en multipliant de part et d'autre simplement par ∂n, et en intégrant par rapport à n, on trouve

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}\,nx\,\partial x}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}\,\frac{1}{x}$$

$$= -\frac{2r}{1-r^2}\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,nx\,\partial x}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}\,\frac{\mathrm{Sin}\,x}{x} = \frac{\pi}{1-r^2}\,\frac{r^n}{lr},$$

$$-\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,nx\,\partial x}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}\,\frac{1}{x^2}$$

$$= -\frac{2r}{1-r^2}\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}\,nx\,\partial x}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}\,\frac{\mathrm{Sin}\,x}{x^2} = \frac{\pi}{1-r^2}\,\frac{r^n}{(lr)^2},$$

$$-\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}\,nx\,\partial x}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}\,\frac{1}{x^3}$$

$$= +\frac{2r}{1-r^2}\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,nx\,\partial x}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}\,\frac{\mathrm{Sin}\,x}{x^3} = \frac{\pi}{1-r^2}\,\frac{r^n}{(lr)^3}.$$

Ainsi on a les formules générales:

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,nx\,\partial x}{1-2r\,\mathrm{Cos}\,x+r^2}\,\frac{1}{x^{2p}} = (-1)^p\frac{\pi}{1-r^2}\,\frac{r^n}{(lr)^{2p}}, \tag{33}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin} nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos} x+r^2}\;\frac{1}{x^{2p+1}}=(-1)^p\,\frac{\pi}{1-r^2}\;\frac{r^2}{(lr)^{2p+1}}, \qquad (34)$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin} nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos} x+r^2}\;\frac{\operatorname{Sin} x}{x^{2p}}=(-1)^p\,\frac{\pi}{2}\;\frac{r^{n-1}}{(lr)^{2p}}, \qquad (35)$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos} nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos} x+r^2}\;\frac{\operatorname{Sin} x}{x^{2p+1}}=(-1)^{p+1}\,\frac{\pi}{2}\;\frac{r^{n-1}}{(lr)^{2p}}. \qquad (36)$$

On déduit des intégrales (4) et (7) la relation

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos} nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos} x+r^2}\operatorname{Cos} x=\frac{1+r^2}{1-r^2}\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin} nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos} x+r^2}\operatorname{Sin} x,$$

dont on conclut, puisque leur rapport est indépendant de n, que la différentiation et l'intégration par rapport à la constante n de cette intégrale (4) nous fourniront les suivantes:

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos} nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos} x+r^2}\,x^{2p}\operatorname{Cos} x=(-1)^p\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1+r^2}{1-r^2}\,r^{n-1}(lr)^{2p}, \qquad (37)$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin} nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos} x+r^2}\,x^{2p+1}\operatorname{Cos} x=(-1)^{p+1}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1+r^2}{1-r^2}\,r^{n-1}(lr)^{2p+1} \qquad (38)$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos} nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos} x+r^2}\;\frac{\operatorname{Cos} x}{x^{2p}}=(-1)^p\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1+r^2}{1-r^2}\;\frac{r^{n-1}}{(lr)^{2p}} \qquad (39)$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin} nx\,\partial x}{1-2r\operatorname{Cos} x+r^2}\;\frac{\operatorname{Cos} x}{x^{2p+1}}=(-1)^{p+1}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1+r^2}{1-r^2}\;\frac{r^{n-1}}{(lr)^{2p}} \qquad (40)$$

De ces intégrales toutes sont soumises à la condition $n>0$ (α) exceptées les (29) et (30), qui jouissent de la condition $n \geqq 0$.... (γ) à cause de la formule (3) dont elles sont déduites. De même on a partout $p \geqq 0$ et entier (δ). De plus la condition $1 \geqq r \geqq -1$ (β) se change dans les intégrales (17) à (40) dans la suivante $1 \geqq r \geqq$ ....0 (ε), puisque les valeurs de toutes ces intégrales sont des fonctions (lr) et ainsi valent seulement pour des valeurs positives de r.

Les intégrales (17) à (40) se divisent naturellement en quatres groupes, savoir:

17, 19, 21, 23, 25 et 27
18, 20, 22, 24, 26 et 28

et

29, 32, 33, 36, 37 et 39
30, 31, 34, 35, 38 et 40

dont les deux derniers groupes surtout sont assez simples.

5. Après avoir vu de nouveau la fertilité de ces principaux théorèmes, la différentiation et l'intégration par rapport à une constante sous le signe d'intégration définie, passons à l'usage d'une propriété curieuse, dont jouissent les fonctions

$$l(1-2r\text{Cos}x+r^2),\ (1-2r\text{Cos}x+r^2)^{-1} \text{ et } \text{Arctg}\frac{r\text{Sin}x}{1-r\text{Cos}x}$$

et qui nous servira, non- seulement à obtenir quelques nouvelles intégrales, mais aussi à réduire la limite de quelques unes de nos intégrales π à son double, moyennant quelque restriction à l'égard des constantes.

Prenons à ce but r successivement positif et négatif et faisons $r^2=\varrho\ldots\ldots(\zeta)$; de sorte qur pour cette nouvelle constante la condition (β) devienne

$$1 \geq \varrho \geq 0 \ldots\ldots (\eta).$$

On obtient alors

(o)

$$l(1-2r\text{Cos}x+r^2)+l(1+2r\text{Cos}x+r^2)=l[(1+r^2)^2-(2r\text{Cos}x)^2]$$
$$=l[1+r^4-2r^2(2\text{Cos}^2x-1)]=l(1-2r^2\text{Cos}2x+r^4)=l(1-2\varrho\text{Cos}2x+\varrho^2),$$

$$\frac{1}{1-2r\text{Cos}x+r^2}+\frac{1}{1+2r\text{Cos}x+r^2}=2\frac{1+r^2}{(1+r^2)^2-(2r\text{Cos}x)^2}$$

$$=2\frac{1+\varrho}{1-2\varrho\text{Cos}2x+\varrho^2}, \qquad \text{(p)}$$

$$\frac{1}{1-2r\text{Cos}x+r^2}-\frac{1}{1+2r\text{Cos}x+r^2}=\frac{4r\text{Cos}x}{(1+r^2)^2-(2r\text{Cos}x)^2}$$

$$=\frac{4r\text{Cos}x}{1-2\varrho\text{Cos}2x+\varrho^2}, \qquad \text{(q)}$$

$$\text{Arctg}\frac{r\,\text{Sin}\,x}{1-r\text{Cos}x}+\text{Arctg}\frac{-r\,\text{Sin}\,x}{1+r\,\text{Cos}x}=\text{Arctg}\frac{\frac{r\,\text{Sin}x}{1-r\text{Cos}x}-\frac{r\,\text{Sin}x}{1+r\text{Cos}x}}{1+\frac{r^2\text{Sin}^2x}{1-r^2\text{Cos}^2x}}$$

$$=\text{Arctg}\frac{2r^2\text{Sin}x\,\text{Cos}x}{1-r^2(\text{Cos}^2x-\text{Sin}^2x)}=\text{Arctg}\frac{\varrho\,\text{Sin}\,2x}{1-\varrho\,\text{Cos}\,2x}, \qquad \text{(r)}$$

$$\text{Arctg}\frac{r\text{Sin}x}{1-r\text{Cos}x}-\text{Arctg}\frac{-r\,\text{Sin}\,x}{1+r\text{Cos}x}=\text{Arctg}\frac{\frac{r\text{Sin}x}{1-r\text{Cos}x}+\frac{r\text{Sin}x}{1+r\,\text{Cos}x}}{1-\frac{r^2\,\text{Sin}^2x}{1-r^2\,\text{Cos}^2x}}$$

$$=\text{Arctg}\frac{2r\,\text{Sin}x}{1-r^2} \qquad \text{(s)}$$

On voit de suite que ces transformations ne sont pas applicables aux intégrales (17) à (40), puisque leurs valeurs étant des fonctions de (lr), ne valent parsuite que pour r positif. Occupons-nous donc des intégrales (1) à (16) et premièrement quant au changement des intégrales elles même. Il faut observer, que partout, où dans les valeurs de ces intégrales r est élevé à une puissance, fonction de n, il faut distinguer les cas de n pair et impair ou égal à $2m$ et à $2m-1$.

(1) donne par (o), pour $n=2m-1$:

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\text{Cos}2x+\varrho^2)\text{Cos}(2m-1)x\partial x=0; \qquad (41)$$

(2) donne par (o):

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\text{Cos}2x+\varrho^2)\partial x=0, \qquad (42)$$

qui, au fond, ne diffère pas de (2);

(3) donne par (p) pour $n=2m-1$:

$$\int_0^\pi\frac{\text{Cos}\,(2m-1)\,x\,\partial x}{1-2\varrho\text{Cos}2x+\varrho^2}=0; \qquad (43)$$

(3) donne par (9) et (4) par (p) pour $n=2m$:

$$\int_0^\pi\frac{\text{Cos}2mx\,\text{Cos}x\partial x}{1-2\varrho\,\text{Cos}2x+\varrho^2}=0; \qquad (44)$$

(4) donne pour $n=2m-1$, par l'application successive de (p) et de (q):

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,(2m-1)x\,.\,\mathrm{Cos}\,x\,\partial x}{1-2\varrho\,\mathrm{Cos}2x+\varrho^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{\varrho^m}{1-\varrho}, \qquad (45)$$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,(2m-1)x\,.\,\mathrm{Cos}^2 x\,\partial x}{1-2\varrho\,\mathrm{Cos}2x+\varrho^2}=0; \qquad (46)$$

d'où à cause de $2\mathrm{Cos}^2x-1=\mathrm{Cos}2x$ par (43):

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}(2m-1)x\,\mathrm{Cos}\,2x\,\partial x}{1-2\varrho\mathrm{Cos}2x+\varrho^2}=0; \qquad (47)$$

(5) donne par (9):

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}x\,\partial x}{1-2\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x+\varrho^2}=0; \qquad (48)$$

(7) donne par (p) pour $n=2m$ et $n=2m-1$, et par (9) pour $n=2m-1$, successivement:

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}2mx\,\mathrm{Sin}x\,\partial x}{1-2\varrho\mathrm{Cos}2x+\varrho^2}=0, \qquad (49)$$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}\,(2m-1)x\,\mathrm{Sin}x\partial x}{1-2\varrho\mathrm{Cos}\,2x+\varrho^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{\varrho^m}{1+\varrho}, \qquad (50)$$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}\,(2m-1)x\,\mathrm{Sin}x\,\mathrm{Cos}x\partial x}{1-2\varrho\,\mathrm{Cos}2x+\varrho^2}=0,$$

d'où

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Sin}\,(2m-1)x\,\mathrm{Sin}2x\,\partial x}{1-2\,\varrho\mathrm{Cos}2x+\varrho^2}=0. \qquad (51)$$

L'application de la formule (r) à (8), (9) et (10) nous fournit les intégrales suivantes:

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{\varrho\mathrm{Sin}2x}{1-\varrho\,\mathrm{Cos}2x}\cdot\frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x}=0, \qquad (52)$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{\varrho\mathrm{Sin}2x}{1-\varrho\mathrm{Cos}2x}\cdot\frac{\mathrm{Cos}\,x\partial x}{\mathrm{Sin}\,x}=-\pi\,l(1-\varrho), \qquad (53)$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{\varrho\,\text{Sin}\,2x}{1-\varrho\,\text{Cos}\,2x}\,\frac{\text{Cos}\,x\partial x}{\text{Sin}\,x}=0. \tag{54}$$

De même (12) (13) et (14) donnent par (r) pour $n=2m$ et $n=2m-1$ succesivement:

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{\varrho\,\text{Sin}2x}{1-\varrho\text{Cos}2x}\;\text{Sin}\,2mx\partial x=\pi\frac{\varrho^m}{m}, \tag{55}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{\varrho\,\text{Sin}\,2x}{1-\varrho\text{Cos}2x}\text{Sin}\,(2m-1)\,x\partial x=0\,, \tag{56}$$

$$\int_0 \text{Arctg}\,\frac{\varrho\,\text{Sin}\,2x}{1-\varrho\text{Cos}2x}\;\text{Sin}\,2mx\,\text{Cos}\,x\partial x=0\,, \tag{57}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{\varrho\,\text{Sin}\,2x}{1-\varrho\text{Cos}2x}\text{Sin}\,(2m-1)x\text{Cos}\,x\partial x=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\varrho^{m-1}}{m-1}+\frac{\varrho^m}{m}\right) \tag{58}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{\varrho\,\text{Sin}\,2x}{1-\varrho\text{Cos}2x}\;\text{Cos}\,2mx\,\text{Sin}\,x\partial x=0, \tag{59}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{\varrho\,\text{Sin}\,2x}{1-\varrho\text{Cos}2x}\text{Cos}(2m-1)x\text{Sin}x\partial x=-\frac{\pi}{4}\left(\frac{\varrho^{m-1}}{m-1}-\frac{\varrho^{n}}{m}\right) \tag{60}$$

Si l'on fait le même usage de (s) pour les intégrales (8), (9) et (10), et, en prenant successivement $n=2m$ et $n=2m-1$, de même pour les intégrales (12), (13) et (14), on obtient:

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{2r\,\text{Sin}\,x}{1-r^2}\,\frac{\partial x}{\text{Sin}\,x}=\pi l\,\frac{1+r}{1-r}, \tag{61}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{2r\,\text{Sin}\,x}{1-r^2}\,\frac{\text{Cos}\,x\partial x}{\text{Sin}\,x}=0, \tag{62}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{2r\,\text{Sin}x}{1-r^2}\,\frac{\text{Cos}^2x\partial x}{\text{Sin}\,x}=\pi\left(l\frac{1+r}{1-r}-r\right), \tag{63}$$

$$\int^\pi \text{Arctg}\frac{2r\,\text{Sin}\,x}{1-r^2}\;\text{Sin}\,2mx\partial x=0, \tag{64}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{2r\,\text{Sin}\,x}{1-r^2}\;\text{Sin}\,(2m-1)x\partial x=\pi\frac{r^{2m-1}}{2m-1} \tag{65}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{2r\,\text{Sin}\,x}{1-r^2}\;\text{Sin}\,2mx\,\text{Cos}\,x\partial x=\frac{\pi}{2}\left(\frac{r^{2m+1}}{2m+1}+\frac{r^{2m-1}}{2m-1}\right) \tag{66}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{2r\,\text{Sin}\,x}{1-r^2}\,\text{Sin}\,(2m-1)\,x\,\text{Cos}\,x\,\partial x=0, \tag{67}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{2r\,\text{Sin}\,x}{1-r^2}\,\text{Cos}\,2\,mx\,\text{Sin}\,x\partial x=\frac{\pi}{2}\left(\frac{r^{2m+1}}{2m+1}-\frac{r^{2m-1}}{2m-1}\right) \tag{68}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{2r\,\text{Sin}\,x}{1-r^2}\,\text{Cos}\,(2m-1)\,x\,\text{Sin}\,x\partial x=0 \tag{69}$$

L'application de la formule (o) aux intégrales (15) et (16) donne respectivement pour $n=2m$ et $n=2m-1$:

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\,\text{Cos}\,2x+\varrho^2)\,\text{Cos}2mx\,\text{Cos}\,x\partial x=0, \tag{70}$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\,\text{Cos}\,2x+\varrho^2)\,\text{Sin}\,2mx\,\text{Sin}\,x\partial x=0, \tag{71}$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\text{Cos}2x+\varrho^2)\text{Cos}(2m-1)x\text{Cos}\,x\partial x=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{\varrho^{m-1}}{m-1}+\frac{\varrho^m}{m}\right) \tag{72}$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\text{Cos}2x+\varrho^2)\text{Sin}(2m-1)x\text{Sin}\,x\partial x=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{\varrho^{m-1}}{m-1}-\frac{\varrho^m}{m}\right). \tag{73}$$

Dans toutes ces intégrales (41) à (73) on a $m>0$, exceptée l'intégrale (44), qui vaut encore pour $m \geqq 0$, comme le démontre l'intégrale (48).

Les intégrales (52) à (60) et (61) à (69)) forment deux nouveaux groupes diverses de celui, que composent les intégrales (8) à (14) en ce que les fonctions sous le signe Arctg y sont différentes.

6. Nous avons observé que ces mêmes transformations peuvent servir à changer les limites de quelques unes entre les intégrales (1) à (16); effectuons ce changement, en faisant partout $y=2x$ (θ), ce qui réduit les limites de x, 0 et π, pour y à 0 et 2π. Il est clair que ce changement ne peut avoir lieu que pour des valeurs paires de n ou égales à $2m$.

Alors (1) donne par (o)

$$\int_0^{2\pi} l\,(1-2\varrho\,\text{Cos}\,y+\varrho^2)\,\text{Cos}\,my\partial y=-2\pi\,\frac{\varrho^m}{m}. \tag{74}$$

(3) par (p)

$$\int_0^{2\pi}\frac{\text{Cos}\,my\,\partial y}{1-2\varrho\text{Cos}y+\varrho^2}=\frac{2\pi\varrho^m}{1-\varrho^2} \tag{75}$$

et (4) par (q)

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{Cos}\,2mx\,\mathrm{Cos}^2 x\,\partial x}{1-2\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x+\varrho^2} = \pi\frac{1+r^2}{1-r^2} r^{2m-1}\frac{1}{4r} = \frac{\pi}{4}\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\varrho^{m-1},$$

d'où, puisque $\mathrm{Cos}\,2x = 2\,\mathrm{Cos}^2 x = 1$, à l'aide de l'intégrale (74)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Cos}\,my\,\mathrm{Cos}\,y\,\partial y}{1-2\varrho\,\mathrm{Cos}\,y+\varrho^2} - \pi\frac{1+\varrho^2}{1-\varrho^2}\varrho^{m-1}. \qquad (76)$$

Enfin l'intégrale (7) donne, par l'application de (q)

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{Sin}\,2mx\,\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x\,\partial x}{1-2\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x+\varrho^2} = \pi r^{2m-1}\frac{1}{4r},$$

$$\text{d'où} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Sin}\,my\,\mathrm{Sin}\,y\,\partial y}{1-2\varrho\,\mathrm{Cos}\,y+\varrho^2} = \pi\varrho^{m-1}. \qquad (77)$$

Les intégrales (42), (53) et (55), trouvées dans le Paragraphe précédent, nous offrent encore pour notre but actuel les suivantes:

$$\int_0^{2\pi} l(1-2\varrho\,\mathrm{Cos}\,y+\varrho^2)\,\partial y = 0, \qquad (78)$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Arctg}\frac{\varrho\,\mathrm{Sin}\,y}{1-\varrho\,\mathrm{Cos}\,y}\,\frac{1+\mathrm{Cos}\,y}{\mathrm{Sin}\,y}\,\partial y = -2\pi\,l(1-\varrho), \qquad (79)$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Arctg}\frac{\varrho\,\mathrm{Sin}\,y}{1-\varrho\,\mathrm{Cos}\,y}\,\mathrm{Sin}\,my\,\partial y = \pi\frac{\varrho^m}{m}. \qquad (80)$$

L'intégrale (74) donne au moyen des formules (h) et (l)

$$\int_0^{2\pi} l(1-2\varrho\,\mathrm{Cos}\,y+\varrho^2)\,\mathrm{Cos}\,my\,\mathrm{Cos}\,y\,\partial y = -\pi\left(\frac{\varrho^{m-1}}{m-1}+\frac{\varrho^{m+1}}{m+1}\right) \qquad (81)$$

$$\int_0^{2\pi} l(1-2\varrho\,\mathrm{Cos}\,y+\varrho^2)\,\mathrm{Sin}\,my\,\mathrm{Sin}\,y\,\partial y = -\pi\left(\frac{\varrho^{m-1}}{m-1}-\frac{\varrho^{m+1}}{m+1}\right). \qquad (82)$$

De même l'integrale (81) nous fournit, á cause des formules (m) et (n):

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Arctg}\frac{\varrho\,\mathrm{Sin}\,y}{1-\mathrm{Cos}\,y}\,\mathrm{Sin}\,my\,\mathrm{Cos}\,y\,\partial y = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\varrho^{m+1}}{m+1}+\frac{\varrho^{m-1}}{m-1}\right) \qquad (83)$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Arctg}\frac{\varrho\,\mathrm{Sin}\,y}{1-\varrho\,\mathrm{Cos}\,y}\,\mathrm{Cos}\,my\,\mathrm{Sin}\,y\,\partial y = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\varrho^{m+1}}{m+1}-\frac{\varrho^{m-1}}{m-1}\right). \qquad (84)$$

Il s'ensuit que la valeur de ces intégrales prises entre les limites 0 et 2π est précisément la double de la valeur des mémes intégrales prises entre les limites 0 et π, savoir:

les intégrales (74), (75), (76), (77), (78), (80), (81), 82, (83) et (84) respectivement de (1), (3), (4), (7), (2), (12), (15), (16), (13) et (14).

Quant à l'intégrale (79) on vérifie cette même propriété en prenant la somme des intégrales (8) et (9).

Du reste cette propriété de ces intégrales dépend uniquement de ce qu'elle ait lieu pour les intégrales (1) et (74); car ce changement de limites n'altère aucunément l'équation (a), à l'aide de laquelle les autres intégrales (2), (3), (4), (7), et (12) à (16) sont dérivées de l'intégrale (1) comme nous l'avons montré au §. 1, sans autre restriction à l'égard de la valeur de r que la condition (β), qui comprend celle (η) comme cas particulier. Ainsi nous pouvons conclure, puisque pour ce même changement de limites la valeur de l'intégrale (6) est doublée aussi, que les intégrales restantes (5), (8), (9) et (10) devront jouir de la même propriété, de sorte que l'on doive avoir:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial y}{1-2\varrho \operatorname{Cos} y+\varrho^2}=\frac{2\pi}{1-\varrho^2}, \tag{85}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Arctg}\frac{\varrho \operatorname{Sin} y}{1-\varrho \operatorname{Cos} y}\frac{\partial y}{\operatorname{Sin} y}=\pi l\frac{1+\varrho}{1-\varrho}, \tag{86}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Arctg}\frac{\varrho \operatorname{Sin} y}{1-\varrho \operatorname{Cos} y}\frac{\operatorname{Cos} y\,\partial y}{\operatorname{Sin} y}=-\pi l(1-\varrho^2), \tag{87}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Arctg}\frac{\varrho \operatorname{Sin} y}{1-\varrho \operatorname{Cos} y}\frac{\operatorname{Cos}^2 y\,\partial y}{\operatorname{Sin} y}=\pi\left(l\frac{1+\varrho}{1-\varrho}-\varrho\right). \tag{88}$$

On a ainsi pour toutes ces fonctions la rélation

$$\int_0^{\pi}\varphi(x)\partial x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi(x)\partial x=\int_{\pi}^{2\pi}\varphi(x)\partial x. \tag{A}$$

7. Plusieurs des intégrales définies, trouvées dans les §§. 5. et 6. sont susceptibles d'être assujéties aux méthodes, dont nous avons fait usage aux §§. 3. et 4., à l'égard de la constante n.

Leur application sera bien facile ici, soit que les valeurs des intégrales à traiter soient zéro, soit, parceque au moyen de la formule évidemment vraie

$$\frac{\partial^i}{\partial a^i}\int_0^p F(a,x)\,\partial x=\left(\frac{\partial b}{\partial a}\right)^i\frac{\partial^i}{\partial b^i}\int_0^p F(a,x)\,\partial x, \tag{B}$$

où a, b et p sont des constantes, on peut, en posant $b=m$,

$p=\pi$ et $a=2m$ ou $=2m-1$, suivant les cas divers, d'où toujours $\left(\frac{\partial b}{\partial a}\right)^i=\left(\frac{1}{2}\right)^i$, ramener aisément ces intégrales aux intégrales correspondantes qui se trouvent parmi celles (3), (4), (7) et (12) à (16), qui sont traitées successivement dans les §§. cités: opération facile, puisque le rapport des valeurs de ces intégrales respectivement correspondantes est l'unité, ou du moins une fonction indépendante de la constante n.

Dans le premier cas, où la valeur des intégrales est zéro, l'influence de la différentiation, comme de l'intégration par rapport à n, se présente du premier abord: dans le cas contraire, pour toutes les intégrales, qui se rapportent à un logarithme ou à un Arctangente, on ne pourra se servir que de la différentiation par rapport à cette constante n.

Commençons par les intégrales, où l'on trouve le signe logarithmique sous le signe d'intégration définie. Il est aisé de voir, que les intégrales (41), (70) et (91) donneront tant par la différentiation que par l'intégration par rapport à n:

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\,\mathrm{Cos}2x+\varrho^2)x^{\pm 2p}\,\mathrm{Cos}(2m-1)x\partial x=0, \qquad (89)$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\,\mathrm{Cos}2x+\varrho^2)x^{\pm(2p+1)}\,\mathrm{Sin}(2m-1)x\partial x=0, \qquad (90)$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\,\mathrm{Cos}2x+\varrho^2)x^{\pm 2p}\,\mathrm{Cos}2mx\,\mathrm{Cos}x\partial x=0, \qquad (91)$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\,\mathrm{Cos}2x+\varrho^2)x^{\pm(2p+1)}\,\mathrm{Sin}2mx\,\mathrm{Cos}x\partial x=0, \qquad (92)$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\,\mathrm{Cos}2x+\varrho^2)x^{\pm 2p}\,\mathrm{Sin}2mx\,\mathrm{Sin}x\partial x=0, \qquad (93)$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\,\mathrm{Cos}2x+\varrho^2)x^{\pm(2p+1)}\,\mathrm{Cos}2mx\,\mathrm{Sin}x\partial x=0. \qquad (94)$$

Quant aux intégrales (72) et (73) elles donneront à l'aide de l'équation de réduction (B) et des intégrales (17) à (20):

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\,\mathrm{Cos}2x+\varrho^2)x^{2p}\,\mathrm{Cos}(2m-1)x\,\mathrm{Cos}\,x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi\varrho^{m-1}\Gamma(2p+1)}{2^{2p+1}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(m-1)^{2p+1}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p}\frac{\{-(m-1)l\varrho\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ +\frac{\varrho}{m^{2p+1}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p}\frac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\} \qquad (95)$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x+\varrho^2)x^{2p+1}\,\mathrm{Sin}\,(2m-1)x\,\mathrm{Cos}\,x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi\varrho^{m-1}\Gamma(2p+2)}{2^{2p+2}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(m-1)^{2p+2}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(m-1)l\varrho\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ +\frac{\varrho}{m^{2p+2}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p+1}\frac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\} \quad (96)$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x+\varrho^2)x^{2p}\,\mathrm{Sin}\,(2m-1)x\,\mathrm{Sin}\,x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi\varrho^{m-1}\Gamma(2p+1)}{2^{2p+1}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(m-1)^{2p+1}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p}\frac{\{-(m-1)l\varrho\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ -\frac{\varrho}{m^{2p+1}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p}\frac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\} \quad (97)$$

$$\int_0^\pi l(1-2\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x+\varrho^2)x^{2p+1}\,\mathrm{Cos}(2m-1)x\,\mathrm{Sin}\,x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p}\pi\varrho^{m-1}\Gamma(2p+2)}{2^{2p+2}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(m-1)^{2p+2}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(m-1)l\varrho\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ -\frac{\varrho}{m^{2p+2}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p+1}\frac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\} \quad (98)$$

8. Passons maintenant aux deux groupes, où la fonction principale sous le signe d'intégration est un Arctg, et traitons en premier lieu le groupe des intégrales (55) à (60), dont celles (56), (67) et (59) donneront tout de suite:

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x}{1-\varrho\mathrm{Cos}2x}\,x^{\pm 2p}\,\mathrm{Sin}\,(2m-1)\,x\,\partial x=0, \quad (99)$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x}{1-\varrho\mathrm{Cos}2x}\,x^{\pm(2p+1)}\,\mathrm{Cos}\,(2m-1)x\partial x=0, \quad (100)$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x}{1-\varrho\mathrm{Cos}2x}\,x^{\pm 2p}\,\mathrm{Sin}\,2mx\,\mathrm{Cos}\,x\,\partial x=0, \quad (101)$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x}{1-\varrho\mathrm{Cos}2x}\,x^{\pm(2p+1)}\mathrm{Cos}\,2mx\mathrm{Cos}\,x\,\partial x=0, \quad (102)$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x}{1-\varrho\mathrm{Cos}2x}\,x^{\pm 2p}\,\mathrm{Cos}\,2mx\,\mathrm{Sin}\,x\,\partial x=0, \quad (103)$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\,\frac{\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x}{1-\varrho\mathrm{Cos}2x}\,x^{\pm(2p+1)}\,\mathrm{Sin}\,2mx\,\mathrm{Sin}\,x\partial x=0; \quad (104)$$

tandis que les intégrales (55), (58) et (60) fourniront au moyen du procédé du §. précédent et des mêmes formules (17) à (20):

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{\varrho\,\text{Sin}\,2x}{1-\varrho\,\text{Cos}\,2x}\,x^{2p}\,\text{Sin}\,2mx\,\partial x$$

$$=\frac{(-1)^p\pi\varrho^m\Gamma(2p+1)}{2^{2p}\,m^{2p+1}}\sum_{a=0}^{a=2p}\frac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)}, \tag{105}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{\varrho\,\text{Sin}\,2x}{1-\varrho\,\text{Cos}\,2x}\,x^{2p+1}\,\text{Cos}\,2mx\,\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi\varrho^m\Gamma(2p+2)}{2^{2p+1}\,m^{2p+2}}\sum_{a=0}^{a=2p+1}\frac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)}. \tag{106}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{\varrho\,\text{Sin}\,2x}{1-\varrho\,\text{Cos}\,2x}\,x^{2p}\,\text{Sin}\,(2m-1)x\,\text{Cos}\,x\,\partial x$$

$$=\frac{(-1)^p\pi\varrho^{m-1}\Gamma(2p+1)}{2^{2p+2}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(m-1)^{2p+1}}\sum_{a=0}^{a=2p}\frac{\{-(m-1)l\varrho\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ \quad+\frac{\varrho}{m^{2p+1}}\sum_{a=0}^{a=2p}\frac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\}, \tag{107}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{\varrho\,\text{Sin}\,2x}{1-\varrho\,\text{Cos}\,2x}\,x^{2p+1}\,\text{Cos}(2m-1)x\,\text{Cos}\,x\,\partial x$$

$$=\frac{(-1)^p\pi\varrho^{m-1}\Gamma(2p+2)}{2^{2p+3}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(m-1)^{2p+2}}\sum_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(m-1)l\varrho\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ \quad+\frac{\varrho}{m^{2p+2}}\sum_{a=0}^{a=2p+1}\frac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\}, \tag{108}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{\varrho\,\text{Sin}\,2x}{1-\varrho\,\text{Cos}\,2x}\,x^{2p}\,\text{Cos}(2m-1)x\,\text{Sin}\,x\,\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi\varrho^{m-1}\Gamma(2p+1)}{2^{2p+2}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(m-1)^{2p+1}}\sum_{a=0}^{a=2p}\frac{\{-(m-1)l\varrho\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ \quad-\frac{\varrho}{m^{2p+1}}\sum_{a=0}^{a=2p}\frac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\}, \tag{109}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{\varrho\,\text{Sin}\,2x}{1-\varrho\,\text{Cos}\,2x}\,x^{2p+1}\,\text{Sin}\,(2m-1)x\,\text{Sin}\,x\,\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi\varrho^{m-1}\Gamma(2p+2)}{2^{2p+3}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(m-1)^{2p+2}}\sum_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(m-1)l\varrho\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ \quad-\frac{\varrho}{m^{2p+2}}\sum_{a=0}^{a=2p+1}\frac{(-ml\varrho)^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\} \tag{110}$$

Aprésent nous avons à traiter le groupe (64) à (69) dont les intégrales (64), (67) et (69) donnent de suite:

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{2r\,\text{Sin}\,x}{1-r^2}\,x^{\pm 2p}\,\text{Sin}\,2mx\,\partial x=0, \tag{111}$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{2r\text{Sin}\,x}{1-r^2}\,x^{\pm(2p+1)}\,\text{Cos}\,2mx\partial x=0, \qquad (112)$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{2r\text{Sin}x}{1-r^2}\,x^{\pm 2p}\text{Sin}(2m-1)x\text{Cos}x\partial x=0, \qquad (113)$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{2r\text{Sin}x}{1-r^2}\,x^{\pm(2p+1)}\text{Cos}(2m-1)x\text{Cos}x\partial x=0, \qquad (114)$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{2r\text{Sin}x}{1-r^2}\,x^{\pm 2p}\text{Cos}(2m-1)x\,\text{Sin}x\partial x=0, \qquad (115)$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{2r\text{Sin}x}{1-r^2}\,x^{\pm(2p+1)}\,\text{Sin}(2m-1)x\text{Sin}x\partial x=0. \qquad (116)$$

Au contraire les intégrales (65), (66) et (68) toujours à l'aide des mêmes formules, que ci-dessus, engendrent les suivantes:

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{2r\text{Sin}x}{1-r^2}\,x^{2p}\text{Sin}(2m-1)x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^p\pi r^{2m-1}\Gamma(2p+1)}{2^{2p}(2m-1)^{2p+1}}\sum_{a=0}^{a=2p}\frac{\{-(2m-1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}, \qquad (117)$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{2r\text{Sin}x}{1-r^2}\,x^{2p+1}\text{Cos}(2m-1)x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^p\pi r^{2m-1}\Gamma(2p+2)}{2^{2p+1}(2m-1)^{2p+2}}\sum_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(2m-1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}, \qquad (118)$$

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\frac{2r\,\text{Sin}\,x}{1-r^2}\,x^{2p}\,\text{Sin}\,2mx\,\text{Cos}\,x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^p\pi r^{2m-1}\Gamma(2p+1)}{2^{2p}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{(2m-1)^{2p+1}}\displaystyle\sum_{a=0}^{a=2p}\frac{\{-(2m-1)\,lr)\}^a}{\Gamma(a+1}\\ +\dfrac{r^2}{(2m+1)^{2p+1}}\displaystyle\sum_{a=0}^{a=2p}\frac{\{-(2m+1)\,lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\}, \qquad (119)$$

(120)

$$\int_0^\pi \text{Arctg}\,\frac{2r\,\text{Sin}\,x}{1-r^2}\,x^{2p+1}\text{Cos}\,2mx\text{Cos}\,x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^{p+1}\pi r^{2m-1}\Gamma(2p+2)}{2^{2p+1}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{(2m-1)^{2p+2}}\displaystyle\sum_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(2m-1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\\ +\dfrac{r^2}{(2m+1)^{2p+2}}\displaystyle\sum_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(2m+1)\,lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\}$$

(121)

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{2r\operatorname{Sin}x}{1-r^2}x^{2p}\operatorname{Cos}2mx\operatorname{Sin}x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^p\pi r^{2m-1}\Gamma(2p+2)}{2^{2p}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(2m-1)^{2p+1}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p}\frac{\{-(2m-1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\\-\frac{r^2}{(2m+1)^{2p+1}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p}\frac{\{-(2m+1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\},$$

(122)

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctg}\frac{2r\operatorname{Sin}x}{1-r^2}x^{2p+1}\operatorname{Sin}2mx\operatorname{Sin}x\partial x$$

$$=\frac{(-1)^p\pi r^{2m-1}\Gamma(2p+2)}{2^{2p+1}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(2m-1)^{2p+2}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(2m-1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\\-\frac{r^2}{(2m+1)^{2p+2}}\sum\limits_{a=0}^{a=2p+1}\frac{\{-(2m+1)lr\}^a}{\Gamma(a+1)}\end{array}\right\}.$$

9. Restent les intégrales, qui ont sous le signe d'intégration une fonction principale $(1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2)^{-1}$. Traitons les dans l'ordre suivant:

(43), (44), (45), (49), (50), (47) et (51).

On pourra appliquer à toutes et la différentiation et l'intégration par rapport à n sous le signe d'intégration définie, dont les resultats se présenteront ou d'eux-mêmes, ou comme des suites necessaires des résultats obtenus dans le §. 4. Ainsi l'on trouvera:

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos}(2m-1)x\partial x}{1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2}x^{\pm 2p}=0, \tag{123}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin}(2m-1)x\partial x}{1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2}x^{\pm(2p+1)}=0, \tag{124}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos}2mx\operatorname{Cos}x\partial x}{1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2}x^{\pm 2p}=0, \tag{125}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin}2mx\operatorname{Cos}x\partial x}{1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2}x^{\pm(2p+1)}=0, \tag{126}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos}(2m-1)x\operatorname{Cos}x\partial x}{1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2}x^{2p}=\frac{(-1)^p}{2^{2p+1}}\cdot\frac{\pi}{1-\varrho}\cdot\varrho^m(l\varrho)^{2p}, \tag{127}$$

(128)

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin}(2m-1)x\operatorname{Cos}x\partial x}{1-2\varrho\operatorname{Cos}2x+\varrho^2}x^{2p+1}=\frac{(-1)^{p+1}}{2^{2p+2}}\cdot\frac{\pi}{1-\varrho}\cdot\varrho^m(l\varrho)^{2p+1},$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos}(2m-1)x \operatorname{Cos} x \partial x}{1-2\varrho \operatorname{Cos} 2x+\varrho^2} \frac{1}{x^{2p}} = (-1)^p . 2^{2p-1} \frac{\pi}{1-\varrho} \cdot \frac{\varrho^m}{(l\varrho)^{2p}}, \tag{129}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin}(2m-1)x \operatorname{Cos} x \partial x}{1-2\varrho \operatorname{Cos} 2x+\varrho^2} \frac{1}{x^{2p+1}} = (-1)^p . 2^{2p} \frac{\pi}{1-\varrho} \cdot \frac{\varrho^m}{(l\varrho)^{2p+1}}, \tag{130}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin} 2mx \operatorname{Sin} x \partial x}{1-2\varrho \operatorname{Cos} 2x+\varrho^2} x^{\pm 2p} = 0, \tag{131}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos} 2mx \operatorname{Sin} x \partial x}{1-2\varrho \operatorname{Cos} 2x+\varrho^2} x^{\pm(2p+1)} = 0, \tag{132}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin}(2m-1)x \operatorname{Sin} x \partial x}{1-2\varrho \operatorname{Cos} 2x+\varrho^2} x^{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p+1}} \cdot \frac{\pi}{1+\varrho} \varrho^m (l\varrho)^{2p}, \tag{133}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos}(2m-1)x \operatorname{Sin} x \partial x}{1-2\varrho \operatorname{Cos} 2x+\varrho^2} x^{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2^{2p+2}} \cdot \frac{\pi}{1+\varrho} \varrho^m (l\varrho)^{2p+1}, \tag{134}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin}(2m-1)x \operatorname{Sin} x \partial x}{1-2\varrho \operatorname{Cos} 2x+\varrho^2} \frac{1}{x^{2p}} = (-1)^p 2^{2p-1} . \frac{\pi}{1+\varrho} \cdot \frac{\varrho^m}{(l\varrho)^{2p}}, \tag{135}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos}(2m-1)x \operatorname{Sin} x \partial x}{1-2\varrho \operatorname{Cos} 2x+\varrho^2} \frac{1}{x^{2p+1}} = (-1)^{p+1} 2^{2p} . \frac{\pi}{1+\varrho} \cdot \frac{\varrho^m}{(l\varrho)^{2p+1}}, \tag{136}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos}(2m-1)x \operatorname{Cos} 2x \partial x}{1-2\varrho \operatorname{Cos} 2x+\varrho^2} x^{\pm 2p} = 0, \tag{137}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin}(2m-1)x \operatorname{Cos} 2x \partial x}{1-2\varrho \operatorname{Cos} 2x+\varrho^2} x^{\pm(2p+1)} = 0, \tag{138}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Sin}(2m-1)x \operatorname{Sin} 2x \partial x}{1-2\varrho \operatorname{Cos} 2x+\varrho^2} x^{\pm 2p} = 0, \tag{139}$$

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{Cos}(2m-1)x \operatorname{Sin} 2x \partial x}{1-2\varrho \operatorname{Cos} 2x+\varrho^2} x^{\pm(2p+1)} = 0. \tag{140}$$

10. Enfin les intégrales

(74), (81), (82), (80), (83), (84), (75), (76) et (77),

doubles de celles

(1), (15), (16), (12), (13), (14), (3), (4) et (7),

donneront de même, au moyen des méthodes des §§. 3. et 4., des intégrales doubles de celles, qui sont déduites des dernières. De cette manière les intégrales (17) à (40) prises entre les limites 0 et 2π

auront aussi une valeur double de celles prises entre les limites 0 et π, de sorte que pour toutes ces intégrales on a la rélation

$$\int_0^\pi \varphi(x)\partial x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\partial x = \int_\pi^{2\pi} \varphi(x)\,\partial x. \qquad \text{(A)}$$

Il n'est pas besoin de transcrire toutes ces intégrales ici, puisque ni leur forme ni leur valeur ne change proprement, pourvu que l'on mette partout $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}$ à la place de $\int_0^\pi$, et qu'on fasse attention à la condition actuelle $1 \geqq \varrho \geqq 0$.

11. On peut remarquer en dernier lieu, que dans les intégrales de la forme

$$\varkappa = \int_0^\pi \text{Arctg}\frac{r\text{Sin}x}{1-r\text{Cos}x} f(x^t, \text{Cos}px, \text{Sin}qx)\partial x\,, \qquad \text{(C)}$$

$$\lambda = \int_0^\pi \text{Arctg}\frac{\varrho\,\text{Sin}2x}{1-\varrho\,\text{Cos}2x} f(x^t, \text{Cos}px, \text{Sin}qx)\partial x\,, \qquad \text{(D)}$$

$$\mu = \int_0^\pi \text{Arctg}\frac{2r\text{Sin}x}{1-r^2}\, f(x^t, \text{Cos}px, \text{Sin}qx)\partial x\,, \qquad \text{(E)}$$

$$\nu = \int_0^\pi \text{Arctg}\frac{\varrho\text{Sin}y}{1-\varrho\text{Cos}y} f(y^t, \text{Cos}py, \text{Sin}qy)\partial y \qquad \text{(F)}$$

où appartiennent respectivement les groupes

(8) à (14), (18), (20), (22), (24), (26) et (28),
(52) à (60) et (99) à (110),
(61) à (69) et (111) à (122),
(80), (83), (84), (86), (87), (88)

et celles désignées au §. précédent, on peut faire usage des formules connues

$$\text{Arctg}\,\frac{1-\varphi}{1+\varphi} = \frac{\pi}{4} - \text{Arctg}\,\varphi\,, \qquad (t)$$

$$\text{Arctg}\,\frac{1}{\varphi} = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\,\varphi\,, \qquad (u)$$

$$\text{Arctg}\,\frac{1+\varphi}{1-\varphi} = \frac{\pi}{4} + \text{Arctg}\,\varphi\,. \qquad (v)$$

De cette manière on trouvera des nouveaux groupes au moyen des formules de réduction suivantes, où l'on a mis simplement f au lieu de $f(x^t, \mathrm{Cos}px, \mathrm{Sin}qx)$ ou de $f(y^t, \mathrm{Cos}py, \mathrm{Sin}py)$:

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{1-r\,\mathrm{Sin}x-r\,\mathrm{Cos}x}{1+r\,\mathrm{Sin}x-r\,\mathrm{Cos}x}f\partial x = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi f\partial x - \varkappa, \quad \text{(G)}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{1-r\,\mathrm{Cos}\,x}{r\,\mathrm{Sin}\,x}f\partial x = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi f\partial x - \varkappa, \quad \text{(H)}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{1+r\,\mathrm{Sin}x-r\,\mathrm{Cos}x}{1-r\,\mathrm{Sin}x-r\,\mathrm{Cos}x}f\partial x = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi f\partial x + \varkappa, \quad \text{(I)}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{1-\varrho\,\mathrm{Sin}2x-\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x}{1+\varrho\,\mathrm{Sin}2x-\varrho\,\mathrm{Cos}2x}f\partial x = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi f\partial x - \lambda, \quad \text{(K)}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{1-\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x}{\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x}f\partial x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f\partial x - \lambda, \quad \text{(L)}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{1+\varrho\,\mathrm{Sin}2x-\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x}{1-\varrho\,\mathrm{Sin}\,2x-\varrho\,\mathrm{Cos}\,2x}f\partial x = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi f\partial x + \lambda, \quad \text{(M)}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{1-2r\,\mathrm{Sin}x-r^2}{1+2r\,\mathrm{Sin}x-r^2}f\partial x = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi f\partial x - \mu, \quad \text{(N)}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{1-r^2}{2r\,\mathrm{Sin}\,x}f\partial x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f\partial x - \mu, \quad \text{(O)}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Arctg}\frac{1+2r\,\mathrm{Sin}x-r^2}{1-2r\,\mathrm{Sin}x-r^2}f\partial x = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi f\partial x + \mu, \quad \text{(P)}$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Arctg}\frac{1-\varrho\,\mathrm{Sin}y-\varrho\,\mathrm{Cos}y}{1+\varrho\,\mathrm{Sin}y-\varrho\,\mathrm{Cos}y}f\partial y = \frac{\pi}{4}\int_0^{2\pi} f\partial y - \nu, \quad \text{(Q)}$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Arctg}\frac{1-\varrho\,\mathrm{Cos}\,y}{\varrho\,\mathrm{Sin}\,y}f\partial y = \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} f\partial y - \nu; \quad \text{(R)}$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Arctg}\frac{1+\varrho\,\mathrm{Sin}y-\varrho\,\mathrm{Cos}y}{1-\varrho\,\mathrm{Sin}y-\varrho\,\mathrm{Cos}y}f\partial y = \frac{\pi}{4}\int_0^{2\pi} f\partial y + \nu; \quad \text{(S)}$$

où toutes les intégrales $\int_0^\pi f\partial x$ et $\int_0^{2\pi} f\partial y$, que l'on trouve au second membre de ces équations, se reduisent aux suivantes:

$$\int_0^\pi \frac{\partial x}{\mathrm{Sin}\,x} = \Big|_0^\pi l\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \infty \quad \text{(A')}, \qquad \int_0^{2\pi}\frac{\partial y}{\mathrm{Sin}\,y} = 0 \quad \text{(D')};$$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x} = \Big\{ l\,\mathrm{Sin}\,x \Big\}_0^\pi = 0\ (\mathrm{B}'), \quad \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Cos}\,y\,\partial y}{\mathrm{Sin}\,y} = 0 \quad (\mathrm{E}');$$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}^2 x\,\partial x}{\mathrm{Sin}\,x} = \Big\{ \mathrm{Cos}\,x + l\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} \Big\}_0^\pi = \infty\ (\mathrm{C}'), \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Cos}^2 y\,\partial y}{\mathrm{Sin}\,y} = 0\ (\mathrm{F}');$$

$$\int_0^{s\pi} x^t\,\mathrm{Sin}\,px\,\partial x = \frac{1}{p^{t+1}} \int_0^{ps\pi} z^t\,\mathrm{Sin}\,z\,\partial z, \qquad (\mathrm{G}')$$

$$\int_0^{s\pi} x^t\,\mathrm{Cos}\,px\,\partial x = \frac{1}{p^{t+1}} \int_0^{ps\pi} z^t\,\mathrm{Cos}\,z\,\partial z; \qquad (\mathrm{H}')$$

$\int_0^{s\pi} x^t\,\mathrm{Sin}\,px\,\mathrm{Cos}\,x\,\partial x$ (I′) et $\int_0^{s\pi} x^t\,\mathrm{Cos}\,px\,\mathrm{Sin}\,x\,\partial x$ (K′), qui se déduisent de (G′);

$\int_0^{s\pi} x^t\,\mathrm{Cos}\,px\,\mathrm{Cos}\,x\,\partial x$ (L′) et $\int_0^{s\pi} x^t\,\mathrm{Sin}\,px\,\mathrm{Sin}\,x\,\partial x$ (M′), qui se déduisent de (H′).

Des formules (A′) à (F′) il suit, que les intégrales (8) et (10), (52) et (54), (61) et (63) donnent pour résultat l'infini positif pour les changements de la fonction sous le signe circulaire inverse donnés dans les formules (G) à (P). Lorsqu'au contraire on change les fonctions dans les intégrales (9), (53), et (62), prises entre les limites 0 et π, à l'aide des formules de réduction (G) à (P) leurs valeurs restent les mêmes, sauf le signe, qui change seulement pour les deux premières transformations, tandis qu'il reste le même pour la troisième. De même pour les intégrales (86) à (88), le changement de fonction au moyen des formules (Q) à (S), entre les limites 0 et 2π, n'a aucune influence sur la valeur propre, mais seulement sur le signe, qui ne reste le même, que pour la troisième transformation.

Les autres intégrales indiquées, au contraire, peuvent être transformées au moyen des formules de réduction (G) à (S) et des formules (G′) à (M′), sauf d'être exposées à la complication, que comportent les intégrales (G′) et (H′).

Or, cette complication s'en va complètement dans le cas, où l'on aurait $t=0$; car alors ces formules se réduisent aux suivantes:

$$\int_0^\pi \mathrm{Sin}\,2mx\,\partial x = -\frac{1}{2m}\Big\{ \mathrm{Cos}\,2mx \Big\}_0^\pi = 0, \qquad (\mathrm{G}_1)$$

$$\int_0^\pi \mathrm{Sin}(2m-1)x\,\partial x = -\frac{1}{2m-1}\Big\{ \mathrm{Cos}(2m-1)x \Big\}_0^\pi = \frac{2}{2m-1}, \quad (\mathrm{G}_2)$$

$$\int_0^\pi \text{Cos}px\,\partial x = \frac{1}{p}\,\overset{\pi}{\underset{0}{\big\{}}}\text{Sin}\,px = 0, \qquad (H_1)$$

d'où par les équations (k), (l), (m) et (n):

$$\int_0^\pi \text{Sin}\,2mx\,\text{Cos}\,x\,\partial x = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2m+1}+\frac{2}{2m-1}\right) = \frac{4m}{4m^2-1}, \qquad (I_1)$$

$$\int_0^\pi \text{Sin}(2m-1)x\,\text{Cos}x\,\partial x = 0, \qquad (I_2)$$

$$\int_0^\pi \text{Cos}\,2mx\,\text{Sin}\,x\,\partial x = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2m+1}-\frac{2}{2m-1}\right) = \frac{-2}{4m^2-1}, \qquad (K_1)$$

$$\int_0^\pi \text{Cos}\,(2m-1)x\,\text{Sin}x\,\partial x = 0, \qquad (K_2)$$

$$\int_0^\pi \text{Cos}px\,\text{Cos}x\,\partial x = 0, \qquad (L_1)$$

$$\int_0^\pi \text{Sin}\,px\,\text{Sin}x\,\partial x = 0; \qquad (M_1)$$

et de même pour les limites 0 et 2π:

$$\int_0^{2\pi} \text{Sin}\,py\,\partial y = \frac{1}{p}\,\overset{2\pi}{\underset{0}{\big\{}}}\text{Cos}\,py = 0, \qquad (G_2)$$

d'où l'on obtient:

$$\int_0^{2\pi} \text{Sin}py\,\text{Cos}y\,\partial y = 0, \qquad (I_3)$$

$$\int_0^{2\pi} \text{Cos}\,py\,\text{Sin}y\,\partial y = 0. \qquad (K_3)$$

Ainsi les valeurs des intégrales (12) pour $n=2m$, (13) et (14) pour $n=2m-1$, (55), (58), (60), (64), (67) et (69) changent seulement de signe pour les deux prémières transformations respectivement à l'aide des formules (G) et (H), (K) et (L), (M) et (O); elles restent tout-à-fait les mêmes pour les transformations respectives (I), (M) et (P). Au contraire les valeurs des intégrales (12) pour $n=2m-1$, (13) et (14) pour $n=2m$, (56), (57), (59), (65), (66) et (68) subiront, par ces transformation, les changements de signe, que comportent plusieurs des formules de réduction (G) à (P), comme on l'a vu précédemment, et seront en outre augmentées des termes (G_1) à (K_2) multipliés par $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{2}$ selon l'occasion. Quant

aux intégrales (80), (83) et (84) on n'a pas besoin de faire aucune distinction entre les cas de $n=2m$ et $n=2m-1$, comme nous avons dû faire pour les intégrales (12) à (14); et par l'application des formules (Q) à (S) elles ne changeront point de valeur et seulement de signe par (Q) et (R).

Toutes ces intégrales resteront donc bien simples: ce n'est pas le cas pour les transformations analogues des intégrales (18), (20), (22), (24), (26), (28), (99) à (110), (111) à (122) et celles désignées dans le §. précédent, qui, outre la moindre simplicité, qu'elles comportent déjà, seront de plus compliquées par les intégrales (G') et (H'), qui s'y introduisent.

Nous ne transcriront point toutes ces intégrales, qui d'ailleurs se déduiront aisément au moyen des formules de ce §.

Remarque. On a eu partout ici les conditions

$$1 \geqq r \geqq -1 \quad \text{et} \quad 1 \geqq \varrho \geqq 0.$$

Mais il est quelquefois aisé de trouver les valeurs des mêmes intégrales, dans le cas, où l'on aurait

$$\infty \geqq r' \geqq 1 \quad \text{ou} \quad -1 \geqq r' \geqq -\infty;$$

on n'a qu'à poser $rr'=1$ et $\varrho\varrho'=1$, d'où ces conditions:

$$\infty \geqq r' \geqq 1 \quad \text{ou} \quad -1 \geqq r' \geqq -\infty, \quad \infty \geqq \varrho' \geqq 1;$$

tandis que la forme des fonctions, pour r, comme pour ϱ:

$l(1-2r\,\mathrm{Cos}x+r^2)$	se change en	$l(1-2r'\,\mathrm{Cos}x+r'^2)-2lr'$
$(1-2r\,\mathrm{Cos}x+r^2)^{-1}$		$r'^2(1-2r'\,\mathrm{Cos}x+r'^2)^{-1}$,
$\mathrm{Arctg}\,\dfrac{2r\,\mathrm{Sin}x}{1-r^2}$		$-\mathrm{Arctg}\,\dfrac{2r'\,\mathrm{Sin}x}{1-r'^2}$,
$\mathrm{Arctg}\,\dfrac{1-r^2}{2r\,\mathrm{Sin}x}$		$-\mathrm{Arctg}\,\dfrac{1-r'^2}{2r'\,\mathrm{Sin}x}$;

de sorte que la forme des intégrales reste la même dans ces quatre cas, ce qui n'a pas lieu dans les autres fonctions.

N. B. Nous avons cru devoir réserver pour la fin une appréciation de la validité du procédé de differentiation et d'integration par rapport à une constante sous le signe d'intégration définie, dont nous avons fait un si frequent usage. Pour pouvoir appliquer rigoureusement à une formule quelconque

$$\int_a^b f(p,x)\partial x = \varphi(p)$$

ces procédés, il faut qu'on ait (voyer entre autres les „Analytische Studien du Prof. Dr. O. Schlömilch. Abthl. I. Seite 9.)

$$\text{Lim} \int_a^b \varepsilon \partial x = 0, \tag{Y}$$

où

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2} \frac{\partial . \varphi(p+\lambda\delta, x)}{\partial p} \tag{Z}$$

devient zéro, lorsque δ decroit jusqu'à zéro (on a $1 > \lambda > 0$).

Dans le cas, où $\varphi(p)$ ne contient pas de x, comme il arrive partout dans notre note, la condition (Y) devient $\text{Lim}\, \varepsilon . \int_a^b \partial x = 0$ (Y′) qui est satisfaite partout, puisque $\int_a^b \partial x$, pour $a=0$ et $b=\pi$ ou $=2\pi$, étant une constante π ou 2π, son produit avec ε qui est zéro, reste zéro lui-même.

XVII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Wenn man über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ausserhalb desselben Quadrate beschreibt, so sind die Mittelpunkte dieser drei Quadrate die Spitzen eines Dreiecks, dessen Flächeninhalt dem Flächeninhalte des Quadrats gleich ist, welches sich über der halben Summe der beiden Katheten des rechtwinkligen Dreiecks, über dessen Seiten die drei Quadrate beschrieben worden sind, beschreiben lässt.

Die Mittelpunkte der fünf Diagonalen eines Fünfecks und die Schwerpunkte der fünf von zwei Diagonalen und einer Seite des Fünfecks eingeschlossenen Dreiecke sind die Spitzen zweier einander ähnlichen, aber verkehrt liegenden Fünfecke.

XVIII.

Miscellen.

Von

Herrn Professor C. A. Bretschneider

in Gotha.

Es ist

$$0=1-(2m+1)_1\frac{n_1}{(2n)_1}2^1+(2m+1)_2\frac{n_2}{(2n)_2}2^2-(2m+1)_3\frac{n_3}{(2n)_3}2^3$$
$$+(2m+1)_4\frac{n_4}{(2n)_4}2^4-+\ldots,$$

$$(-1)^m\cdot\frac{n^m}{(2n)_{2m}}=1-(2m)_1\frac{n_1}{(2n)_1}2^1+(2m)_2\frac{n_2}{(2n)_2}2^2-(2m)_3\frac{n_3}{(2n)_3}2^3$$
$$+(2m)_4\frac{n_4}{(2n)_4}2^4-+\ldots;$$

oder wenn

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots.$$

gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned}0&=F(-2m-1,-n,-2n,2\\(-1)^m\frac{n_m}{(2n)_{2m}}&=F(-2m,-n,-2n,2)\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&n\text{ beliebig};\\&m\text{ positiv und ganz.}\end{aligned}$$

Druckfehler im 3ten Hefte des 12ten Theils.

Seite 281 Zeile 3 von oben ist zu lesen Halskreis statt Halbkreis.
„ 282 „ 1 von oben ist zu lesen qx statt ox.
„ 282 „ 15 von oben ist zu lesen $a_1\delta_1 = A_1\Delta_1$ statt $a_1\delta_1 = A\Delta$.
„ 283 „ 4 von unten lies $\frac{a^2n}{\sqrt{a^2n - b^2}}$ statt $\frac{a^2u}{\sqrt{a^2n - b^2}}$.
„ 284 „ 15 von unten ist zu lesen ιx statt ιk.
„ 284 „ 10 von unten ist zu lesen $o\iota = o\iota$ statt $ol = o\iota$.
„ 285 „ 1 von oben $\frac{bg'}{b\gamma'}$ statt $\frac{bg'}{b\gamma}$.
„ 288 „ 2 der Aufgabe 5 ist zu lesen RCN statt CRN.
„ 290 „ 2 von unten ist zu lesen $n^2y^2 - (x + \frac{n^2.\mu^2.p}{2} - x)^2 = ..$
statt $n^2y^2 - (x + \frac{n^2.\mu^2.p}{4} - x)^2 = ...$
„ 292 „ 17 und 18 von oben muss wenigstens wegfallen: „in Crelle's Journal", da der Bruder des Herrn Verfassers des Aufsatzes Nr. XX. seinen früher für das Crelle'sche Journal bestimmt gewesenen Aufsatz später zurückgenommen hat.

Druckfehler im 1sten Heft des 13ten Theils.

Seite 86 in den Gleichungen (40) statt x, y, z soll stehen a, b, c.
„ 94, in der Note, Zeile 1, statt „Winkellappen" soll stehen „Winkelfasser".

In dem Aufsatze XIV. sind leider wegen Undeutlichkeit des Manuscripts wahrscheinlich einige Druckfehler stehen geblieben. Ich bitte Herrn Doctor Bierens de Haan nach sorgfältiger Durchsicht des Aufsatzes mir die in demselben etwa stehen gebliebenen Fehler zur Anzeige im Archiv recht bald mitzutheilen. G.

XIX.

Ueber Normal-Curven und Normal-Flächen.

Von

Herrn Brenner,

Lehrer zu Tuttlingen im Königreich Würtemberg.

A. Gleitet eine Gerade a mit einem ihrer Endpunkte über eine ebene Curve auf solche Weise hin, dass sie derselben stets normal bleibt, so beschreibt der andere Endpunkt eine neue Curve, die wir Normalcurve heissen, während wir der Erzeugungs-Curve den Namen Urcurve beilegen. Die Gerade a heissen wir Erzeugungslinie und ihre beiden Endpunkte, beziehlich ihrer Lage in beiden Curven, correspondirende Punkte. Hieraus ist klar, dass jeder in a angenommene Punkt eine Normalcurve beschreibt.

Es sei (Taf. III. Fig. 1.) die Curve LM mit der Abscissenaxe AX, während deren Coordinaten durch x und y bezeichnet sein mögen. Ein beliebiger Punkt in derselben sei N, in welchem $BN=a$ normal steht, so bildet die Verlängerung NC die Normale, welche gleich ist $y\sqrt{1+\partial y_x^2}$. Ziehe ich BD und NE senkrecht auf AX, so wie ND parallel mit AX, so ist EC die Subnormale $=y\partial y_x$, und die Dreiecke BDN und NEC sind einander ähnlich. Bezeichne ich die Coordinaten des Punktes B mit x' und y', so hat man folgende zwei Proportionen:

$$y\sqrt{1+\partial y_x^2}:y=a:y'-y \quad \text{und} \quad y\sqrt{1+\partial y_x^2}:y\partial y_x=a:x'-x,$$

woraus sich ergibt:

$$1) \qquad (y'-y)\sqrt{1+\partial y_x^2}-a=0$$

und

2) $$(x'-x)\sqrt{1+\partial y_x{}^2}+a\partial y_x=0.$$

Verbindet man hiermit noch die Gleichung der Urcurve

3) $$y=f(x)$$

und eliminirt aus allen dreien y und x, so restirt eine Gleichung zwischen x' und y', welches die Gleichung der Normalcurve ist.

Will ich auf die Normalcurve abermal eine Normalcurve bauen, und zwar mit der gleichen Erzeugungslinie a, jedoch rückwärts nach der Richtung BC genommen, und stelle ich deren Coordinaten mit x'' und y'' vor, so darf ich in den Gleichungen 1) und 2) dem a nur das entgegengesetzte Zeichen geben, x durch x', y durch y', x' durch x'' und y' durch y'' ersetzen. Verwechsle ich hierauf noch alle Zeichen, so habe ich

3) $$(y'-y'')\sqrt{1+\partial y'_{x'}{}^2}-a=0,$$

4) $$(x'-x'')\sqrt{1+\partial y'_{x'}{}^2}+a\partial y'_{x'}=0.$$

Eliminiren wir aus 1) und 2) ∂y_x, so kommt

$$(y'-y)^2+(x'-x)^2=a^2,$$

und nehmen wir hievon das Differential, indem wir einen neuen ganz beliebigen unabhängigen Veränderlichen annehmen, so kommt

5) $$(y'-y)(\partial y'-\partial y)+(x'-x)(\partial x'-\partial x)=0.$$

Eliminirt man jedoch aus 1) und 2) $\sqrt{1+\partial y_x{}^2}$, so folgt unter der selben Voraussetzung, aus der man 5) erhalten hat:

$$(y'-y)\partial y+(x'-x)\partial x=0$$

und durch Subtraction von 5)

$$(y'-y)\partial y'+(x'-x)\partial x'=0.$$

Die Division der beiden letztern gibt

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y'}{\partial x'} \text{ oder } \partial y_x=\partial y'_{x'}.$$

und folglich auch

$$\sqrt{1+\partial y_x{}^2}=\sqrt{1+\partial y'_{x'}{}^2}.$$

Zieht man endlich noch 1) und 3), so wie 2) und 4) von einander ab, so kommt

$$y=y'' \text{ und } x=x''.$$

Hieraus folgt, dass die nach angegebener Weise auf die Normalcurve gebaute zweite Normalcurve mit der Urcurve zusammenfällt und dass demnach von einer Ur- und Normal-Curve jede als die Normalcurve der andern betrachtet werden kann. Auch fallen die Normalen und Krümmungshalbmesser beider für correspondirende Punkte zusammen.

Während man nun für die Urcurve hat:

$$\text{Tangente} = y\sqrt{1+\partial x_y^2},$$
$$\text{Subtangente} = y\partial x_y,$$
$$\text{Normale} = \sqrt{1+\partial y_x^2},$$
$$\text{Subnormale} = y\,\partial y_x;$$

so ist für correspondirende Punkte der Normalcurve:

$$\text{Tangente} = \partial x_y(a + y\sqrt{1+\partial y_x^2}),$$
$$\text{Subtangente} = \partial x_y\left(y + \frac{a}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right),$$
$$\text{Normale} = a + y\sqrt{1+\partial y_x^2},$$
$$\text{Subnormale} = \partial y_x\left(y + \frac{a}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right).$$

Beide Curven haben dieselbe Abgewickelte, und der Krümmungshalbmesser der Normalcurve ist für correspondirende Punkte um a grösser, als der der Urcurve.

Als Beispiel für den Uebergang von einer Urcurve zur Normalcurve mögen die Kegelschnitte dienen. Ihre allgemeine Gleichung ist

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

Daraus ergibt sich:

$$\partial y_x = \frac{p+qx}{\sqrt{2px+qx^2}} \quad \text{und}$$

$$1+\partial y_x^2 = \frac{qx^2(1+q)+2px\,(1+q)+p^2}{2px+qx^2}.$$

Diess in 1) und 2) substituirt, gibt

$$(y' - \sqrt{2px+qx^2})\sqrt{\frac{qx^2(1+q)+2px(1+q)+p^2}{2px+qx^2}} = a$$

und

$$(x'-x)\sqrt{\frac{qx^2(1+q)+2px(1+q)+p^2}{2px+qx^2}}+a.\frac{p+qx}{\sqrt{2px+qx^2}}=0.$$

Die Elimination von x zwischen diesen beiden Gleichungen führt zu einer sehr combinirten Gleichung zwischen y' und x'.

Nehmen wir aber die Gleichung des Kreises $y^2+x^2=r^2$, so hat man:

$$\partial y_x=-\frac{x}{y} \text{ und } 1+\partial y_x^2=\frac{r^2}{y^2}.$$

Dadurch gehen 1) und 2) über in:

$$\frac{r}{y}(y'-y)-a=0,\quad r(x'-x)-ax=0;$$

und diess gibt:

$$y=\frac{ry'}{a+r},\quad x=\frac{rx'}{a+r}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung:

$$y^2+x^2=r^2, \text{ so kommt } y'^2+x'^2=(a+r)^2.$$

Die Normalcurve des Kreises ist demnach wieder ein Kreis, folglich beide einander ähnlich. Diese Bemerkung führt zur folgenden Untersuchung:

B. Beschäftigen wir uns mit der Frage:

Welche Curven liefern Normalcurven, die ihnen ähnlich sind?

Zum Behuf dieser Untersuchung darf man nur in den Gleichungen 1) und 2) $y'=cy$ und $x'=cx$ setzen, so hat man:

$$(c-1)y\sqrt{1+\partial y_x^2}-a=0 \text{ und}$$

$$(c-1)x\sqrt{1+\partial y_x^2}+a\partial y_x=0.$$

Die Integrale dieser beiden Gleichungen, so wie die Elimination von ∂y_x aus beiden liefern nach einander:

$$y^2+x^2-\frac{2Cx}{c-1}=\frac{a^2-C^2}{(c-1)^2},$$

$$y^2+x^2-\frac{2C'y}{c-1}=\frac{a^2-C'^2}{(c-1)^2},$$

$$y^2+x^2=\frac{a^2}{(c-1)^2};$$

wo C und C' aus den Integrationen hervorgegangene Constanten sind.

Alle drei Gleichungen aber geben den Kreis.

Noch untersuchen wir, ob nicht die obigen zwei Differentialgleichungen durch singuläre Werthe befriedigt werden. Bekanntlich ergibt sich der einer Differentialgleichung zukommende singuläre Werth am Kürzesten dadurch, dass man deren allgemeines Integral in Beziehung auf die Constante differentiirt, und zwischen dem Integral und diesem Differential die Constante selbst eliminirt. Befriedigt der aus der Eliminationsgleichung gezogene Werth für y (oder x) die Differentialgleichung, hingegen das Integral nicht, so hat man einen singulären Werth. Auf solche Weise erhält man:

$$C=x(c-1) \text{ und } C'=y(c-1),$$

und ferner als wirkliche singuläre Werthe:

$$y=\pm\frac{a}{c-1} \text{ und } x=\pm\frac{a}{c-1},$$

wofern man das positive Zeichen für y und das negative für x nimmt. Beide Gleichungen zeigen aber die gerade Linie an. Daraus zieht man den Schluss, dass es, ausser dem Kreis und der geraden Linie, keine Curven gibt, denen ihre Normalcurven ähnlich wären.

C. Obschon die Gleichungen der Normalcurven meist von sehr combinirter Natur sind, so bietet deren Rectification und Quadratur dennoch keine grösseren Schwierigkeiten dar, als diejenigen der Urcurven.

Stellen wir uns zwei einander unendlich nahe liegende Krümmungshalbmesser in beiden Curven vor, welche paarweise einander decken, so ist der Krümmungshalbmesser der Urcurve gleich

$$\frac{\partial s^3}{\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x},$$

und der correspondirende der Normalcurve

$$\frac{\partial s^3}{\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x}+a;$$

wo s den Bogen der Urcurve bezeichnet. Stellen wir nun durch s' den correspondirenden Bogen der Normalcurve dar, so hat man:

$$\frac{\partial s^3}{\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x}:\left(\frac{\partial s^3}{\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x}+a\right)=\partial s:\partial s',$$

woraus sich ergibt:

$$a:\frac{\partial s^3}{\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x}=\partial s'-\partial s:\partial s$$

und

$$\partial(s'-s)=a\,\frac{\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x}{\partial s^2}.$$

Nun aber ist $-\frac{\partial x}{\partial y}$ die Tangente des Winkels w, den die Normale mit der Abscissenaxe macht, d. h. $\operatorname{tg} w = -\frac{\partial x}{\partial y}$, woraus

$$\frac{\partial w}{\cos w^2} = -\frac{\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y}{\partial y^2}.$$

Da nun $\cos w^2 = \frac{\partial y^2}{\partial s^2}$, so ist

$$\partial w = \frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial s^2},$$

und so hat man

$$\partial (s' - s) = a \partial w \text{ und } s' - s = aw + C.$$

Sind die beiden Grenzen des Winkels w gleich w' und w'', so ist

$$1) \qquad s' = s + a(w'' - w').$$

Es ist aber $w'' - w'$ der von den äussersten Normalen eingeschlossene Winkel, und $a(w'' - w')$ ist der von diesem Winkel eingeschlossene Kreisbogen, beschrieben mit dem Radius a. Hieraus ergibt sich der Satz:

Man findet den Bogen einer Normalcurve, wenn man den entsprechenden Bogen der Urcurve um denjenigen Kreisbogen vermehrt, welcher mit dem Radius a in dem Winkel beschrieben wird, den die äussersten Normalen mit einander machen.

Es sei ferner (Taf. III. Fig. 2.) AB eine beliebige Curve, über welche in ihrem Mittelpunkt G eine Gerade CD normal dahingleitet, so sei der Flächenraum gesucht, den diese Gerade CD in ihrem Laufe beschreibt. Ist EF eine der CD unendlich nahe Lage, so ist $GH = ds$, und, weil $CEFD$ ein Paralleltrapez ist, indem die Punkte C und D Normalcurven beschreiben, auf denen CD gleichfalls normal ist,

$$\text{Flächengehalt } CDFE = ads,$$

wenn man $CD = a$ setzt. Diess gibt für den ganzen beschriebenen Flächenraum:

$$a(s'' - s'),$$

wofern s' und s'' die äussersten Grenzen der Curven bezeichnen.

So haben wir den andern Satz:

Gleitet eine Gerade mit ihrem Mittelpunkt normal über eine Curve hin, so beschreibt sie einen Flächenraum, welcher dem Produkt aus der Länge der Curve und der Geraden gleich ist.

Wenden wir diesen Satz auf den zwischen einer Urcurve und ihrer Normalcurve liegenden, ringförmigen Flächengehalt u' an, so werden wir eine in der Mitte liegende Normalcurve annehmen mit der Erzeugungslinie $\frac{a}{2}$. Ihr Bogen ist

$$s' = s + \frac{a}{2}(w'' - w'),$$

und folglich der gesuchte Flächeninhalt:

$$2) \qquad u' = as + \frac{a^2}{2}(w'' - w')$$

No. 1) und 2) lösen die Rectification und Quadratur für Grenzen, die in Beziehung auf die Urcurve gegeben sind, oder sich vermittelst der Gleichung der Urcurve bestimmen; denn w und s sind Funktionen von x (oder auch von y), dem die Werthe von w' und w'' und auch von s für bestimmte Grenzwerthe, die wir durch $(x)'$ und $(x)''$ (oder auch durch $(y)'$ und $(y)''$) bezeichnen, entsprechen. Allein denkt man sich die Grenzwerthe $(x')'$ und $(x')''$ (oder auch $(y')'$ und $(y')''$) der Normalcurve gegeben, so benützt man die Gleichung A. 2), nemlich $(x'-x)\sqrt{1+\partial y_x^2} + a\partial y_x = 0$, [oder auch die Gleichung A.1), neml. $(y'-y)\sqrt{1+\partial y_x^2} - a = 0$], welche Gleichungen in Verbindung mit denjenigen der Urcurve $(x)'$ und $(x)''$ [oder auch (y') und $(y)''$] in $(x')'$ und $(x')''$ [oder auch in $(y')'$ und $(y')''$] bestimmen wird, welche Werthe dann nur in die obigen 1) und 2) substituirt werden dürfen.

Will man jedoch den von der Normalcurve, der Abscissenaxe und den beiden Grenzordinaten $(y')'$ und $(y')''$ eingeschlossenen Flächenraum

$$u'' = ABLF \text{ (Taf. III. Fig. 3.)}$$

bestimmen, so wird man zuerst den Flächenraum $DCMG$ der Urcurve

$$u = \int y dx$$

berechnen, zwischen den oben bestimmten Grenzen, und hiezu u', so wie das Trapez $ABCD$ addiren und das Trapez $FLMG$ abziehen.

Man hat aber, wenn man die Subnormalen zu Hilfe nimmt,

$$ABCD = ABE - CDE = \frac{1}{2}(y')'\partial y_x\left[(y)' + \frac{a}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right] - \frac{1}{2}(y)'^2\partial y_x.$$

Ersetzt man aber y' durch den aus A. 1) gezogenen Werth, so kommt:

$$ABCD = \frac{a\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\left[(y)' + \frac{a}{2\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right].$$

Eben so ist

$$FLMG = \frac{a\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\left[(y)'' + \frac{a}{2\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right];$$

folglich ist

$$u'' = u + u' + \frac{a\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\left[(y)' + \frac{a}{2\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right]$$
$$-\frac{a\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\left[(y)'' + \frac{a}{2\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right],$$

wofern im letzten Posten die Grenze $(x)''$ [oder auch $(y)''$] und im uneinsletzten die Grenze $(x)'$ [oder auch $(y)''$] genommen wird.

D. Gleitet eine Gerade a mit einem ihrer Endpunkte nach allen möglichen Richtungen normal über eine Fläche hin, so beschreibt der andere Endpunkt eine Fläche, die wir Normalfläche heissen, während die erstere Urfläche heissen mag. Hieraus ist klar, dass auch jeder Punkt in jener Geraden eine Normalfläche beschreibt. Was man hier Erzeugungslinie, so wie correspondirende Punkte heisst, geht aus den Erklärungen in A. hervor.

Die Gleichungen der Normale einer Fläche sind:

$$x'' - x + \partial z_x (z'' - z) = 0$$

und

$$y'' - y + \partial z_y (z'' - z) = 0,$$

wenn x'', y'' und z'' die Coordinaten der Normale selbst bezeichnen. Der Punkt, in dem diese Normale die Coordinaten-Ebene (x,y) schneidet, findet sich, wenn man z'' = Null setzt, und dann folgt:

$$x'' = x + z\partial z_x, \quad y'' = y + z\partial z_y.$$

Nun aber ist die Länge der Normale [vom Punkte (xyz) der Urfläche an bis auf die Ebene (xy) gerechnet]

$$= (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + z^2$$

oder

$$\text{Normale} = z\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2},$$

demnach die correspondirende Länge der Normale der Normalfläche

$$= a + z\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2}.$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten der Normalfläche mit x', y' und z', und stellen durch x'' und y'' die Coordinaten des Punktes dar, in welchem die Normale die Ebene (xy) schneidet, so haben wir

$$z\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} : (a + z\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2}) = (x - x'') : (x' - x'')$$
$$= (y - y'') : (y' - y'')$$
$$= z : z',$$

woraus folgt

$$1) \qquad (x' - x)\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} + a\partial z_x = 0,$$

$$2) \qquad (y' - y)\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} + a\partial z_y = 0,$$

$$3) \qquad (z' - z)\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} - a = 0.$$

Durch gegenseitige Division leitet man noch ab:

$$4) \qquad \frac{\partial z_x}{\partial z_y} = \frac{x' - x}{y' - y},$$

$$5) \qquad \partial z_x = -\frac{x' - x}{z' - z},$$

$$6) \qquad \partial z_y = -\frac{y' - y}{z' - z}.$$

Quadrirt man aber 1), 2) und 3) und addirt, so heben sich alle Partialdifferentiale weg, und man hat

$$7) \qquad (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = a^2.$$

Von den Gleichungen 4), 5) und 6) ist jede die Folgerung der beiden andern. Will man daher die Gleichung der Normalfläche herstellen, so eliminire man aus 1), 2) und 3) und der Gleichung der Urcurve, oder aus dreien der 4) bis 7) und der Urcurve x, y und z.

Legt man durch die Erzeugungslinie a eine beliebige Ebene, so schneidet sie die Ur- und Normalfläche in zwei Curven, von denen die erstere als Ur- und die letztere als Normalcurve zu betrachten ist; und da jede dieser Curven als Normalcurve der andern angesehen werden kann, so folgt daraus, dass diese Tangential-Ebenen correspondirender Punkte parallel sind, und dass demnach von beiden Flächen jede die Normalfläche der andern ist.

Die Gleichungen der Normalflächen stellen sich in der Regel in sehr combinirter Form hin. Jedoch weisen die angegebenen Eliminationen von x, y und z für die Ebene, die Kugel, den ge-

meinen Cylinder und Kegel, beziehlich dieselbe Fläche nach. Die Ebenen können sowohl als bloss ähnliche, als auch als congruente Flächen betrachtet werden, während alle Kugeln ähnlich sind. Ferner sind zwar gemeine Cylinder nur dann ähnlich, wenn ihre Höhen ihren Durchmessern proportional sind; allein, da die Gleichung eines Cylinders dessen Höhe keine Beschränkung gibt, so müssen wir bei gegenwärtiger Betrachtung Ur- und Normalcylinder als ähnlich betrachten. Um aber das Verhalten des Normalkegels zum zugehörigen gemeinen Urkegel auszumitteln, stellen wir dessen einfachste Gleichung dar durch:

$$z^2 = A^2(x^2 + y^2).$$

Hieraus hat man:

$$\partial z_x = A^2 \frac{x}{z}, \quad \partial z_y = A^2 \frac{y}{z};$$

wodurch sich die Gleichungen 1), 2), 3) umwandeln in:

$$(x' - x)\sqrt{1 + A^2} + \frac{aA^2x}{z} = 0,$$

$$(y' - y)\sqrt{1 + A^2} + \frac{aA^2y}{z} = 0,$$

$$(z' - z)\sqrt{1 + A^2} - a = 0.$$

Aus der letztern ist

$$z = \frac{z'\sqrt{1 + A^2} - a}{\sqrt{1 + A^2}},$$

und wenn man z aus den zwei erstern eliminirt:

$$x = x'\left[\frac{z'\sqrt{1 + A^2} - a}{z'\sqrt{1 + A^2} - a(1 + A^2)}\right],$$

$$y = y'\left[\frac{z'\sqrt{1 + A^2} - a}{z'\sqrt{1 + A^2} - a(1 + A^2)}\right].$$

Setzt man diese drei Werthe in die Gleichung

$$z^2 = A^2(x^2 + y^2),$$

so kommt

$$z''^2 = A^2(x'^2 + y'^2),$$

wenn man setzt:

$$z' - a\sqrt{1 + A^2} = z''.$$

Demnach ist der Normalkegel dem Urkegel congruent.

E. Wie bei den Normalcurven, deren Rectification und Quadratur vermittelst der Gleichungen ihrer Urcurven durchgeführt werden konnte, so lässt sich für die Normalflächen deren Quadratur und Cubatur mit Hilfe der Gleichungen ihrer Urfläche ermitteln.

Denkt man sich durch zwei einander schneidende und unendlich nahe liegende Normalen der Urfläche, und daher auch durch die denselben correspondirenden und mit ihnen zusammenfallenden Normalen der Normalfläche eine Ebene gelegt, so schneidet sie beide Flächen in zwei Curven. Von diesen Curven stellen wir das zwischen beiden Normalen liegende Element der Urcurve durch ds und das der Normalcurve durch ds', so wie die respectiven Krümmungshalbmesser durch r und r' dar, so hat man offenbar:

$$ds : ds' = r : r',$$

folglich:

$$ds' = ds\frac{r'}{r} = ds.\frac{a+r}{r},$$

weil $r' = a + r$.

Euler und Monge haben zuerst gezeigt, dass man von einem in einer Oberfläche gegebenen Punkte nicht nach beliebiger Richtung gehen kann, um zwei sich schneidende Normalen und folglich wirkliche Krümmungshalbmesser zu finden, dass es aber in der That zwei auf einander senkrechte Richtungen gibt, in denen solches im Allgemeinen der Fall ist, und zwar sind die beiden Krümmungshalbmesser ungleich und finden sich vermittelst der Gleichung:

$$\left.\begin{array}{c}(\partial^2 z_x \partial^2 z_y - \partial^2 z_{x,y}^2) r^2 \\ -[(1+\partial z_x^2)\partial^2 z_y - 2\partial z_x \partial z_y \partial^2 z_{x,y} + (1+\partial z_y^2)\partial^2 z_x]\, r\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2} \\ +(1+\partial z_x^2+\partial z_y^2)^2\end{array}\right\} = 0.$$

Schlagen wir nun eine auf obige Richtung senkrechte Richtung ein, und bezeichnen die neuen Curvenelemente und Krümmungshalbmesser respective mit $d\sigma$, $d\sigma'$, ϱ und ϱ', so haben wir ebenfalls:

$$d\sigma' = d\sigma\frac{\varrho'}{\varrho} = d\sigma.\frac{a+\varrho}{\varrho}.$$

Diess gibt für das Flächen-Element der Normalfläche:

$$ds'\,d\sigma' = ds\,d\sigma\left(\frac{a+r}{r}\right)\left(\frac{a+\varrho}{\varrho}\right),$$

und für die Fläche selbst:

$$u' = \iint ds\,d\sigma + a\iint ds\,d\sigma\,\frac{r+\varrho+a}{r\varrho}.$$

Das erste Integral ist die quadrirte Urfläche, die sich bekanntlich vermittelst des Integrals

$$\iint dxdy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}$$

findet, und obschon $dsd\sigma$ nicht gleich ist

$$dxdy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2},$$

so ist dennoch

$$\iint dsd\sigma\frac{r+\varrho+a}{r\varrho}=\iint dxdy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}.\frac{r+\varrho+a}{r\varrho},$$

wofern beide Integrale zwischen denselben Grenzen genommen werden. Denn stellen wir uns in der Oberfläche einen Punkt vor, um welchen beide Elemente

$$dxdy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2} \text{ und } dsd\sigma$$

genommen sind, und es sei

$$dsd\sigma=ndxdy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2},$$

so kann man sich für dieselbe Region die Funktion $\frac{r+\varrho+a}{r\varrho}$ dieselbe Grösse habend vorstellen, indem sie sich nur um unendlich kleine Zuwachse verändert, wenn man vom Element $dsd\sigma$ zum andern

$$dxdy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}$$

übergeht, so dass demnach auch

$$dsd\sigma.\frac{r+\varrho+a}{r\varrho}=n\,dxdy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}.\frac{r+\varrho+a}{r\varrho}.$$

Also hat man:

$$1)\qquad u'=\iint dxdy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}$$
$$+a\iint dxdy\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}.\frac{r+\varrho+a}{r\varrho}$$

Der zwischen der Ur- und Normalfläche liegende Körper bildet eine Schaale, und der zwischen den einander correspondirenden Flächenelementen $ds'd\sigma'$ und $dsd\sigma$ liegende Theil dieser Schaale einen abgestumpften Keil, dessen Höhe $=a$, und dessen die parallelogrammen Grundflächen einschliessenden Kanten ds', $d\sigma'$ und ds, $d\sigma$ sind.

Für diesen abgestumpften Keil findet sich aber der cubische Inhalt

$$dv' = \frac{1}{6} a [ds'(2d\sigma' + d\sigma) + ds(2d\sigma + d\sigma')].$$

Und setzt man hier wieder:

$$ds' = ds \frac{a+r}{r} \text{ und } d\sigma' = d\sigma \frac{a+\varrho}{\varrho}$$

und entwickelt, so kommt

$$v' = a \iint ds\, d\sigma + \frac{1}{6} a^2 \iint ds\, d\sigma \,.\, \frac{3(r+\varrho)+2a}{r\varrho},$$

und aus denselben Gründen, wie oben bei der Quadratur:

$$2) \qquad v' = a \iint dx dy \sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2}$$
$$+ \frac{1}{6} a^2 \iint dx dy \sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} \, \frac{3(r+\varrho)+2a}{r\varrho}.$$

In diesem Ausdrucke ist bemerkenswerth, dass das rechte Integral einen prismatischen Körper repräsentirt, dessen Grundfläche gleich der Urfläche und dessen Höhe gleich der Erzeugungslinie a ist.

Um r und ϱ durch ihre Funktionen in x und y zu ersetzen, hat man nicht nothwendig, die obige, r und ϱ liefernde Gleichung aufzulösen, indem sich unmittelbar aus derselben ergibt:

$$r + \varrho = \frac{(1+\partial z_x^2)\partial^2 z_y - 2\partial z_x \partial z_y \partial^2 z_{x,y} + (1+\partial z_y^2)\partial^2 z_x}{\partial^2 z_x \partial^2 z_y - \partial^2 z_{x,y}^2} \sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2},$$

$$r\varrho = \frac{(1+\partial z_x^2 + \partial z_y^2)^2}{\partial^2 z_x \partial^2 z_y - \partial^2 z_{x,y}^2}.$$

In 1) und 2) kann man in den meisten Fällen vortheilhaft je das zweite Integral in zwei zerlegen, nach der Zerlegung von

$$\frac{\varrho + r + a}{r\varrho} \text{ in } \frac{\varrho + r}{r\varrho} + \frac{a}{r\varrho}$$

und von

$$\frac{3(\varrho + r) + 2a}{r\varrho} \text{ in } \frac{3(\varrho + r)}{r\varrho} + \frac{2a}{r\varrho}.$$

Für den Fall, dass $\partial^2 z_x \partial^2 z_y - \partial^2 z_{x,y}^2 = 0$ ist, ist einer der Krümmungshalbmesser unendlich. Der andere dagegen ist

$$r = \frac{(1+\partial z_x^2+\partial z_y^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\partial z_x^2)\partial^2 z_y - 2\partial z_x \partial z_y \partial^2 z_{x,y} + (1+\partial z_y^2)\partial^2 z_x},$$

wodurch die beiden Werthe für u' und v' übergehen in:

$$u' = \iint dx dy \sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2} + a \iint dx dy \sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2} \cdot \frac{1}{r}$$

und

$$v' = a \iint dx dy \sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2} + \frac{1}{2} a^2 \iint dx dy \sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2} \cdot \frac{1}{r}.$$

Ist aber noch überdiess

$$(1+\partial z_x^2)\partial^2 z_y - 2\partial z_x \partial z_y \partial^2 z_{x,y} + (1+\partial z_y^2)\partial^2 z_x = 0,$$

so sind beide Krümmungshalbmesser unendlich gross, was z. B. bei der Ebene der Fall ist. In diesem Fall bleiben von u' und v' nur die ersten Integrale. Wählen wir als:

1. Beispiel.

Die Quadratur und Cubatur des gemeinen Normalkegels.

Die Gleichung desselben ist:

$$z^2 = A^2(x^2+y^2).$$

Da hier $\partial^2 z_x \partial^2 z_y - \partial^2 z_{x,y}^2 = 0$, so ist der eine Krümmungshalbmesser unendlich, der andere aber ist:

$$r = \frac{\sqrt{1+A^2}}{A} \sqrt{x^2+y^2}.$$

Da man nun hat

$$1+\partial z_x^2+\partial z_y^2 = 1+A^2,$$

so ergibt sich:

$$u' = \sqrt{1+A^2} \iint dx dy + aA \iint \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Das erste Integral ist die Oberfläche des Urkegels und das letztere gibt, indem man zuerst in Beziehung auf y integrirt,

$$aA \iint \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = aA \int dx \log(y+\sqrt{x^2+y^2}),$$

welches noch zwischen den Grenzen

$$y=0 \text{ und } y=\sqrt{\frac{h^2}{A^2}-x^2}$$

zu nehmen ist, wofern h die Höhe des Kegels vorstellt. Diess gibt

$$aA\iint\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=aA\int dx\log\left[\sqrt{\frac{h^2}{A^2}-x^2}+\frac{h}{A}\right]-aA\int dx\log x$$

oder

$$=aA\int dx\log\left\{\frac{\sqrt{\frac{h^2}{A^2}-x^2}+\frac{h}{A}}{x}\right\}.$$

Nun setze man $x=\frac{h}{A}\sin X$, so ist

$$dx=\frac{h}{A}\cos X\,dX,$$

und unser Integral geht nach und nach über in:

$$ah\int dX\cos X\log\left(\frac{\cos X+1}{\sin X}\right)$$

$$=ah\sin X\log\left(\frac{1+\cos X}{\sin X}\right)-ah\int dX\sin X\partial\left[\log\left(\frac{1+\cos X}{\sin X}\right)\right]$$

$$=ah\sin X\log\left(\frac{1+\cos X}{\sin X}\right)+ahX.$$

Will man zuerst die halbe Oberfläche des Normalkegels, so nimmt man dieses Integral zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=0$, d. h. zwischen $X=0$ und $X=\pi$, und verdoppelt es zuletzt für die ganze Oberfläche. So findet sich:

$$2ah\pi.$$

Fügt man das erste Integral, oder die Oberfläche des Urkegels noch hinzu, so hat man:

$$u'=\pi\,(R\sqrt{R^2+h^2}+2ah),$$

wenn man den Halbmesser der Grundfläche $\frac{h}{A}=R$ setzt. Unter

Benützung der obigen Integrale ergibt sich ferner der cubische Inhalt (der Schaale)

$$v' = a\pi(R\sqrt{R^2+h^2} + ah).$$

Wir nehmen als:

2. Beispiel.

Die Quadratur und Cubatur des Normal-Umdrehungsparaboloides.

Die Gleichung der Urfläche ist:

$$z = \frac{1}{2}p(x^2+y^2).$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \partial z_x &= px, \\ \partial z_y &= py, \\ \partial^2 z_x = \partial^2 z_y &= p, \\ \partial^2 z_{x,y} &= 0; \end{aligned}$$

und diese Werthe liefern:

$$\frac{r+\varrho}{r\varrho} = p \cdot \frac{2+p^2(x^2+y^2)}{[1+p^2(x^2+y^2)]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{a}{r\varrho} = ap^2 \cdot \frac{1}{[1+p^2(x^2+y^2)]^2}.$$

Wir haben uns nun mit der Entwickelung folgender drei Integrale zu beschäftigen:

$$\iint dxdy\sqrt{1+p^2(x^2+y^2)},$$

$$\iint dxdy \cdot \frac{2+p^2(x^2+y^2)}{1+p^2(x^2+y^2)} \text{ oder } \iint dxdy + \iint \frac{dx\,dy}{1+p^2(x^2+y^2)},$$

$$\iint \frac{dx\,dy}{[1+p^2(x^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Hier können wir für x und y auf Polar-Coordinaten übergehen, und setzen wir den Radius-Vektor $=u$, so dass $u^2 = x^2+y^2$, und den Winkel, den derselbe mit der Abscissenaxe macht, $=v$, so stellt sich die Gleichung des Umdrehungsparaboloides einfacher dar durch $z = \frac{1}{2}pu^2$.

Da sich nun das Flächenelement $dxdy$ durch $ududv$ ersetzen lässt, so verwandeln sich obige Integrale in:

$$\iint ududv\sqrt{1+p^2u^2},$$

$$\iint ududv+\iint\frac{ududv}{1+p^2u^2},$$

$$\iint\frac{ududv}{(1+p^2u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Will man die Fläche oder den cubischen Inhalt des ganzen Paraboloides, so hat man die Integrale in Beziehung auf v zwischen den Grenzen $v=0$ und $v=2\pi$ zu nehmen, und hat:

$$2\pi\int udu\sqrt{1+p^2u^2},$$

$$2\pi\int udu+2\pi\int\frac{udu}{1+p^2u^2},$$

$$2\pi\int\frac{udu}{(1+p^2u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Integrationen vollziehen sich leicht, wenn man setzt:

$$1+p^2u^2=w^2.$$

Ist nun die Höhe des Paraboloides gleich h, so ist

$$z=h=\frac{1}{2}pu^2,$$

und demnach die Grenzen von u gleich 0 und gleich $\sqrt{\frac{2h}{p}}$. Auf diese Weise hat man:

$$\frac{2\pi}{3p^2}[(1+2ph)^{\frac{3}{2}}-1],$$

$$\frac{2\pi h}{p}+\frac{\pi}{p^2}\log(1+2ph),$$

$$\frac{2\pi}{p^2}\left[1-\frac{1}{\sqrt{1+2ph}}\right].$$

Um die Oberfläche zu haben, müssen wir das zweite Integral mit pa und das dritte mit p^2a^2 multipliciren und hierauf alle drei addiren. Diess gibt die

Oberfläche

$$= 2\pi \left\{ \frac{1}{3p^2}[(1+2ph)^{\frac{3}{2}} - 1] + a(h+a) + \frac{a}{2p}\log(1+2ph) - \frac{a^2}{\sqrt{1+2ph}} \right\}.$$

Will man aber den cubischen Inhalt (der Schaale), so ist das erste Integral mit a, das zweite mit $\frac{1}{2}pa^2$ und das dritte mit $\frac{1}{3}p^2a^3$ zu multipliciren und hierauf alle drei zu addiren. So kommt

Cubischer Inhalt

$$= a\pi \left\{ \frac{2}{3p^2}[(1+2ph)^{\frac{3}{2}} - 1)] + a(h + \frac{2}{3}a) + \frac{a}{2p}\log(1+2ph) - \frac{2}{3}\frac{a^2}{\sqrt{1+2ph}} \right\}.$$

E. Will man aber obige Integrale, statt zwischen Grenzen von x und y, zwischen bestimmten Grenzen von x' und y' nehmen, die wir durch $(x')'$, $(x')''$ und $(y')'$, $(y')''$ bezeichnen, so werden sich die Grenzen von x und y darnach bestimmen.

Setzen wir nun die Grenzen $(x')'$, $(x')''$ und $(y')'$, $(y')''$ nach einander beziehlich in die beiden Gleichungen

$$(x'-x)\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2} + a\partial z_x = 0,$$

$$(y'-y)\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2} + a\partial z_y = 0;$$

so stellen sich, mit Hilfe der Gleichung der Urcurve, selbst wenn $(y')'$ in Funktion von (x') und $(y')''$ in Funktion von $(x')''$ gegeben wären, vier Gleichungen zwischen y und x dar, und wir bezeichnen die daraus hervorgehenden Funktionen y von x mit

a) $y = f^1(x)$,
b) $y = f^2(x)$,
c) $y = f^3(x)$,
d) $y = f^4(x)$.

Sind (Taf. III. Fig. 4.) AX und AY die Coordinatenaxen der Ebene (xy), so sei die Curve BD durch die Gleichung a), EC durch b), BC durch c) und DE durch d) dargestellt und das Viereck $BDEC$ repräsentirt die Grenzen, zwischen denen die Integrale zu nehmen sind. Verbindet man die Gleichungen a) und c) mit einander, so bestimmt sich dadurch der Punkt B, dessen Abscisse wir durch x_1 bezeichnen. a) und d) bestimmen den Punkt D, dessen Abscisse wir $= x_2$ setzen. b) und c) bestimmen C, dessen Abscisse $= x_3$ und endlich bestimmen b) und d) den Punkt E, dessen Abscisse $= x_4$.

Es ist nun aber Viereck

e) $BDEC = BDx_1x_2 - CEx_3x_4 - BCx_1x_3 + DEx_2x_4$.

Nachdem nun eines der obigen Integrale in Beziehung auf y genommen worden ist, wird man es mit $y=0$ beginnen lassen und in dasselbe nach einander die Funktionen

$$y=f^1(x),\ y=f^2(x),\ y=f^3(x),\ y=f^4(x)$$

substituiren, hierauf in Beziehung auf x integriren, und

das 1ste zwischen den Grenzen x_1 und x_2,
das 2te „ „ „ x_3 und x_4.
das 3te „ „ „ x_1 und x_3 und
das 4te „ „ „ x_2 und x_4

nehmen, und dieselben mit den im zweiten Theil der Gleichung e) enthaltenen Zeichen additiv zusammensetzen. Ist aber $x_2 < x_1$, so muss BDx_1x_2 negativ genommen werden. Gleicherweise ändert sich das Zeichen von CEx_3x_4, wenn $x_4 > x_3$.

Hiedurch bezweckt sich die Quadratur eines Stücks der Normalfläche, welches von parallelopipedalisch aneinandergereihten Ebenen, die mit den Coordinaten-Ebenen (zx) und (zy) parallel laufen, abgeschnitten wird.

Weit schwieriger ist hier die Cubatur auf solche Weise, dass dadurch ein Körper bestimmt werde, welcher prismatisch zwischen dem abgeschnittenen Stück der Normalfläche und der Ebene (xy) liege; denn obige Integrale geben noch immer einen Körpertheil, welcher normal zwischen den correspondirenden Stücken der Ur- und Normalfläche liegt.

Will man zu diesem Zwecke nicht unmittelbar die Gleichung der Normalfläche bestimmen und benützen, so handelt es sich darum, vier prismatische Körperstücke theils zu addiren, theils zu subtrahiren, deren Seitenflächen senkrecht auf der Ebene (xy) stehen und im Uebrigen theils von der Ebene (xy) und, dieser gegenüber, von einer durch den Fortgang der Erzeugungslinie a gebildeten krummen Oberfläche begrenzt werden. Das erste Geschäft ist, die Gleichung dieser letztern (oder vielmehr vier letztern) zu entwickeln.

Hiezu dienen die Gleichungen der Normale

$$x'' - x + \partial z_x (z'' - z) = 0$$

und

$$y'' - y + \partial z_y (z'' - z) = 0,$$

wo x'', y'' und z'' die Ordinatenwerthe der Normale bezeichnen, während beide Gleichungen noch überdiess x, y und z enthalten. z eliminirt sich vermittelst der gegebenen Gleichung der Urcurve. Hierauf wird man nach einander die oben bestimmten Funktionen

y ((a), b), c) und d)) statt y substituiren, und zwischen beiden das noch übrig bleibende x eliminiren. Die Eliminationsgleichung wird dann jedesmal die gesuchte Gleichung zwischen x'', y'' und z'' jener Oberflächen sein.

Die theilweise Coordinaten-Verwandlung im obigen zweiten Beispiel führt uns zur der Betrachtung im folgenden Aufsatze.

XX.

Ueber gemischte Coordinaten.

Von

Herrn Brenner,

Lehrer zu Tuttlingen im Königreich Würtemberg.

Es ist bei der Behandlung der Körper, so wie bei derjenigen der Flächen und Curven des Raumes, oft sehr zweckmässig, statt der reinen rechtwinkligen oder statt der reinen Polar-Coordinaten ein Gemisch derselben in Anwendung zu bringen. Diess kann geschehen, wenn man die Axe z unverändert lässt, dagegen statt x und y einen in der Ebene (xy) liegenden, bis an die Projektion eines betrachteten Punktes gezogenen Radius-Vektor, und den Winkel α nimmt, den derselbe mit der Axe x macht.

Die Formeln zur Cubatur und Quadratur der krummen Oberflächen, so wie zur Rectification der Curven des Raumes gestalten sich für gemischte Coordinaten wie folgt.

A. Cubatur.

Denkt man sich im Körper einen beliebigen Punkt, lässt dessen Radius-Vector um dr, den Winkel α um $d\alpha$ und z um dz

wachsen, so bestimmen die drei auf einander senkrecht stehenden Kanten dr, $rd\alpha$ und dz ein Parallelepipedum, dessen Inhalt $rdrdzd\alpha$ ist. Demnächst ist der cubische Inhalt V des Körpers

$$V = \int\int\int rdrdzd\alpha .$$

B. Quadratur der Oberfläche.

Es stelle (Taf. III. Fig. 5.) BCG einen mit der Ebene (xy) oder $(r\alpha)$ parallelen Durchschnitt dar, in der Entfernung z des letztern von $(r\alpha)$, und eben so C einen in obigem Durchschnitt fixirten Punkt. Auch sei AX' mit der ursprünglichen Axe der x parallel, so dass $\angle CAX' = \alpha$. Nun lasse man α um $d\alpha$ wachsen, so dass $BAC = d\alpha$. Dann wird $BE = dr$ sein, so genommen, dass z constant gedacht ist, wodurch $BE = \partial r_\alpha d\alpha$ wird. Hierauf denkt man sich z beliebig um dz wachsend und legt durch z und AC eine Ebene. Dieser Schnitt, so wie der mit $(r\alpha)$ parallele und von $(r\alpha)$ um $z+dz$ entfernte Schnitt werden sich in der krummen Oberfläche in einem Punkte schneiden, den wir D heissen. Ziehe ich nun von D ein Loth DD' auf AC, so stellt CD' das Wachsthum von r vor, so genommen, dass nur z variirt, dagegen α constant bleibt. Demnach ist

$$CD' = \partial r_z dz.$$

Das gesuchte Elementarparallelogramm hat nun als Seiten die Linien

$$BC = d\alpha\sqrt{r^2 + \partial r_\alpha^2}$$

und

$$DC = dz\sqrt{1 + \partial r_z^2}.$$

Der Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels ergibt sich aber nach der sphärischen Trigonometrie, wenn man $\cos BCD'$ mit $\cos DCD'$ multiplicirt. Demnach ist:

$$\cos DCB = \cos DCD' . \cos BCD'$$
$$= \frac{\partial r_z}{\sqrt{1+\partial r_z^2}} \cdot \frac{\partial r_\alpha}{\sqrt{r^2 + \partial r_\alpha^2}},$$

folglich

$$\sin DCB = \frac{1}{\sqrt{1+\partial r_z^2}\sqrt{r^2+\partial r_\alpha^2}}\sqrt{r^2(1+\partial r_z^2)+\partial r_\alpha^2}.$$

Demnach das Elementarparallelogram selbst

$$= BC.DC.\sin DCB = d\alpha dz \sqrt{r^2(1+\partial r_z{}^2)+\partial r_\alpha{}^2}.$$

So findet sich also die krumme Oberfläche

$$F = \iint d\alpha dz \sqrt{r^2(1+\partial r_z{}^2)+\partial r_\alpha{}^2}.$$

C. Rectification der Linie des Raumes.

Hier findet sich nur Eine unabhängige Veränderliche, und wir nehmen α als solche an. Die Transversale des Parallelepipedums, dessen Kanten sind $rd\alpha$, $\partial r_\alpha d\alpha$ und $\partial z_\alpha d\alpha$, ist aber gleich

$$d\alpha \sqrt{r^2+\partial z_\alpha{}^2+\partial r_\alpha{}^2}.$$

Demnach findet sich der Bogen unserer Curve

$$s = \int d\alpha \sqrt{r^2+\partial z_\alpha{}^2+\partial r_\alpha{}^2}.$$

Als Anwendung hievon geben wir Folgendes:

a). Eine ebene Curve bewegt sich mit sich selbst parallel nach einer auf ihrer Ebene senkrechten Richtung, während sie noch überdiess um eine feste Axe rotirt, so dass der Rotationswinkel der Erhebung stets proportional ist und dass eben jene Axe auf genannter Ebene senkrecht steht. Es soll nun die Gleichung der von der Curve beschriebenen Oberfläche dargestellt werden. Es befinde sich in der Ebene (xy) (Taf. III. Fig. 6.) die Curve lb, für welche die Gleichung $y=f(x)$ gegeben ist. Hat sie sich nun auf angegebene Weise um z über (xy) erhoben, so stelle LB ihre Projektion auf (xy) vor, so wie EX und EY die Projektionen ihrer Coordinaten-Axen, die mit der Curve rotiren, während wir die Axe z in die Rotationsaxe verlegen. Nehme ich in LB den beliebigen Punkt C an, und ziehe das Loth CD, so ist CD die Ordinate und ED die Abscisse desjenigen Punktes, von welchem C die Projektion ist, und setze ich $ED=X$ und $CD=Y$, so findet zwischen X und Y dieselbe Gleichung statt, wie zwischen x und y, d. h. man hat

$$Y=f(X).$$

Den Drehungswinkel XEx setze ich $=\beta$, so ist bekanntlich:

$$X = y\sin\beta + x\cos\beta,$$
$$Y = y\cos\beta - x\sin\beta.$$

Allein da β dem z proportional ist, so setzen wir $\beta = Az$ und haben so die Gleichung:

$$y \cos(Az) - x \sin(Az) = f[y \sin(Az) + x \cos(Az)].$$

Setzen wir nun

$$y = r \sin\alpha$$

und

$$x = r \cos\alpha,$$

so nimmt diese Gleichung folgende Form an:

$$r \sin(\alpha - Az) = f[r \cos(\alpha - Az)].$$

1. Beispiel.

Setzen wir als Erzeugungslinie eine Gerade, die durch die Rotationsaxe geht, so ist, wenn sie Anfangs mit der Abscissenaxe selbst zusammenfällt, $y=0$, d. h. $Az=\alpha$ die gesuchte Gleichung der erzeugten Oberfläche, und es weist sich demnach r von z und α völlig unabhängig aus.

Wollen wir nun zuerst den von unserer Fläche begrenzten Körper cubiren, so haben wir

$$V = \frac{1}{2} r'^2 \iint dz d\alpha,$$

wo r zwischen den Grenzen $r=0$ und $r=r'$ genommen ist. Hierauf kommt

$$V = \frac{1}{2} r'^2 \int \alpha dz,$$

wo das Integral mit $\alpha=0$ beginnt. Die andere Grenze aber ist $\alpha = Az$, und so haben wir:

$$V = \frac{1}{2} r'^2 A \int z dz = \frac{1}{4} r'^2 z^2 A,$$

wo auch hier das Integral mit $z=0$ anfängt. Nimmt man eine volle Umdrehung, so ist $z = \frac{2\pi}{A}$, und man hat

$$V = \frac{r^2 \pi^2}{A} = \frac{1}{2} r^2 \pi z,$$

also gleich der Hälfte eines Cylinders, dessen Höhe $=z$ und Radius $=r$.

Für die Quadratur der Oberfläche ist die Formel

$$F=\iint d\alpha dz \sqrt{r^2(1+\partial r_z^2)+\partial r_\alpha^2}$$

unbrauchbar, weil für diesen Zweck nothwendig ist, dass α und z von einander unabhängig sind, während im vorliegenden Falle r völlig unabhängig ist, und zwischen z und α die Gleichung existirt $Az=\alpha$, eine Bemerkung, die sich in Beziehung auf die Cubatur nicht machen lässt, weil hier dz im Innern des Körpers ganz beliebig genommen ist und die Abhängigkeit $Az=\alpha$ erst nach der Integration in Beziehung auf α bei der einen Grenze zum Vorschein kommt. Es ist daher nöthig, die Abhängigkeit auf eine andere Veränderliche, etwa auf z zu werfen, so dass alsdann r und α als unabhängig erscheinen. Auf diese Weise haben wir

$$\partial r_z=\frac{1}{\partial z_r} \text{ und } \partial r_\alpha=\frac{1}{\partial\alpha_r}=\frac{1}{\partial\alpha_z\partial z_r}=\frac{\partial z_\alpha}{\partial z_r}.$$

So hat man denn:

$$F=\iint d\alpha dr \sqrt{r^2(1+\partial z_r^2)+\partial z_\alpha^2}.$$

Nun aber ist $\partial z_r=0$ und $\partial z_\alpha=\frac{1}{A}$, folglich

$$F=\iint d\alpha dr \sqrt{r^2+\frac{1}{A^2}}.$$

Die Integrationen aber geben:

$$F=\frac{(\alpha-C)}{2A}\left[r\sqrt{1+A^2r^2}+\frac{1}{A}\log(rA+\sqrt{1+A^2r^2})\right]+C',$$

wo C und C' die beiden eingegangenen Constanten sind.

Für $r=0$ ist auch der Flächengehalt $=$ Null, und soll er auch für $\alpha=0$ gleich Null sein, so hat man:

$$F=\frac{\alpha}{2A}\left[r\sqrt{1+A^2r^2}+\frac{1}{A}\log(rA+\sqrt{1+A^2r^2})\right],$$

wo für eine ganze Umdrehung α durch 2π zu ersetzen ist.

Verbinden wir mit der Gleichung $Az=\alpha$ noch $r=c$, wo c eine Constante vorstellt, so haben wir die Schraubenlinie. Wollen wir sie rectificiren, so ist

$$\partial z_\alpha=\frac{1}{A} \text{ und } \partial r_\alpha=0,$$

daher

$$s=\int d\alpha\sqrt{c^2+\frac{1}{A^2}}=\alpha\sqrt{c^2+\frac{1}{A^2}},$$

wenn s mit $\alpha=0$ anfangen soll. Eliminirt man A und c, so kommt

$$s=\sqrt{r^2\alpha^2+z^2}$$

und für eine ganze Umdrehung

$$s=\sqrt{4r^2\pi^2+z^2},$$

welches die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ist, das z, und den Umkreis des Cylinders vom Radius r zu Catheten hat.

2. Beispiel.

Setzen wir eine Gerade, die nicht durch die Rotationsaxe z geht, so können wir sie uns Anfangs mit x parallel in einer Entfernung $y=a$ denken. Alsdann ist

$$r=\frac{a}{\sin(\alpha-Az)}$$

die Gleichung der Oberfläche.

Die Cubatur gibt zuerst:

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{2}\iint r^2\,dz\,d\alpha\\&=\frac{a^2}{2}\iint\frac{dz\,d\alpha}{\sin(\alpha-Az)^2}\\&=\frac{a^2}{2}\int dz\,[C-\cot(\alpha-Az)],\end{aligned}$$

wo C die eingegangene Constante, oder

$$=\frac{a^2}{2}\int dz\,[\cot(\alpha'-Az)-\cot(\alpha''-Az)],$$

wenn man dieses Integral zwischen den Grenzen $\alpha=\alpha'$ und $\alpha=\alpha''$ nimmt.

Nehmen wir nun das Integral in Beziehung auf z, so haben wir

$$V=\frac{a^2}{2A}\left\{\log\left[\frac{\sin(\alpha''-Az)}{\sin(\alpha'-Az)}\right]+\log C'\right\},$$

wo C' die Constante ist.

Soll der Cubikinhalt für $z=0$ verschwinden, so ist

$$\log C' = -\log \frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha'}$$

und

$$V = \frac{a^2}{2A} \log \left[\frac{\sin\alpha' \sin(\alpha'' - Az)}{\sin\alpha'' \sin(\alpha' - Az)} \right].$$

Diess ist der cubische Inhalt eines Körpers, der einerseits von der krummen Oberfläche, anderseits aber von zwei parallelen um z von einander abstehenden Ebenen, so wie von zwei andern auf den letztern senkrecht stehenden und sich unter dem Winkel $\alpha''-\alpha'$ in der Rotationsaxe schneidenden Ebenen eingeschlossen ist.

Zur Quadratur der Oberfläche aber hat man, unter Anwendung der Formel

$$F = \iint d\alpha dz \sqrt{r^2(1+\partial r_z^2) + \partial r_\alpha^2},$$

aus

$$r = \frac{a}{\sin(\alpha - Az)},$$

$$\partial r_\alpha = -\frac{a\cos(\alpha - Az)}{\sin(\alpha - Az)^2}$$

und

$$\partial r_z = \frac{Aa\cos(\alpha - Az)}{\sin(\alpha - Az)^2}.$$

Substituirt man diese Werthe, so ergibt sich:

$$F = a \iint \frac{d\alpha dz}{\sin(\alpha - Az)^2} \sqrt{1 + A^2a^2 \mathrm{cotg}(\alpha - Az)^2}$$

$$= -\frac{1}{2} a \int dz \, \mathrm{cotg}(\alpha - Az) \sqrt{1 + A^2a^2 \mathrm{cotg}(\alpha - Az)^2}$$

$$- \frac{1}{2A} \int dz \log\left[Aa\,\mathrm{cotg}(\alpha - Az) + \sqrt{1 + A^2a^2 \mathrm{cotg}(\alpha - Az)^2}\right] + C.$$

Sucht man diejenige Fläche, die von einem bestimmten Theil der Geraden erzeugt wird, der beim Anfang der Bewegung zwischen den Grenzen $\alpha = \alpha'$ und $\alpha = \alpha''$ enthalten ist, so ist obiges Integral zwischen den Grenzen $\alpha = \alpha' + Az$ und $\alpha = \alpha'' + Az$ zu nehmen und dann kommt:

$$F=\frac{1}{2}az'\left[\cot\alpha'\sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha'^2}-\cot\alpha''\sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha''^2}\right]$$

$$+\frac{z'}{2A}\left[\log\frac{Aa\cot\alpha'+\sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha'^2}}{Aa\cot\alpha''+\sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha''^2}}\right]$$

für die Grenzen $z=0$ und $z=z'$.

Wird nun durch eine geradlinige Figur, vermittelst oben beschriebener Bewegung, ein Körper erzeugt, so ist, wenn die Grundfläche (eben jene Figur) gleich G gesetzt wird, das Körperelement desselben

$$dV=Gdz,$$

folglich $V=Gz$, wenn das Integral mit $z=0$ beginnen soll.

Es folgt hieraus, dass man, um den cubischen Inhalt eines solchen Körpers zu bestimmen, nur die Grundfläche mit der Höhe multipliciren darf. Zur Bestimmung der Oberfläche jedoch dient obige Endformel für F. Nehmen wir als Erzeugungsfigur z. B. das gleichseitige Dreieck, dessen Seite $=g$, und lassen sich dasselbe um seinen Mittelpunkt drehen, so ist

$$a=\frac{g}{2\sqrt{3}}.$$

Nimmt man hierauf als erste Grenze an $\alpha'=\frac{\pi}{6}$, so ist die zweite $\alpha''=\frac{5\pi}{6}$, so dass

$$\operatorname{cotg}\alpha'=+\sqrt{3} \text{ und } \operatorname{cotg}\alpha''=-\sqrt{3}.$$

Hieraus ergibt sich für die ganze Oberfläche des erzeugten Körpers nach einigen Reduktionen:

$$F=\frac{3}{4}gz'\sqrt{4+g^2A^2}+\frac{3z'}{A}\left(\log\frac{Ag+\sqrt{4+A^2g^2}}{2}\right).$$

Substituiren wir aber dem gleichseitigen Dreieck ein Quadrat mit der Seite g, so ist $a=\frac{g}{2}$, und nimmt man $\alpha'=\frac{\pi}{4}$, so ist $\alpha''=\frac{3\pi}{4}$, $\cot\alpha'=1$ und $\cot\alpha''=-1$. Diess gibt:

$$F=gz'\sqrt{4+g^2A^2}+\frac{4z'}{A}\left(\log\frac{Ag+\sqrt{4+A^2g^2}}{2}\right).$$

Wollen wir aber eine Oberfläche quadriren, die durch die Bewegung einer ebenen Curve erzeugt wird, so stellen wir uns dieselbe, wie diess bei der Differentialrechnung immer der Fall ist, als aus unendlich vielen, unendlich kleinen geraden Linien bestehend vor, so dass jedes $d\alpha'$ ein Stück derselben zwischen sich fasst, indem wir uns die Curve in der Ebene (xy) liegend vorstellen.

Die Formel

$$F=\frac{1}{2}\,az[\cot\alpha'\sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha'^2}-\cot\alpha''\sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha''^2}]$$
$$+\frac{z}{2A}\left(\log\frac{Aa\cot\alpha'+\sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha'^2}}{Aa\cot\alpha''+\sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha''^2}}\right)$$

wird demnach die Oberfläche eines unendlich schmalen (gewundenen) Streifens der Oberfläche geben, wenn wir $\alpha''-\alpha'=d\alpha'$ setzen, und a die Entfernung des betrachteten Elementes der Curve oder dessen Verlängerung vom Fusspunkte der Rotationsaxe z darstellt.

Setzt man aber in obiger Gleichung $\alpha''=\alpha'+d\alpha'$, wo $d\alpha'$ das Wachsthum von α' vorstellt, so entwickelt sich als Differential der Oberfläche, wenn wir auch von α' den Apostrophen weglassen,

$$dF=za\frac{d\alpha}{\sin\alpha^2}\sqrt{1+A^2a^2\cot\alpha^2}.$$

Will man hier integriren, so ist vorher noch der Veränderliche a aus der Gleichung der Curve in Funktion von α herzustellen. Es ist aber für jede ebene Curve, deren Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y gegeben ist,

$$a=\frac{x\partial y-y}{\sqrt{1+\partial y^2}}.$$

Nehmen wir als

3. Beispiel.

Einen Kreis, der sich nach oben angegebener Weise um einen Punkt in seiner Peripherie bewegt, so ist dessen Gleichung

$$y^2=2Rx-x^2,$$

und hieraus

$$a=-x=-r\cos\alpha=-2R\cos\alpha^2,$$

und diess gibt:

$$dF=-2Rzd\alpha\cot\alpha^2\sqrt{1+4R^2A^2\cos\alpha^4\cot\alpha^2}.$$

Nimmt man das Integral hievon zwischen den Grenzen $\alpha=0$ und $\alpha=\pi$, und verdoppelt es, so hat man die ganze Oberfläche.

Man könnte sich die Aufgabe stellen, Curven zu bestimmen, die das Integral der Oberfläche in endlicher Form liefern. Hiebei dürfte man nur a so bestimmen, dass der Ausdruck:

$$za \frac{d\alpha}{\sin\alpha^2} \sqrt{1+A^2 a^2 \cot\alpha^2}$$

die verlangte Integrabilität besässe, wo dann

$$\frac{x\partial y - y}{\sqrt{1+\partial y^2}} = a$$

die Gleichung der gesuchten Curve darstellen würde. Setzt man z. B. $a=\cot\alpha$ oder $a=\operatorname{tg}\alpha$, so hat man

$$dF = -z\cot\alpha\, d(\cot\alpha) \sqrt{1+A^2\cot\alpha^4}$$

oder

$$dF = -z \frac{d(\cot\alpha)}{\cot\alpha} \sqrt{1+A^2}$$

und

$$\frac{x\partial y - y}{\sqrt{1+\partial y^2}} = \frac{x}{y}.$$

oder

$$\frac{x\partial y - y}{\sqrt{1+\partial y^2}} = \frac{y}{x}$$

sind die Differentialgleichungen der zugehörigen Erzeugungs Curven.

b) Gleich zweckmässig erweisen sich gemischte Coordinaten für die Anwendung auf Curven, welche auf gegebenen Oberflächen eine constante Neigung haben.

Man stelle sich irgend eine Curve des Raumes vor und lege eine beliebige mit (xy) oder $(r\alpha)$ parallele Ebene $Y'AX'$ (Taf. III. Fig.7.), welche die Curve im Punkte R schneidet, so ist AR gleich dem Radius-Vector r. Denken wir uns, von R aus genommen, ein Element ds der Curve, so sei M die Projektion des andern Endpunktes P auf die Ebene $Y'AX'$. Es ist alsdann PMR ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem der Winkel PRM die Neigung der Curve ist. Wir setzen $\operatorname{tg}PRM = A$.

Da nun $PM=dz$ und $RM=\sqrt{r^2d\alpha^2+dr^2}$, so ist

$$dz = A\sqrt{r^2d\alpha^2+dr^2}$$

oder

$$\partial z = A\sqrt{r^2\partial\alpha^2 + \partial r^2},$$

wo man sich nur Einen unabhängigen Veränderlichen, etwa α, zu denken hat, weil man es mit einer Curve zu thun hat.

Verbindet man mit dieser Gleichung, in welcher A, für constante Neigung, unveränderlich ist, die Gleichung der krummen Oberfläche, so ist dadurch die gesuchte Curve völlig bestimmt.

1. Beispiel.

Es stehe ein gemeiner gerader Kegel mit seiner Grundfläche auf der horizontalen Ebene $(r\alpha)$, so ist, wenn R gleich dem Radius der Grundfläche und h gleich der Höhe, die Gleichung desselben

$$R(h-z) = hr,$$

womit sich noch verbindet

$$\partial z = A\sqrt{r^2\partial\alpha^2 + \partial r^2}.$$

Diess gibt $\partial z = -\frac{h\partial r}{R}$, und eliminirt man ∂z, so kommt

$$\frac{h^2\partial r^2}{R^2} = A^2(r^2\partial\alpha^2 + \partial r^2),$$

welches gibt

$$\frac{\partial r}{r} = -\frac{AR\partial\alpha}{\sqrt{h^2 - A^2R^2}},$$

wo das negative Zeichen genommen ist, weil r abnimmt, wenn α wächst. Die Integration liefert

$$\log r = -\frac{AR\alpha}{\sqrt{h^2 - A^2R^2}} + C.$$

Nimmt man an, dass für den Anfang, wo $r = R$, $\alpha = 0$, so ist $C = \log R$ und

$$\log\frac{r}{R} = -\frac{AR\alpha}{\sqrt{h^2 - A^2R^2}}$$

oder

$$r = Re^{-\frac{AR\alpha}{\sqrt{h^2 - A^2R^2}}},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen. Da r nur für $\alpha=\infty$ gleich Null werden kann, so erreicht die Curve die Spitze des Kegels nur nach einer unendlichen Anzahl von Gängen.

Die Rectification dieser Curve aber vermittelt sich durch die Gleichung

$$s=\int d\alpha \sqrt{r^2+\partial r_\alpha{}^2+\partial z_\alpha{}^2}.$$

Durch Elimination von r, ∂r_α und ∂z_α entwickelt man

$$s=\frac{Rh\sqrt{1+A^2}}{\sqrt{h^2-A^2R^2}}\int d\alpha\, e^{-\frac{AR\alpha}{\sqrt{h^2-A^2R^2}}}$$

$$=-\frac{h}{A}\sqrt{1+A^2}.\, e^{-\frac{AR\alpha}{\sqrt{h^2-A^2R^2}}}+C.$$

Nimmt man den Anfang des Bogens für $\alpha=0$, so ist

$$C=\frac{h}{A}\sqrt{1+A^2}$$

und

$$s=\frac{h}{A}\sqrt{1+A^2}\left(1-e^{-\frac{AR\alpha}{\sqrt{h^2-A^2R^2}}}\right).$$

Die ganze Curve ergibt sich für $\alpha=\infty$, und dann hat man

$$s=\frac{h}{A}\sqrt{1+A^2}.$$

2. Beispiel.

Substituiren wir dem Kegel ein Umdrehungsparaboloid, so ist dessen Gleichung

$$2p(h-z)=r^2,$$

welche verbunden mit

$$\partial z=A\sqrt{r^2\partial\alpha^2+\partial r^2}$$

die Gleichungen der Curve liefern.

Die erste gibt

$$\partial z=-\frac{r\partial r}{p},$$

folglich

$$\frac{r^2 \partial r^2}{p^2} = A^2 (r^2 \partial \alpha^2 + \partial r^2),$$

woraus man ableitet

$$A p \partial \alpha = -\frac{\partial r}{r} \sqrt{r^2 - p^2 A^2}.$$

Die Integration bewerkstelligt sich bald, wenn man setzt

$$r^2 - p^2 A^2 = \varrho^2,$$

und so kommt

$$A p \alpha = -\sqrt{r^2 - p^2 A^2} + p A \frac{1}{\text{tg}} \left(\frac{\sqrt{r^2 - p^2 A^2}}{p A} \right) + C.$$

Soll für $z = 0$ auch $\alpha = 0$ sein, so ist $r^2 = 2ph$ und

$$C = \sqrt{2ph - p^2 A^2} - p A \frac{1}{\text{tg}} \left(\frac{\sqrt{2ph - p^2 A^2}}{p A} \right),$$

und

$$A p \alpha = \sqrt{2ph - p^2 A^2} - \sqrt{r^2 - p^2 A^2}$$
$$- p A \left[\frac{1}{\text{tg}} \left(\frac{\sqrt{2ph - p^2 A^2}}{p A} \right) - \frac{1}{\text{tg}} \left(\frac{\sqrt{r^2 - p^2 A^2}}{p A} \right) \right];$$

eine Gleichung, welcher man vermittelst der Formel

$$\frac{1}{\text{tg}} X - \frac{1}{\text{tg}} Y = \frac{1}{\text{tg}} \left(\frac{X - Y}{1 + XY} \right)$$

und einiger Reduktionen folgende Form geben kann:

$$\text{tg} \left(\sqrt{2ph - p^2 A^2} - \sqrt{r^2 - p^2 A^2} - A p \alpha \right)$$
$$= \frac{p A (2ph - r^2)}{2ph \sqrt{r^2 - p^2 A^2} + r^2 \sqrt{2ph - p^2 A^2}},$$

die in Verbindung mit

$$2p(h - z) = r^2$$

die Gleichungen der Curve darstellen.

Da r nicht $=$ Null werden kann, ohne dass obige Endgleichung etwas Imaginäres darbietet, so folgt daraus, dass die Curve den Scheitel gar nicht zu erreichen im Stande ist. Der kleinste Werth, den man r geben kann, ist $r = pA$, und diess gibt den grössten Werth für $z = h - \frac{1}{2} p A^2$.

Zum Zweck der Rectification hat man

$$ds = \sqrt{r^2 d\alpha^2 + dr^2 + dz^2}$$
$$= -\frac{\sqrt{1+A^2}}{pA} rdr,$$

folglich

$$s = -\frac{\sqrt{1+A^2}}{2pA} r^2 + C.$$

Will man s mit $z=0$, d. h. mit $r^2=2ph$ beginnen lassen, so kommt

$$s = \frac{\sqrt{1+A^2}}{2pA}(2ph - r^2),$$

und nimmt man für r den möglich kleinsten Werth pA, so ist

$$s = \frac{\sqrt{1+A^2}}{2A}(2h - pA^2).$$

3. Beispiel.

Wenden wir dieselbe Theorie auf ein Umdrehungs-Ellipsoid an, dessen grösster Kreisdurchschnitt mit der Horizontalebene zusammenfällt.

Wir haben für die Gleichung desselben, wenn a und b die beiden Halbaxen der erzeugenden Ellipse sind, $r^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} z^2$, womit sich verbindet

$$\partial z = A\sqrt{r^2 \partial\alpha^2 + \partial r^2}.$$

Hieraus leitet man ab:

$$Abd\alpha = -\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{r^2(a^2+A^2b^2)-A^2b^4}{b^2-r^2}}.$$

Setzt man

$$\frac{r^2(a^2+A^2b^2)-A^2b^4}{b^2-r^2} = x^2,$$

so arbeitet man sich leicht zum Integral hin:

$$\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}}\left[\sqrt{\frac{r^2(a^2+A^2b^2)-A^2b^4}{A^2b^2(b^2-r^2)}}\right]-\frac{\sqrt{a^2+A^2b^2}}{Ab}\frac{1}{\mathrm{tg}}\left[\sqrt{\frac{r^2(a^2+A^2b^2)-A^2b^4}{(a^2+A^2b^2)(b^2-r^2)}}\right]+C.$$

Lässt man den Winkel α beginnen mit $r=b$, so hat man

$$C=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{a^2+A^2b^2}}{Ab}-1\right),$$

und wir können unserm Integral leicht die Form geben:

$$\alpha=\frac{\sqrt{a^2+A^2b^2}}{Ab}\frac{1}{\mathrm{tg}}\left[\sqrt{\frac{(a^2+A^2b^2)(b^2-r^2)}{r^2(a^2+A^2b^2)-A^2b^4}}\right]-\frac{1}{\mathrm{tg}}\left[\sqrt{\frac{A^2b^2(b^2-r^2)}{r^2(a^2+A^2b^2)-A^2b^4}}\right],$$

oder wenn wir $r^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}z^2$ setzen:

$$\alpha=\frac{\sqrt{a^2+A^2b^2}}{Ab}\frac{1}{\mathrm{tg}}\left[\sqrt{\frac{z^2(a^2+A^2b^2)}{a^4-z^2(a^2+A^2b^2)}}\right]-\frac{1}{\mathrm{tg}}\left[\frac{Abz}{\sqrt{a^4-z^2(a^2+A^2b^2)}}\right].$$

Auch hier erreicht die Curve den Scheitel nicht, indem sich dem z kein grösserer Werth geben lässt als $z=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+A^2b^2}}$ und demrkein kleinerer als $r=\frac{Ab^2}{\sqrt{a^2+A^2b^2}}$.

Für die Rectification aber haben wir

$$ds=\sqrt{r^2d\alpha^2+dr^2+dz^2}$$

oder

$$ds=-\frac{a\sqrt{1+A^2}}{Ab}\cdot\frac{rdr}{\sqrt{b^2-r^2}},$$

dessen Integral ist:

$$s=\frac{a\sqrt{1+A^2}}{Ab}\sqrt{b^2-r^2}+C.$$

Lassen wir s mit $\alpha=0$ oder $r=b$ beginnen, so ist $C=0$, und es ist:

$$s=\frac{a\sqrt{1+A^2}}{Ab}\sqrt{b^2-r^2}=\frac{\sqrt{1+A^2}}{A}z.$$

Für die ganze Curve aber ist:

$$s=\frac{a^2}{A}\sqrt{\frac{1+A^2}{a^2+A^2b^2}}.$$

Für den besondern Fall, dass das Ellipsoid in eine Kugel übergeht, deren Radius $=R$, hat man $a=b=R$, und die beiden Gleichungen der Curve sind:

$$r^2=R^2-z^2$$

und

$$\alpha=\frac{\sqrt{1+A^2}}{A}\frac{1}{\text{tg}}\left[\sqrt{\frac{z^2(1+A^2)}{a^2-z^2(1+A^2)}}\right]-\frac{1}{\text{tg}}\left[\frac{Az}{\sqrt{a^2-z^2(1+A^2)}}\right],$$

während

$$s=\frac{\sqrt{1+A^2}}{A}z$$

bleibt. Für die ganze Curve aber, wo z nur bis auf $z=\frac{R}{\sqrt{1+A^2}}$ wachsen kann, ist

$$s=\frac{R}{A}.$$

XXI.

Ueber die Rotation eines Körpers, der nur in Einem, mit der fixen Rotationsaxe unabänderlich verbundenen, aber ausserhalb derselben gelegenen Punkte, gehalten wird.

Von

Herrn Brenner,

Lehrer zu Tuttlingen im Königreich Würtemberg.

Es sei (Taf. III. Fig. 8.) die Rotationsaxe RT, der mit derselben unabänderlich verbundene Punkt G, so dass das Loth $GT = E$ constant ist, und im Punkte G werde ein um RT rotirender Körper gehalten. Wir wollen nun die Lage des Körpers bestimmen, so wie andere, hieher gehörige, Umstände entwickeln.

Ich nehme G als Coordinaten-Anfang, lasse die Axe der x, nemlich GX, mit dem Lothe GT zusammenfallen, ziehe die Axe der z, GZ, mit der Rotationsaxe RT parallel; dann wird die Axe der y in G senkrecht auf beiden stehen. — Hierauf denke ich mir im Körper auf der positiven Seite der Axe der y einen Atom A, von dem aus ich ein Loth AB auf die Ebene (zx) oder ZGX ziehe. Vom Punkte B ziehe ich noch die Lothe NBO und BM, so ist

$$BN = x,$$
$$AB = y,$$
$$BM = z.$$

Ferner ziehe ich noch durch den Körper die beliebige in der Ebene $ZGTR$ liegende Axe GH, auf dieselbe das Loth BC, hierauf die Lothe CF und CL, und verlängere MB nach D.

Hierauf setze ich:

$$AC = r,$$
$$GC = \varepsilon,$$
$$\angle ACB = w,$$
$$\angle CGL = \alpha:$$

so hat man:

$$BC = r\cos w,$$
$$AB = r\sin w,$$
$$CD = r\cos w\sin\alpha,$$
$$BD = r\cos w\cos\alpha,$$
$$GL = \varepsilon\cos\alpha,$$
$$CL = \varepsilon\sin\alpha;$$

und hieraus folgt für die Coordinaten des Atoms A:

$$x = \varepsilon\cos\alpha + r\cos w\sin\alpha,$$
$$y = r\sin w,$$
$$z = \varepsilon\sin\alpha - r\cos w\cos\alpha.$$

Durch die Rotation entsteht eine von der Rotationsaxe ab gehende Centrifugalkraft, und denken wir uns dieselbe jedem Atom eingeprägt, so können wir den Körper, wenn und wofern er eine gegen die Rotationsaxe unabänderliche Lage angenommen hat, als im Gleichgewicht befindlich betrachten, indem sich dessen von der Rotation abhängige Lage im Raume, wegen der constant vorausgesetzten Rotationsgeschwindigkeit, leicht angeben lässt.

Bezeichnen wir diese Geschwindigkeit mit s, so ist die Centrifugalkraft des Atoms A

$$= s^2 . AO \text{ nach der Richtung } OA.$$

Lassen wir r um dr, w um dw und ε um $d\varepsilon$ wachsen, so kann man, wenn die Dichtigkeit des Körpers mit ϱ bezeichnet wird, die Masse des Atoms ausdrücken durch

$$\varrho r dr d\varepsilon dw.$$

Es ist demnach die Grösse der Bewegung desselben nach der Richtung OA gleich

$$\varrho s^2 r dr\, d\varepsilon dw . AO.$$

Zerlegen wir diese Kraft in ihre Composanten nach den Axen x, y und z, so haben wir

$$\text{die parallel mit } x \text{ wirkende Kraft} = -\varrho s^2 r dr d\varepsilon dw . \cos AOB$$
$$= -\varrho s^2 r dr d\varepsilon dw (E - \varepsilon\cos\alpha - r\sin\alpha\cos w),$$

die parallel mit y wirkende Kraft $= -\varrho s r^2 dr ds dw \sin w$,

„ „ „ z „ „ $=$ Null.

Dagegen wirkt parallel mit der Axe der z die Schwere g, folglich ist die mit z parallel laufende Grösse der Bewegung

$$= -g\varrho r dr ds dw .$$

Endlich setzen wir noch den Druck, der in G auf den Körper ausgeübt wird, parallel mit x, y und z, gleich u, v und w, während die Coordinaten dieses Punktes alle gleich Null sind.

Somit gestalten sich die sechs Bedingungen des Gleichgewichts, wie folgt:

Für die den Coordinaten parallelen Kräfte:

$$1) \quad u - \varrho s^2 \iiint r dr ds dw (E - s\cos\alpha - r \sin\alpha \cos w) = 0,$$

$$2) \quad v - \varrho s^2 \iiint r^2 dr ds dw \sin w = 0,$$

$$3) \quad w - g\varrho \iiint r dr ds dw = 0.$$

Für die Momente:

$$4) \quad \varrho s^2 \iiint r^2 dr ds dw \sin w (s\cos\alpha + r\cos w \sin\alpha)$$
$$- \varrho s^2 \iiint r^2 dr ds dw \sin w (E - s\cos\alpha - r\sin\alpha\cos w) = 0,$$

$$5) \quad g\varrho \iiint r dr ds dw (s\cos\alpha + r\cos w \sin\alpha)$$
$$- \varrho s^2 \iiint r dr ds dw (s\sin\alpha - r\cos w\cos\alpha)(E - s\cos\alpha - r\sin\alpha\cos w) = 0,$$

$$6) \quad g\varrho \iiint r^2 dr ds dw \sin w$$
$$- \varrho s^2 \iiint r^2 dr ds dw \sin w (s\sin\alpha - r\cos w\cos\alpha) = 0.$$

Nehmen wir als einziges Beispiel eine cylindrische Stange, deren Axe mit GH zusammenfällt, so sind die Integrale, wenn die Länge der Stange $= l$ und der Halbmesser $= R$, in Beziehung auf s zwischen den Grenzen $s = 0$ und $s = l$, in Beziehung auf r zwischen $r = 0$ und $r = R$, und in Beziehung auf w zwischen $w = 0$ und $w = 2\pi$ zu nehmen, so dass alle Integrationen, selbst in ihren Grenzen, von einander unabhängig sind.

Man hat aber, zwischen den Grenzen $w=0$ und $w=2\pi$:

$$\int dw \cos w = \sin w = 0,$$

$$\int dw \sin w = -\cos w = 0,$$

$$\int dw \sin w \cos w = -\frac{1}{4}\cos 2w = 0,$$

$$\int dw \cos w^2 = \frac{1}{4}\sin 2w + \frac{1}{2}w = \pi.$$

Man wird daher alle Differentiale, in welchen sinus und cosinus von w und deren Produkte zum Vorschein kommen, weglassen und nur $\cos w^2$ beibehalten. Mittelst dieser Bemerkung wird man bald haben:

$$7) \qquad u = \varrho s^2 R^2 \pi l \left(E - \frac{1}{2} l \cos\alpha\right),$$

$$v = 0,$$

$$8) \qquad w = g\varrho R^2 \pi l = \text{dem Gewicht der Stange.}$$

Die Gleichungen 4) und 6) aber werden identisch Null, während 5) liefert:

$$9) \qquad 6gl\cos\alpha - 6Es^2 l\sin\alpha + s^2 \sin\alpha\cos\alpha(4l^2 - 3R^2) = 0,$$

welche zur Bestimmung von α dient.

Für den Fall, dass man nur eine materielle Linie im Auge hat, kann für 7) und 8) R nicht gleich Null sein, weil die Linie in diesem Falle die wirklich mathematische Linie wäre. Allein $\varrho R^2\pi$ ist gleich der Masse der Längeneinheit, die wir für die materielle Linie $= m$ setzen.

Hingegen muss in 9) wirklich $R=0$ sein, weil auch bei der materiellen Linie R gegen l verschwindet. So haben wir also für die materielle Linie, wenn wir deren Länge $= l'$ setzen:

$$10) \qquad u = ms^2 l'\left(E - \frac{1}{2} l' \cos\alpha\right),$$

$$11) \qquad w = mgl',$$

$$12) \qquad 3g\cos\alpha - 3Es^2 \sin\alpha + 2l' s^2 \sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Betrachten wir aber den Fall, wo es sich um einen auf einer steifen mathematischen Linie sitzenden Atom m handelt, so haben wir bloss nöthig, die zwei rechten Seiten von 10) und 11) in Beziehung auf l' zu differentiiren, und dl' mit m sich verschmelzen zu lassen; hingegen 12), welche bereits mit l'^2 weg-

dividirt worden ist, wieder mit l^2 zu multipliciren, und hierauf ebenfalls in Beziehung auf l' zu differentiiren. Auf solche Weise haben wir, wenn die Länge der steifen Geraden $= l''$ ist:

$$13)\quad u = ms^2(E - l''\cos\alpha),$$

$$14)\quad w = mg,$$

$$15)\quad g\cos\alpha - Es^2\sin\alpha + l''s^2\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Die aus u und w [13) und 14)] zusammengesetzte Resultante muss mit der Axe x den Winkel α machen. In der That, setzt man

$$\frac{w}{u} = \frac{g}{s^2(E - l''\cos\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha,$$

so entwickelt sich hieraus 15). Diese Bemerkung lässt sich weder für die cylindrische Stange, noch für die materielle Linie machen, denn dort würde jeder Atom für sich eine andere Gleichgewichts-Lage annehmen. Jeder Atom stört, wegen des festen Zusammenhanges, den andern, und die Gesammtwirkung ist, dass die Axe GH eben den, durch 9) oder 12) bestimmten Winkel α mit der Axe x macht. Diess zeigt sich, wenn man l oder l' etwa um dl oder dl' wachsen lässt, und dabei zusieht, ob dadurch auch α einen Zuwachs erleidet. Differentiiren wir daher 9) und 12) in Beziehung auf α, l und l', so haben wir, wenn noch respective 9) und 12) selbst mit den entstandenen Differentialgleichungen verbunden wird:

$$d\alpha = dl\,\frac{s^2}{6l^2}\cdot\frac{\sin\alpha^2\cos\alpha^2(4l^2 + 3R^2)}{g\cos\alpha^3 + Es^2\sin\alpha^3}$$

und

$$d\alpha = dl'\,\frac{2s^2}{3}\cdot\frac{\sin\alpha^2\cos\alpha^2}{g\cos\alpha^3 + Es^2\sin\alpha^3}.$$

Diese Gleichungen liefern nur dann $d\alpha = 0$, wenn entweder $\sin\alpha = 0$ oder $\cos\alpha = 0$. Allein 9) und 12) können unmöglich diese Werthe geben, wenn nicht einer der Werthe g, l, E, s der Null gleich ist. Es erleidet demnach α für jeden Werth α, den die Gleichungen 9) und 12) darbieten, einen Zuwachs, wofern l oder l' einen solchen erfahren.

Sehen wir jetzt zu, unter welchen Bedingungen unsere drei Fälle gleiche Neigungswinkel α liefern. Dividiren wir 9) mit $6l$ und 12) mit 3, und vergleichen hierauf die entstandenen Gleichungen mit 15), so geben 9), 12) und 15) denselben Winkel α, wenn man hat:

$$16)\quad l'' = \frac{4l^2 - 3R^2}{6l} = \frac{2}{3}l - \frac{1}{2}\frac{R^2}{l}$$

und

$$17) \qquad l'' = \frac{2}{3} l'.$$

Da nun l'' sich kleiner ausweist als l und als l', so folgt daraus, dass sich sowohl in der Axe der cylindrischen Stange, als auch in der materiellen Linie ein Punkt befindet, der von der Wirkung der übrigen Atome des Systems keine Störung erleidet, und man könnte ihn, in Beziehung auf dieses System, den Rotations-Mittelpunkt nennen. Seine Entfernung vom Punkte G wird durch die Gleichungen 16) und 17) angegeben.

Stellen wir nun eine Untersuchung an über die Anzahl der Gleichgewichtslagen, so ist vorerst zu bemerken, dass man den Gleichungen 9), 12) und 15) folgende Form zu geben im Stande ist:

$$18) \qquad p - q \operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha = 0.$$

Da nun

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}\alpha^2}},$$

so entwickelt sich die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\alpha^4 - 2\frac{p}{q}\operatorname{tg}\alpha^3 + \left(\frac{p^2+q^2-1}{q^2}\right)\operatorname{tg}\alpha^2 - 2\frac{p}{q}\operatorname{tg}\alpha + \frac{p^2}{q^2} = 0.$$

Diese Gleichung kann höchstens vier Werthe für $\operatorname{tg}\alpha$ liefern, und da jeder Werth von $\operatorname{tg}\alpha$ zwei Werthe für α darbietet, so scheinen sich acht Gleichgewichtslagen herauszustellen. Diese Verdopplung rührt jedoch von der Quadratur der Gleichung 18) her, und wenn man die vier Werthe für $\operatorname{tg}\alpha$ oder die acht Werthe für α aufgefunden hat, wird man sie jedesmal noch vermittelst der Gleichung 18) prüfen, wodurch sich vier als unbrauchbar zeigen werden. Jedoch gibt die Gleichung des vierten Grades für $\operatorname{tg}\alpha$ nicht unbedingt vier Werthe, sie kann auch weniger liefern, und wir könnten nun aus derselben die Bedingungen aufsuchen, unter denen nur drei, zwei und vielleicht auch nur eine oder gar keine Gleichgewichtslage existiren würde. — Alles dieses ergibt sich jedoch vollständiger und weit einfacher aus der unmittelbaren Betrachtung der Gleichung 18). Zu diesem Behufe setzen wir die vordere Seite dieser Gleichung $= u$ und unterscheiden aber die vier Fälle, in denen α einen Winkel im Umfang des ersten, zweiten, dritten und vierten Quadranten bezeichnet. Wir erhalten somit:

für	den	1sten	Quadranten	$u = p - q\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha$,
„	„	2ten	„	$u = p + q\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha$,
„	„	3ten	„	$u = p - q\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha$,
„	„	4ten	„	$u = p + q\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha$.

Indem wir uns nun α von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 2\pi$ wachsend denken,

stellen wir u für jeden Quadranten in dessen Grenzen dar, und bezeichnen diese Grenzwerthe durch

$$u_0,\ u_{\frac{1}{2}\pi},\ u_\pi,\ u_{\frac{3}{2}\pi},\ u_{2\pi}.$$

Es ergibt sich nun für den ersten Quadranten:

$$u_0=p,$$
$$u_{\frac{1}{2}\pi}=-\infty.$$

Es geht demnach u im ersten Quadranten durch Null und zwar nur einmal; denn sobald $q\,\mathrm{tg}\alpha$ grösser geworden ist als $p+\sin\alpha$, wächst dasselbe fortwährend und sehr rasch bis auf ∞.

Für den zweiten Quadranten ist:

$$u_{\frac{1}{2}\pi}=\infty,$$
$$u_\pi=p.$$

Also geht u in diesem Quadranten nicht durch Null, weil es auch im Zwischenraum nie negativ wird.

Für den dritten Quadranten ist:

$$u_\pi=p,$$
$$u_{\frac{3}{2}\pi}=-\infty.$$

Demnach geht hier u durch Null, und zwar, wie im ersten Quadranten, nur einmal.

Endlich ist für den vierten Quadranten:

$$u_{\frac{3}{2}\pi}=\infty,$$
$$u_{2\pi}=p.$$

Allein hier ist keine absolute Unmöglichkeit, dass im Zwischenraum u nicht negativ würde. Um diese Frage zu entscheiden, suchen wir (für den 4ten Quadranten) das Maximum und Minimum von u auf. Wir haben:

$$\partial u_\alpha=\frac{q}{\cos\alpha^2}-\cos\alpha=0,$$

woraus

$$\cos\alpha=q^{\frac{1}{3}}.$$

Soll ein Max. Min. stattfinden, so muss demnach nothwendig $q<1$ sein. Setzt man aber den Werth $\cos\alpha=q^{\frac{1}{3}}$ in u, so folgt:

$$u=p-(1-q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Ist nun die Grösse $p-(1-q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ positiv, so geht u nicht durch Null; ist es aber negativ, so liefert die Gleichung 18) zwei neue Werthe für α, aber auch nicht mehr als zwei, weil

$$p-(1-q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

nur Einen Werth haben kann. Ist aber

$$p-(1-q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}=0,$$

so zeigt diess nur Einen weitern Werth für α an. Fassen wir das Resultat der ganzen Untersuchung zusammen, so haben wir:

a) der erste Quadrant enthält unbedingt eine Gleichgewichtslage;

b) der zweite gar keine;

c) der dritte unbedingt eine;

d) der vierte eine, wenn $p^2=(1-q^{\frac{2}{3}})^3$ und zugleich $q<1$;

„ „ zwei, wenn $p^2<(1-q^{\frac{2}{3}})^3$ „ „ $q<1$;

„ „ keine, wenn $p^2>(1-q^{\frac{2}{3}})^3$, obschon auch wäre $q<1$;

„ „ jedenfalls gar keine, wenn $q>1$.

Ersetzen wir p und q durch ihre Werthe, so verwandeln sich die Bedingungen

$$p^2<=>(1-q^{\frac{2}{3}})^3 \text{ und } q<>1$$

für die Gleichung

9) in $36g^2l^2<=>s^4[(4l^2-3R^2)^{\frac{2}{3}}-(6El)^{\frac{2}{3}}]$ und $6El<>4l^2-3R^2$;

12) in $9g^2<=>s^4[(2l')^{\frac{2}{3}}-(3E)^{\frac{2}{3}}]^3$ und $3E<>2l'$;

15) in $g^2<=>s^4[l''^{\frac{2}{3}}-E^{\frac{2}{3}}]^3$ und $E<>l''$.

Was die wirkliche Aufsuchung der Werthe von α betrifft, so dient die seitherige Betrachtung sehr zur Erleichterung, und es ist vortheilhafter, sich, statt der Gleichung des vierten Grades zwischen $\operatorname{tg}\alpha$, der Gleichung 18) zu bedienen. Da man weiss, in welchen Quadranten diese Werthe zu suchen sind, wird man bald einen α' haben, welcher der 18) beinahe genügt. Hierauf wird man denselben verbessern vermittelst des Werthes

$$h=\cos\alpha^2\left(\frac{p-q\operatorname{tg}\alpha'+\sin\alpha'}{q-\cos\alpha'^3}\right).$$

Für die Aufsuchung der Werthe des vierten Quadranten ist es, wofern sie existiren und wofern

$$u=p-(1-q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

ziemlich klein ist, immer vortheilhaft, als ersten Näherungswerth $\cos\alpha' = q^{\frac{1}{3}}$ zu nehmen. Denkt man sich hierauf für α' einen Zuwachs h, so wird man nach dem Taylor'schen Lehrsatz die Gleichung

$$p - q\,\mathrm{tg}(\alpha' + h) + \sin(\alpha' + h) = 0$$

nach Potenzen von h entwickeln, und zunächst erhalten:

$$p - q\,\mathrm{tg}\alpha' + \sin\alpha' + h\left(\cos\alpha' - \frac{q}{\cos\alpha'^2}\right) - \frac{h^2}{2}\left(\frac{2q}{\cos\alpha'^3} + 1\right)\sin\alpha' = 0,$$

wenn man sich mit der zweiten Potenz von h begnügen will. Hier ist aber der Coefficient von h gleich Null, und ersetzt man $\cos\alpha'^3$ durch q, so kommt

$$h = \pm\sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{p - q\,\mathrm{tg}\alpha' + \sin\alpha'}{\sin\alpha'}}.$$

Der eine dieser Werthe bietet die Correction für den einen und der andere für den anderen Werth von α' dar. Uebrigens ist man im Stande, die Aufgabe durch Construction, vermittelst eines Kreises und einer gleichseitigen Hyperbel, zu lösen.

Denken wir uns die Länge der cylindrischen Stange oder der materiellen Linie von Null an wachsend, so werden die Endpunkte aller dieser Längen, das System stets im Gleichgewicht gedacht, eine Curve darstellen. Das Gleiche wird der Fall sein, wenn wir statt obiger Endpunkte die Schwingungsmittelpunkte nehmen. Für den Schwingungsmittelpunkt gehen aber die Gleichungen 9) und 12) in 15) über und diese ist es, welche die von allen Schwingungsmittelpunkten beschriebene Curve darstellt, indem l'' als Radius-Vector angesehen wird. Gehen wir über auf rechtwinklige Coordinaten, so haben wir zu setzen:

$$\sin\alpha = \frac{y}{l''} \text{ und } \cos\alpha = \frac{x}{l''}$$

und haben

$$gx - E\varepsilon^2 y + \varepsilon^2 xy = 0.$$

Den Coordinaten-Anfang verlegen wir in einen andern Punkt, und setzen zu dem Ende:

$$x = a + x',$$
$$y = b + y';$$

wodurch wir erhalten:

$$(ga + \varepsilon^2 ab - bE\varepsilon^2) + (g + \varepsilon^2 b)x + \varepsilon^2(a - E)y + \varepsilon^2 xy = 0.$$

Setzen wir $a = E$ und

$$b = -\frac{g}{s^2},$$

so wird

$$y.x = \frac{Eg}{s^2},$$

welches eine gleichseitige Hyperbel anzeigt, deren rechtwinklige Coordinaten zugleich ihre Asymptoten sind; und zwar ist die eine Asymptote die Drehungsaxe RT, während die andere unterhalb und parallel mit GX um die Grösse $\frac{g}{s^2}$ liegt.

Will man daher diese Aufgabe durch Construction lösen, so wird man vorerst zwischen den angegebenen Asymptoten und vermittelst der Gleichung $y.x = \frac{Eg}{s^2}$ eine Hyperbel construiren und hierauf von G aus als Mittelpunkt einen Kreis beschreiben mit dem Halbmesser

$$l'' = \frac{4l^2 - 3R^2}{6l} \quad \text{oder} \quad l'' = \frac{2}{3}l'.$$

Die Punkte, in denen der Kreis die Hyperbel schneidet, werden die Gleichgewichtslagen angeben. — Daraus folgt wieder, dass es nie weniger als zwei, und nie mehr als vier Gleichgewichtslagen geben kann. Auch lassen sich hier noch leichter die übrigen obigen Folgerungen entwickeln.

Die Frage über das stabile und nicht stabile Gleichgewicht der verschiedenen Lagen entscheidet sich, wenn wir die Untersuchung nur für den Rotationsmittelpunkt anstellen. Ist nun dieser Mittelpunkt, den wir uns um einen sehr kleinen Winkel ξ aus dem Gleichgewicht gerückt denken, der Punkt C, so wirkt auf denselben nach der Richtung CL die Schwere g und nach der Richtung FC die Centrifugalkraft

$$s^2 . FC = s^2(E - l'' \cos\alpha).$$

Zerlegen wir beide Kräfte nach der Richtung CB, so haben wir für die auf C wirkende Kraft (nach dieser Richtung)

$$g \cos\alpha - s^2(E - l'' \cos\alpha) \sin\alpha.$$

Folglich nach den Gesetzen der Dynamik:

$$l'' d^2\xi + g \cos\alpha - s^2(E - l'' \cos\alpha) \sin\alpha = 0,$$

wo das Differential in Beziehung auf die Zeit t genommen ist. Ist nun α' der für das Gleichgewicht gefundene Winkel, so haben wir

$$\alpha' + \xi = \alpha.$$

Wir können daher die obige Gleichung nach Potenzen von ξ entwickeln, und wenn wir annehmen, dass ξ eine sehr kleine Grösse nie überschreitet, alle höhern Potenzen vernachlässigen. Auf solche Weise haben wir, bedenkend dass nach 15)

$$g\cos\alpha' - s^2(E - l''\cos\alpha')\sin\alpha' = 0,$$

$$l''d^2\xi + \xi[l''s^2(\cos\alpha'^2 - \sin\alpha'^2) - Es^2\cos\alpha' - g\sin\alpha'] = 0;$$

und, wenn wir vermittelst 15) $l''s^2$ eliminiren und

$$-\frac{g\cos\alpha'^3 + Es^2\sin\alpha'^3}{l''\sin\alpha'\cos\alpha'} = A$$

setzen,

$$d^2\xi + A\xi = 0,$$

wovon das Integral ist:

$$\xi = C\sin(t\sqrt{A}) + C_1\cos(t\sqrt{A}).$$

Da ξ der Voraussetzung gemäss sehr klein ist und bleibt, so müssen es auch C und C_1 sein. Diese Voraussetzung rechtfertigt sich nicht, und ξ kann zu einer bedeutenden Grösse anwachsen, d. h. das Gleichgewicht ist nicht stabil, wenn A eine negative Grösse repräsentirt, weil in diesem Falle die trigonometrischen Grössen in Exponentialgrössen übergehen.

Die Gleichung

$$A = -\frac{g\cos\alpha'^3 + Es^2\sin\alpha'^3}{l''\sin\alpha'\cos\alpha'}$$

zeigt aber für den ersten Quadranten eine negative Grösse, folglich ist hier keine Stabilität anzutreffen. Hingegen ist A für den dritten Quadranten positiv, woselbst also eine stabile Lage ist. Im vierten Quadranten aber hat man

$$A = \frac{g\cos\alpha'^3 - Es^2\sin\alpha'^3}{l''\sin\alpha'\cos\alpha'}.$$

Stabilität ist demnach vorhanden, wenn

$$\operatorname{tg}\alpha'^3 - \frac{g}{Es^2} < 0.$$

Verwandeln wir nun 15) in

$$\frac{g}{Es^2} + \operatorname{tg}\alpha' - \frac{l''}{E}\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha'^2}} = 0$$

und eliminiren aus dieser und aus

$$\operatorname{tg}\alpha'^3 - \frac{g}{Es^2} < 0$$

die $\operatorname{tg}\alpha'$, so führt uns diess auf

$$g^2 < s^4 (l'^{\frac{2}{3}} - E^{\frac{2}{3}})^3,$$

und gerade diess ist die Bedingung, unter welcher für den vierten Quadranten zwei Gleichgewichtslagen existiren. Daraus folgt, dass beide dieser Lagen stabil sind.

Da nun die oben dargestellte Hyperbel ihre convexe Seite der Umdrehungsaxe zuwendet, so folgt daraus, dass sich die untern Theile der rotirenden Stange von ihrer eigenen Gleichgewichtslage so entfernt haben, dass sie von der Axe abgewendet sind. Da ferner z. B. im ersten Quadranten kein stabiles Gleichgewicht statt findet, so haben jene Theile das Bestreben, sich von der Axe noch mehr zu entfernen, woraus sich das eigenthümliche Gefühl erklärt, das die Kunstreiter in ihren Füssen haben, deren Muskeln von einer Kraft nach Aussen gezogen werden.

XXII.

Elementare Darstellung der wichtigsten Eigenschaften der gemeinen Cycloide.

(Rectification und Quadratur derselben).

Von

Herrn Professor Dr. Schulz-Strasznitzki

am k. k. polytechnischen Institut zu Wien.

Denken wir uns in Taf. III. Fig. 9. das regelmässige Zwölfeck $OABCDEF5432Q_1O$ auf der Geraden OQ_6 gewälzt, so dass die Punkte 2, 3, 4, 5, F nach und nach in die Lage $Q_2 Q_3 Q_4 Q_5 Q_6$ kommen. Betrachten wir während dieser Bewegung die aufeinanderfolgenden Oerter, die der Punkt O einnimmt, nemlich die Punkte $M_1 M_2 M_3 M_4 M_5$, verbinden wir diese Punkte durch die Geraden OM_1, M_1M_2, M_2M_3 u. s. w., denken wir uns zugleich ein zweites regelmässiges Zwölfeck congruent mit ersterm, nemlich OQ_1N_1J, denken wir uns dieses auf der Geraden $JN_5 \parallel OQ_6$ fortgewälzt, so wird bei dieser Bewegung der Punkt N_1 nach und nach in die Lagen $N_2N_3N_4N_5$ kommen; denken wir uns auch diese Punkte durch gerade Linien verbunden. Wenn wir uns statt dieser Zwölfecke zwei 24Ecke, 48Ecke, 96Ecke u. s. w. denken, so wird sowohl die gebrochene Linie $OM_1M_2M_3M_4M_5$ als die $ON_1N_2N_3N_4N_5$ sich immer mehr und mehr der Cycloide nähern. Bezeichnen wir nun die Seite des Zwölfecks durch s_1; die Sehne von $\frac{2}{12}$ des Kreises d. i. z. B. BO durch s_2; die Sehne von $\frac{3}{12}$ des Kreises z. B. CO durch S_3 u. s. w.; so hat man:

$$M_1N_1 = 2s_1;\quad ON = s_2;$$
$$M_2N_2 = 2s_2;\quad M_1N_2 = s_1 + s_3;$$
$$M_3N_3 = 2s_3;\quad M_2N_2 = s_2 + s_4.$$

$M_4N_4 = 2s_4$; $M_3N_4 = s_3 + s_5$;
$M_5N_5 = 2s_3$; $M_4N_5 = s_4 + s_6$.

Es sieht sich nun leicht ein, dass, je mehr Seiten das sich wälzende Vieleck hat, um so mehr nähern sich ON_1 und M_1N_1; M_1N_2 und M_2N_2; M_2N_3 und M_3N_3 u. s. w., woraus von selbst folgt, dass die Krümmungsmittelpunkte der oberen Cycloide eine verkehrt stehende untere Cycloide bilden, dass ferner die Krümmungshalbmesser der obern Tangenten der untern sind.

Es lässt sich ferner leicht zeigen, dass die Figur $OJN_5N_4N_3N_2N_1O$ mit $M_5Q_5OM_1M_2M_3M_4M_5$ und eben so $OQ_5N_5N_4N_3N_2N_1O$ mit $M_5EOM_1M_2M_3M_4M_5$ congruent ist.

Da nun $OQ_1 = AO = s_1$, $Q_1N_1 = AB = s_1$, $ON_1 = BO = s_2$ ist; so folgt $\Delta\, OQ_1N_1 \cong \Delta\, ABO$;

$Q_1Q_2 = BC$, $Q_2N_2 = BO$; $Q_1N_2 = CO$; $\Delta\, Q_1Q_2N_2 \cong \Delta\, BOC$;
$Q_2Q_3 = CD$, $Q_3N_3 = CO$; $Q_2N_3 = DO$; $\Delta\, Q_2Q_3N_3 \cong \Delta\, COD$;
$Q_3Q_4 = DE$, $Q_4N_4 = DO$; $Q_3N_4 = EO$; $\Delta\, Q_3Q_4N_4 \cong \Delta\, DOE$;
$Q_4Q_5 = EF$, $Q_5N_5 = EO$; $Q_4N_5 = FO$; $\Delta\, Q_4Q_5N_5 \cong \Delta\, EOF$.

Die Addition der letzten Gleichungen giebt:

$$OQ_5N_5N_4N_3N_2N_1O = OABCDEF = \text{halbem Polygone.}$$

Da nun diese Betrachtungen gelten, das Polygon mag noch so viele Seiten haben, so gelten sie auch für den Kreis. Wird also ON_5 eine Cycloide, so ist OQ_5N_5 gleich dem halben Erzeugungskreise, dann wird OQ_5 gleich dem halben Umfang des Erzeugungskreises, mit dem Q_5Q_6 unendlich klein wird, daher das Rechteck $OJQ_5N_5 =$ 2fachem Erzeugungskreise, daher $OJN_5 = \frac{3}{2}$ des Erzeugungskreises.

Wir haben ferner:

$$\begin{aligned}
ON_1 &= s_2 && = s_2 \\
N_1N_2 &= Q_1N_2 - Q_1N_1 && = s_3 - s_1 \\
N_2N_3 &= Q_2N_3 - Q_2N_2 && = s_4 - s_2 \\
N_3N_4 &= Q_3N_4 - Q_3N_3 && = s_5 - s_3 \\
N_4N_5 &= Q_4N_5 - Q_4N_4 && = s_6 - s_4
\end{aligned}$$

; daher.

$$ON_1 + N_1N_2 + N_2N_3 + N_3N_4 + N_4N_5 = s_6 + s_5 - s_1$$

d. h. die gebrochene Linie $ON_5 = OF + OE - AO =$ Durchmesser des umschriebenen, mehr Durchmesser des eingeschriebenen Kreises, weniger einer Seite des Vielecks. Da nun diese Betrachtungen gelten, das Vieleck mag Seiten haben in was immer für einer Anzahl, so gilt das Vorhergehende auch für den Kreis.

Hier werden aber Durchmesser des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Kreises einander gleich, und die Seite verschwindend klein, daher die Länge von ON_5 oder die halbe Cycloide = doppeltem Durchmesser = 4fachem Halbmesser des Erzeugungskreises.

Ich glaube das Vorhergehende kann mit als Beweis dienen, dass so viele Wahrheiten der höhern Mathematik auf entsprechende Art einem grösseren Publikum zugänglich gemacht werden können. Die Anforderungen der Gegenwart an die Lehrer der Mathematik an technischen Anstalten geben derlei Untersuchungen einen Werth.

XXIII.

Ueber die Transformation rechtwinkliger Coordinaten im Raume.

Von

Herrn R. Wolf,

Lehrer der Mathematik zu Bern.

Bekanntlich ist die Transformation rechtwinkliger Coordinaten im Raume auf andere rechtwinklige Coordinaten desselben Anfangspunktes von vielfacher Anwendung, und die entsprechenden Formeln finden daher in jedem Werke über analytische Geometrie mit drei Dimensionen ihre Ableitung. Für denjenigen Fall, wo der Winkel der Ebenen XY und die Winkel der Axen X mit ihrer Knotenlinie in die Rechnung eingeführt werden sollen, werden dabei entweder die Beziehungen am Raumdreiecke zu Hülfe gerufen, oder dann wird das eine Coordinatensystem durch verschiedene aufeinander folgende Drehungen um die Axen nach und nach in das andere Coordinatensystem übergeführt. Die folgende Ableitung scheint mir beiden angeführten Weisen und namentlich der am häufigsten angewandten zweiten Ableitungsmethode ihrer

grössern Uebersichtlichkeit wegen vorzuziehen. Aus Taf. IV. Fig. 1., welche wohl keiner weitern Erläuterung bedürfen wird, lassen sich unmittelbar die Beziehungen

$$x' = u\,\mathrm{Cos}\varphi + t\,\mathrm{Sin}\varphi, \qquad y' = u\,\mathrm{Sin}\varphi - t\,\mathrm{Cos}\varphi$$
$$z' = z\,\mathrm{Cos}\theta + s\,\mathrm{Sin}\,\theta, \qquad t = z\,\mathrm{Sin}\,\theta - s\,\mathrm{Cos}\theta$$
$$u = x\,\mathrm{Cos}\psi + y\,\mathrm{Sin}\psi, \qquad s = y\,\mathrm{Cos}\psi - x\,\mathrm{Sin}\psi$$

abschreiben, und aus diesen folgen durch Elimination von s, t, u sofort die verlangten Transformationsformeln:

$$x' = (\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\psi + \mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Sin}\psi\,\mathrm{Cos}\theta)\,x$$
$$+ (\mathrm{Sin}\psi\,\mathrm{Cos}\varphi - \mathrm{Cos}\psi\,\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\theta)\,y + \mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Sin}\varphi.z,$$
$$y' = (\mathrm{Cos}\psi\,\mathrm{Sin}\varphi - \mathrm{Sin}\psi\,\mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\theta)\,x$$
$$+ (\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Sin}\psi + \mathrm{Cos}\varphi\,\mathrm{Cos}\psi\,\mathrm{Cos}\theta)\,y - \mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\varphi.z,$$
$$z' = -\mathrm{Sin}\psi\,\mathrm{Sin}\theta.x + \mathrm{Cos}\psi\,\mathrm{Sin}\theta.y + \mathrm{Cos}\theta.z;$$

aus denen sich theils unmittelbar, theils durch Vergleichung mit den aus der Projectionslehre hervorgehenden, die neun Winkel der Axen enthaltenden Transformationsformeln, die bekannten Bedeutungen und Eigenschaften der neun Coëfficienten auf die leichteste Weise ergeben.

XXIV.

Ueber die Relation zwischen den neun Cosinus, durch welche die gegenseitige Lage zweier rechtwinkliger Coordinaten-Systeme bestimmt wird.

Von
Herrn L. Schläfli,
Privatdocenten der Mathematik zu Bern.

Wenn wir die Coordinaten eines beliebigen Punktes P in Beziehung auf das erste System mit x, y, z und in Beziehung auf das zweite mit x', y', z' bezeichnen und vorerst nur die Ebenen xy und $x'y'$, deren Durchschnitt oder die Knotenlinie und die Lage der positiven Hälften der Axen der x und x' in der Anschauung behalten, so sehen wir sogleich ein, dass die Lage des zweiten Systems gegen das erste durch drei Grössen vollständig bestimmt wird. Diese sind 1°. der Winkel zwischen der Axe der x und der Linie des aufsteigenden Knotens oder die Länge des aufsteigenden Knotens in der Ebene xy; 2°. die Neigung der Ebene $x'y'$ gegen die Ebene xy; 3°. der Winkel zwischen der Knotenlinie und der Axe der x'. Mittelst dieser drei Grössen können die Cosinus der neun Winkel, unter denen die Axen des zweiten Systems gegen diejenigen des ersten geneigt sind, trigonometrisch angegeben werden; und aus diesen trigonometrischen Ausdrücken ergeben sich sodann durch einfache Rechnung die bekannten 21 Relationen zwischen den neun Cosinus. Mein Freund, Herr Wolf, der bei seinem Verfahren der Transformation der Coordinaten diesen Weg eingeschlagen hat und ohne successiver Operationen zu bedürfen an einer einzigen Figur alle drei Transformationsformeln nachweist, hat mir nun durch Mittheilung seiner Methode Veranlassung gegeben, denselben Gegenstand auch von

der rein analytischen Seite, wo er mit der Theorie der Elimination bei linearen Gleichungen im Zusammenhange steht, darzustellen.

Wenn nämlich die trigonometrische Behandlung den Vortheil gewährt, dass bei derselben gerade nur so viele Grössen gebraucht werden als die Natur des Gegenstandes erfordert, so thut sie dieses nur auf Kosten der Symmetrie, insofern es ihr nicht gelingt, drei unter sich unabhängige Grössen aufzufinden, durch welche die oft erwähnten neun Cosinus sich sämmtlich auf gleichmässige Weise ausdrücken liessen. Um diesen Uebelstand fühlbar zu machen, brauche ich nur darauf hinzuweisen, dass die Axen der z und z' anders als die übrigen Axen behandelt werden. Will man dagegen die Symmetrie nicht verlieren, so muss man es aufgeben, in den Formeln die drei unabhängigen Grössen explicite vor sich zu haben.

Ich setze folgende zwei Sätze als bekannt voraus:

1°. Wenn a, b, c die Cosinus der drei Winkel sind, welche irgend eine Gerade mit den drei Coordinatenaxen bildet, so ist

$$a^2+b^2+c^2=1.$$

2°. Wenn zwei Gerade mit den Coordinatenaxen resp. Winkel bilden, deren Cosinus a, b, c; a', b', c' sind, so ist der Cosinus des von beiden Geraden eingeschlossenen Winkels

$$=aa'+bb'+cc' \text{*)}.$$

Nun seien a, b, c die Cosinus der drei Winkel, welche die Axe der x' mit den Axen der x, y, z bildet, und ebenso seien die Richtungen der Axen der y', z' in Beziehung auf die Axen des ersten Systems durch die Cosinus a', b', c'; a'', b'', c'' bestimmt, so dass man durch Projection der aus den neuen Coordinaten x', y', z' zusammengesetzten gebrochenen Linie auf die drei ursprünglichen Coordinatenaxen die Transformationsformeln

$$\left.\begin{aligned} x&=ax'+a'y'+a''z' \\ y&=bx'+b'y'+b''z' \\ z&=cx'+c'y'+c''z' \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

erhält. Vermöge des ersten vorhin angeführten Satzes hat man dann die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=1, \\ a'^2+b'^2+c'^2&=1, \\ a''^2+b''^2+c''^2&=1; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

---

*) Von eben so häufiger Anwendung als diese beiden Sätze ist dieser dritte: Wenn x, y, z; x', y', z' die Projectionen zweier begränzten Geraden sind, so sind $yz'-y'z$, $zx'-z'x$, $xy'-x'y$ die Projectionen des von denselben gebildeten Parallelogramms auf die drei Coordinatenebenen.

und vermöge des zweiten, da die drei Axen der x', y', z' sich rechtwinklig schneiden sollen,

$$\left.\begin{aligned} a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0, \\ a''a + b''b + c''c &= 0, \\ aa' + bb' + cc' &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

also im Ganzen 6 Bedingungsgleichungen zwischen 9 Grössen. Wenn nun keine dieser 6 Gleichungen eine nothwendige Folge der übrigen ist, so bleiben nur drei unabhängige Grössen, und sechs von den neun Cosinus sind jeweilen durch die drei übrigen bestimmt.

Da das erste Coordinatensystem ebenso auf das zweite bezogen werden kann, wie dieses auf jenes, so ist klar, dass die angeführten 6 Bedingungsgleichungen noch die 6 folgenden zur nothwendigen Folge haben müssen:

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \text{ etc.} \qquad bc + b'c' + b''c'' = 0, \text{ etc.}$$

Es entsteht daher die Aufgabe, dieses, was geometrisch a priori eingesehen wird, noch analytisch nachzuweisen.

Wenn man die drei Gleichungen (1) der Reihe nach mit a, b, c multiplicirt und addirt, so ergiebt sich unter Berücksichtigung der Relationen (2) und (3)

$$x' = ax + by + cz, \text{ etc.}$$

Durch das gewöhnliche Eliminationsverfahren ergiebt sich

$$x' = \frac{b'c'' - b''c'}{\Delta} x + \frac{c'a'' - c''a'}{\Delta} y + \frac{a'b'' - a''b'}{\Delta} z, \text{ etc.}$$

wo

$$\Delta = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c$$

die unter dem Namen der Determinante bekannte Function der neun Cosinus a, b, c, a' etc. ist, welche die Eigenschaft hat, durch jede Permutation zweier Buchstaben (oder auch zweier Accente) in ihren entgegengesetzten Werth überzugehen. Man hat also

$$\left.\begin{aligned} b'c'' - b''c' &= a\Delta, & c'a'' - c''a' &= b\Delta, & a'b'' - a''b' &= c\Delta, \\ b''c - bc'' &= a'\Delta, & c''a - ca'' &= b'\Delta, & a''b - ab'' &= c'\Delta, \\ bc' - b'c &= a''\Delta, & ca' - c'a &= b''\Delta, & ab' - a'b &= c''\Delta. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Quadrirt man die beiden Seiten jeder in der ersten Horizontalreihe enthaltenen Gleichung und addirt, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die identische Gleichung

$$(b'c'' - b''c')^2 + (c'a'' - c''a')^2 + (a'b'' - a''b')^2$$
$$= (a'^2 + b'^2 + c'^2)(a''^2 + b''^2 + c''^2) - (a'a'' + b'b'' + c'c'')^2$$

vermöge der Relationen (2) und (3)

$$1 = \Delta^2 \;. \quad (5)$$

Also ist entweder $\Delta = 1$ oder $\Delta = -1$. Nimmt man an, das zweite Coordinatensystem sei so beschaffen, dass, wenn die positiven Axen der x', y' mit den positiven Axen der x, y resp. zur Coincidenz gebracht werden, dann auch die positive Axe der z' mit der positiven Axe der z und nicht mit der negativen zusammenfalle, so dass gleichzeitig $a = b' = c'' = 1$ wird, während die sechs übrigen Cosinus verschwinden, so wird $\Delta = 1$.

Wenn wir nun die in der ersten Verticalreihe (4) enthaltenen Gleichungen resp. mit a, a', a'' multipliciren und addiren, so bekommen wir: $\Delta = (a^2 + a'^2 + a''^2)\Delta$, also

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \text{ etc.} \qquad (6)$$

Multipliciren wir dagegen dieselben Gleichungen mit b, b', b'' und addiren, so ergiebt sich $0 = (ab + a'b' + a''b'')\Delta$, also

$$ab + a'b' + a''b'' = 0, \text{ etc.} \qquad (7)$$

Hiemit sind diese sechs neuen Relationen (6) und (7) als nothwendige Folge der ursprünglichen (2) und (3) nachgewiesen.

Merkwürdiger Weise kommen, unbeschadet der Symmetrie, drei unabhängige Grössen ungezwungen zum Vorschein, sobald man die Differentialien der neun Cosinus a, b, c, a', etc. betrachtet.

Die Gleichungen (6) und (7) differentiirt geben

$$ada + a'da' + a''da'' = 0, \text{ etc.}$$

$$adb + a'db' + a''db'' = -(bda + b'da' + b''da''), \text{ etc.}$$

Man darf daher setzen

$$\left.\begin{aligned} pdt &= bdc + b'dc' + b''dc'' = -(cdb + c'db' + c''db'') \\ qdt &= cda + c'da' + c''da'' = -(adc + a'dc' + a''dc'') \\ rdt &= adb + a'db' + a''db'' = -(bda + b'da' + b''da'') \end{aligned}\right\} \quad (8).$$

wo dt das Zeitelement und p, q, r die drei neu eingeführten Unabhängigen bezeichnen. Aus den drei Gleichungen

$$ada + a'da' + a''da'' = 0,$$
$$bda + b'da' + b''da'' = -rdt,$$
$$cda + c'da' + c''da'' = qdt$$

ergiebt sich durch Elimination

$$\left.\begin{array}{l} \frac{da}{dt} = cq - br; \ \frac{da}{dt} = c'q - b'r, \ \frac{da}{dt} = c''q - b''r, \\ \text{ebenso} \quad \frac{db}{dt} = ar - cp, \text{ etc.} \\ \frac{dc}{dt} = bp - aq, \text{ etc.} \end{array}\right\} \quad (9)$$

Denkt man sich nun einen Punkt P, der seine Lage gegen das zweite Coordinatensystem nicht ändert, für den also x', y', z' constant bleiben, während dieses zweite Coordinatensystem selbst sich beliebig um seinen festen Ursprung herumdreht und dadurch seine Lage gegen das feststehende erste Coordinatensystem fortwährend verändert, und betrachtet dann die momentane Bewegung des Punktes P in Beziehung auf dieses erste Coordinatensystem, so geben die differentiirten Gleichungen (1), wenn darin für da, da' etc. obige Ausdrücke substituirt werden:

$$\frac{dx}{dt} = qz - ry, \ \frac{dy}{dt} = rx - pz, \ \frac{dz}{dt} = py - qx. \quad (10)$$

Diese Gleichungen zeigen 1°, dass die Gerade, deren Projectionen auf die festen Coordinatenaxen dx, dy, dz sind, d. h. das vom Punkte P durchlaufene Wegelement, auf den beiden Geraden, deren Projectionen auf dieselben festen Axen resp. pdt, qdt, rdt und x, y, z sind, senkrecht steht und zwar so, dass die Richtungen (pdt, qdt, rdt), (x, y, z), (dx, dy, dz) in der Ordnung der Axen x, y, z auf einander folgen; 2°. dass das genannte Wegelement an Grösse gleich ist dem Parallelogramm, welches die Geraden (pdt, qdt, rdt) und (x, y, z) zu Seiten hat.

Denken wir uns nun die von der Lage des Punktes P unabhängige Gerade (pdt, qdt, rdt) als vom Ursprung ausgehend und nehmen dieselbe als Grundlinie des Parallelogramms an, so ist dessen Höhe zugleich die Entfernung des Punktes P von der verlängerten Geraden (pdt, qdt, rdt). Folglich ist das vom Punkt P durchlaufene Wegelement 1°. senkrecht zu der durch P und die Gerade (pdt, qdt, rdt) gelegten Ebene; 2°. ist dasselbe an Grösse gleich dem Producte seiner Entfernung von der zuletzt genannten Geraden und einer von der Lage des Punktes P unabhängigen Grösse, der Grundlinie (pdt, qdt, rdt) jenes Parallelogramms. D. h. diese Grundlinie stellt ihrer Richtung nach die

momentane Drehungsaxe und ihrer Grösse nach die momentane Drehung des zweiten Coordinatensystems dar. Die drei in obigen Differentialgleichungen auftretenden unabhängigen Grössen p, q, r zeigen also, als Projectionen einer vom Ursprung ausgehenden Geraden aufgefasst, die Richtung der momentanen Drehungsaxe an, während die zuletzt genannte Gerade selbst an Grösse der momentanen Winkelgeschwindigkeit gleich ist. In Betreff des Sinns dieser letztern ist zu merken, dass wenn p positiv ist und q, r verschwinden, so dass die momentane Drehungsaxe mit der positiven Axe der x zusammenfällt, dann die Drehung von der Axe der y gegen diejenige der z hin erfolgt, was aus den Gleichungen (10) zu ersehen ist.

(Man vergleiche die hier am Ende gegebene Darstellung mit derjenigen in Poissons Mechanik Nr. 406 und mit Littrows Astronomie III. S. 86—90.).

XXV.

Ueber die Bestimmung von $\Sigma^{(n)}\varphi(x)$ unter einer bestimmten Voraussetzung. Beweis des Satzes, dass

$\Sigma(u_0+u_1+u_2+\ldots$ in inf.$)=\Sigma u_0+\Sigma u_1+\ldots$ in inf.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

Sei $\varphi(x)$ eine Funktion von x so beschaffen, dass

$$\varphi(x+h)=\varphi(x), \qquad (1)$$

entweder in Folge der Form der Funktion $\varphi(x)$, oder des besondern Werthes von h, so lässt sich die Grösse

$$\Sigma^{(n)}\varphi(x),$$

worin Σ das Zeichen der endlichen Integration ist, ausdrücken, wenn h die Differenz bedeutet.

Um diesen Ausdruck ableiten zu können, wollen wir zuerst an einige andere Sätze erinnern. Man findet nämlich

$$\Delta\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots.(x-a-rh)}{1.2.3\ldots.(r+1)h^{r+1}}$$

$$=\frac{(x+h-a)(x-a)\ldots.(x-a-\overline{r-1}h)}{1.2\ldots.(r+1)h^{r+1}}-\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-rh)}{1.2\ldots(r+1)h^{r+1}}$$

$$=\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots..(x-a-\overline{r-1}h)}{1.2\ldots\ldots rh^r},$$

also

$$\Sigma\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-\overline{r-1}h)}{1.2\ldots..rh^r}$$

$$=\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots..(x-a-rh)}{1.2\ldots..(r+1)h^{r+1}}. \qquad (2)$$

Unter Voraussetzung der Gleichung (1) ist:

$$\Delta\frac{x-a}{h}\varphi(x)=\frac{x+h-a}{h}\varphi(x+h)-\frac{x-a}{h}\varphi(x)$$

$$=\frac{x+h-a}{h}\varphi(x)-\frac{x-a}{h}\varphi(x)=\varphi(x),$$

also ist

$$\Sigma\varphi(x)=C_0+\frac{x-a}{h}\varphi(x), \qquad (3)$$

worin C_0 und a willkührlich sind. Hieraus kann man leicht weiter schliessen. Es ist nämlich, unter der Voraussetzung (1):

$$\Delta\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-rh)}{1.2\ldots\ldots(r+1)h^{r+1}}\varphi(x)$$

$$=\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-\overline{r-1}h)}{1.2\ldots\ldots rh^r},$$

also

$$\Sigma\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-\overline{r-1}h)}{1.2\ldots\ldots rh^r}\varphi(x)$$

$$=\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-rh)}{1.2\ldots\ldots(r+1)h^{r+1}}\varphi(x). \qquad (4)$$

Wendet man diesen Satz auf (3) an, so erhält man:

$$\Sigma^{(2)}\varphi(x)=C_1+C_0\Sigma 1+\Sigma\frac{x-a}{1h}\varphi x$$

$$=C_1+C_0\frac{x-a}{h}+\frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2h^2}\varphi(x).$$

Hieraus wieder:

$$\Sigma^{(3)}\varphi(x)=C_2+C_1\frac{x-a}{h}+C_2\frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2.h^2}$$

$$+\frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{1.2.3h^3}\varphi(x),$$

und allgemein:

$$\Sigma^{(m)}\varphi(x)=C_{m-1}+C_{m-2}\frac{x-a}{h}+C_{m-3}\frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2.h^2}+\ldots$$

$$\ldots+C_0\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-\overline{m-2}h)}{1.2\ldots\ldots(m-1)h^{m-1}}$$

$$+\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{m-1}h)}{1.2\ldots\ldots mh^m}\varphi(x). \quad (5)$$

Da a sowohl, als C_0, $C_1, \ldots C_{m-1}$ willkührlich sind, so hat man offenbar:

$$\Sigma^{(m)}\varphi(x)=\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{m-1}h)}{1.2\ldots\ldots mh^m}\varphi(x)$$

$$+a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_{m-1}x^{m-1}, \quad (6)$$

worin a, a_0, $a_1, \ldots\ldots a_{m-1}$ völlig willkührlich sind.

Eine Funktion, welche der Gleichung (1) genügt, ist z B.

$$\varphi(x)=\sin\frac{2\pi x}{h} \text{ oder } \cos\frac{2\pi x}{h},$$

oder allgemeiner

$$\varphi(x)=\psi(\sin\frac{2\pi x}{h}, \cos\frac{2\pi x}{h}).$$

Also ist

$$\Sigma^{(m)}\psi(\sin\frac{2\pi x}{h}, \cos\frac{2\pi x}{h})$$

$$=\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots\ldots(x-a-\overline{m-1}h}{1.2\ldots\ldots mh^m}\psi(\sin\frac{2\pi x}{h}, \cos\frac{2\pi x}{h})$$

$$+a_0+a_1x+\ldots+a_{m-1}x^{m-1}. \quad (7)$$

Eine Funktion, die der Gleichung (1) genügt, ist ferner

$$\varphi(x)=\sin x \text{ oder } \cos x,$$

allgemeiner

$$\varphi(x)=\psi(\sin x,\ \cos x),$$

für $h=2r\pi$, worin r eine ganze Zahl ist. Demnach hat man, für die Differenz $2r\pi$:

$$\Sigma^{(m)}\sin(x)=\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots.(x-a-\overline{m-1}h)}{1.2\ldots\ldots mh^m}\sin x$$
$$+a_0+a_1x+\ldots\ldots\ldots+a_{m-1}x^{m-1},\quad (8)\quad (h=2r\pi)$$

u. s. f.

Für $e^h \pm 1$ ist ebenfalls e^x eine solche Funktion.

Mit Hülfe der vorstehenden Resultate kann man leicht einen wichtigen Satz beweisen. Ist nämlich die ins Unendliche fortlaufende Reihe

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_mx^m+\ldots\ldots=f(x) \tag{9}$$

konvergent, so ist

$$\Sigma f(x)=\Sigma(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots)=a_0\Sigma 1+a_1\Sigma x+a_2\Sigma x^2+\ldots\ldots \tag{10}$$

Man braucht offenbar nur zu beweisen, dass die Gleichung

$$\Sigma(a_0+a_1x+\ldots.+a_mx^m)=a_0\Sigma 1+a_1\Sigma x+\ldots\ldots+a_m\Sigma x^m, \tag{11}$$

die für jedes endliche m gilt, auch für ein ins Unendliche wachsendes m gilt.

Es ist offenbar

$$\Sigma(a_0+a_1x+\ldots.+a_mx^m+a_{m+1}x^{m+1}+a_{m+2}x^{m+2}+\ldots..)$$
$$=a_0\Sigma 1+a_1\Sigma x+\ldots.+a_m\Sigma x^m+\Sigma(a_{m+1}x^{m+1}+a_{m+2}x^{m+2}+\ldots.\text{ in inf.}), \tag{12}$$

wie gross auch m sei. Kann man nun beweisen, dass, unter der Voraussetzung, die Reihe (9) sei konvergent,

$$\Sigma(a_{m+1}x^{m+1}+a_{m+2}x^{m+2}+\ldots.\text{ in inf.})$$

sich der Null unbegränzt mit wachsendem m nähere, so ist der Satz bewiesen.

Nun ist, für ein grosses m, weil (1) konvergent ist,

$$a_{m+1}x^{m+1}+a_{m+2}x^{m+2}+\ldots.\text{ in inf.}=\psi(x),$$

kleiner, als jede angebbare Grösse. Liegt nun $x+h$ innerhalb

der Gränzen, zwischen denen die Reihe (9) konvergent ist, so wird offenbar

$$\psi(x+h)-\psi(x)=0$$

zu setzen sein. Nach Formel (6) erhält man aber unter dieser Voraussetzung:

$$\Sigma\psi(x)=\frac{x-a}{h}\psi(x), \qquad (13)$$

wenn man die willkührliche Konstante, die ohnehin in (12) zugefügt wird, weglässt. Da aber $\psi(x)$ unbegränzt sich der Null nähert, so folgt aus (13), dass

$$\Sigma\psi(x)=0 \qquad (14)$$

sei, d. h. dass unter Voraussetzung der Konvergenz der Reihe (9)

$$\Sigma(a_0+a_1x+\ldots\ldots \text{ in inf.})=a_0\Sigma 1+a_1\Sigma x+a_2\Sigma x^2+\ldots. \text{ in inf.} \qquad (15)$$

Eben so beweist man folgenden allgemeinen Satz:

Sind u_0, u_1, u_2, ... Funktionen von x; ist ferner die unendliche Reihe

$$u_0, \ u_1, \ u_2, \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

konvergent innerhalb gewisser Gränzen für x; liegen endlich x sowohl als $x+h$ innerhalb derselben Gränzen, so ist

$$\Sigma(u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots \text{ in inf.})=\Sigma u_0+\Sigma u_1+\Sigma u_2+\ldots.. \text{ in inf.} \qquad (16)$$

Offenbar hat man, unter denselben Voraussetzungen:

$$\Sigma^{(n)}(u_0+u_1+u_2+\ldots \text{ in inf.})=\Sigma^{(n)}u_0+\Sigma^{(n)}u_1+\Sigma^{(n)}u_2+\ldots \text{ in inf.} \qquad (17)$$

XXVI.

Ableitung einiger bestimmten Doppelintegrale.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

---

§. 1.

Hätte man in Theil XII. Nr. VI. §. 1. des Archivs folgende Koordinaten eingeführt:

$$x = ra^2\cos\alpha,\quad y = rb^2\sin\alpha\cos\beta,\quad z = rc^2\sin\alpha\sin\beta;$$

so wäre

$$r = \frac{1}{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta + c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)}}$$
$$+ \frac{h}{\sqrt{(a^4\cos^2\alpha + b^4\sin^2\alpha\cos^2\beta + c^4\sin^2\alpha\sin^2\beta)}}.$$

Zugleich fände man für den Kubikinhalt:

$$\frac{8}{3}a^2b^2c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\,\partial\alpha\,\partial\beta\sin\alpha.$$

Entwickelt man dieses Resultat und vergleicht es mit dem dort gefundenen, so erhält man:

(1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{\left[\begin{array}{c}[a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta]\\ \times[a^4\cos^2\alpha+b^4\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^4\sin^2\alpha\sin^2\beta]^{\frac{1}{2}}\end{array}\right]}$$

$$=\frac{\pi}{2abc}\cdot\frac{F\left(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\right)}{\sqrt{a^2-c^2}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{\left[\begin{array}{c}[a^4\cos^2\alpha+b^4\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^4\sin^2\alpha\sin^2\beta]\\ \times[a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta]^{\frac{1}{2}}\end{array}\right]}$$

$$=\frac{\pi}{2ab^2c}\cdot\frac{F\left(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}}\right)}{\sqrt{a^2-c^2}};$$

worin $\cos\varepsilon=\frac{c}{a}$.

Führt man dagegen folgende Koordinaten ein:

$$x=r\sin\alpha\sqrt{1-m^2\sin^2\beta},\quad y=r\cos\alpha\cos\beta,\quad z=r\sin\beta\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha},$$
$$m^2+n^2=1;$$

so ist:

$$r=$$
$$\frac{abc}{\sqrt{[b^2c^2\sin^2\alpha(1-m^2\sin^2\beta)+a^2c^2\cos^2\alpha\cos^2\beta+a^2b^2\sin^2\beta(1-n^2\sin^2\alpha)]}}+h$$

und der Kubikinhalt:

$$\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^3(1-n^2\sin^2\alpha-m^2\sin^2\beta)}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\beta}}\partial\alpha\,\partial\beta.$$

Hieraus folgt durch Vergleichung:

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-n^2\sin^2\alpha-m^2\sin^2\beta)\,\partial\alpha\,\partial\beta}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\,\sqrt{1-m^2\sin^2\beta}\,[b^2c^2\sin^2\alpha(1-m^2\sin^2\beta)+a^2c^2\cos^2\alpha\cos^2\beta+a^2b^2\sin^2\beta(1-n^2\sin^2\alpha)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{2a^2b^2c^2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-n^2\sin^2\alpha-m^2\sin^2\beta)\,\partial\alpha\,\partial\beta}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\,\sqrt{1-m^2\sin^2\beta}\,[b^2c^2\sin^2\alpha(1-m^2\sin^2\beta)+a^2c^2\cos^2\alpha\cos^2\beta+a^2b^2\sin^2\beta(1-n^2\sin^2\alpha)]} = \frac{\pi F(\varepsilon,\eta)}{2abc\sqrt{a^2-c^2}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-n^2\sin^2\alpha-m^2\sin^2\beta)\,\partial\alpha\,\partial\beta}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\,\sqrt{1-m^2\sin^2\beta}\,[b^2c^2\sin^2\alpha(1-m^2\sin^2\beta)+a^2c^2\cos^2\alpha\cos^2\beta+a^2b^2\sin^2\beta(1-n^2\sin^2\alpha)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi F(\varepsilon,\varkappa)}{2b\sqrt{a^2-c^2}},$$

$$\cos\varepsilon=\frac{c}{a},\quad \eta=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\quad \varkappa=\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}}.$$

Setzte man z. B. $n=0$, so wäre $m^2=1$ und man erhielte Formeln, von denen eine a. a. O. schon aufgezählt ist.

In derselben Weise erhält man durch die Substitution

$$x=ra\sin\alpha\sqrt{1-m^2\sin^2\beta},\quad y=rb\cos\alpha\cos\beta,\quad z=rc\sin\beta\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}:$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-n^2\sin^2\alpha - m^2\sin^2\beta)\,\partial\alpha\partial\beta}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\beta}\,[a^2\sin^2\alpha(1-m^2\sin^2\beta)+b^2\cos^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\beta\,(1-n^2\sin^2\alpha)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi F(\varepsilon,\eta)}{2\sqrt{a^2-c^2}}, \quad (3)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-n^2\sin^2\alpha - m^2\sin^2\beta)\,\partial\alpha\partial\beta}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\beta}\,[a^2\sin^2\alpha(1-m^2\sin^2\beta)+b^2\cos^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\beta\,(1-n^2\sin^2\alpha)]} = \frac{\pi F(\varepsilon,\varkappa)}{2b\sqrt{a^2-c^2}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-n^2\sin^2\alpha - m^2\sin^2\beta)\,\partial\alpha\partial\beta}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\beta}\,[a^2\sin^2\alpha(1-m^2\sin^2\beta)+b^2\cos^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\beta\,(1-n^2\sin^2\alpha)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{2abc}.$$

§. 2.

Setzt man in der Gleichung (1) a. a. O.

$$x=a\sin\alpha\sqrt{1-m^2\sin^2\beta},\quad y=b\cos\alpha\cos\beta,\quad z=c\sin\beta\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha};$$

so erhält man durch Vergleichung mit der Formel für den Oberflächeninhalt des Ellipsoids:

(4)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m^2\cos^2\beta + n^2\cos^2\alpha}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-m^2\sin^2\beta}} \sqrt{b^2c^2\sin^2\alpha - b^2(m^2c^2+n^2a^2)\sin^2\alpha\sin^2\beta + a^2c^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + a^2b^2\sin^2\beta}\,\partial\alpha\,\partial\beta$$

$$= \frac{\pi c^2}{4} + \frac{\pi a^2 b}{4\sqrt{a^2-c^2}}\left[\frac{c^2}{a^2}F(\varepsilon,\varkappa) + \frac{a^2-c^2}{a^2}E(\varepsilon,\varkappa)\right],$$

worin $\varepsilon,\varkappa$ dieselbe Bedeutung, wie oben, haben.

Die Spezialisirungen $n=0$, $m=1$ oder $m=0$, $n=1$ geben bekannte Formeln.

§. 3.

Wir wollen das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi}{(a^2b^2\cos^2\varphi + a^2c^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + b^2c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)^n},$$

worin n eine ganze positive Zahl ist, zu bestimmen suchen.

Setzt man

$$a^2b^2\cos^2\varphi + a^2c^2\sin^2\varphi = \alpha^2,$$

$$a^2b^2\cos^2\varphi + b^2c^2\sin^2\varphi = \beta^2;$$

so ist das obige Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi}{(\alpha^2\cos^2\psi + \beta^2\sin^2\psi)^n}$$

Zuerst bestimmen wir nun

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\psi}{(\alpha^2\cos^2\psi + \beta^2\sin^2\psi)^n} = B_n.$$

Man findet leicht, dass

$$2n.B_{n+1} = -\left(\frac{\partial B_n}{\alpha\partial\alpha} + \frac{B_n}{\beta\partial\beta}\right). \qquad (5)$$

Da aber bekanntlich

$$B_1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\alpha\beta},$$

so ergiebt sich aus der Formel (5):

$$B_2 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^3\beta} + \frac{1}{\alpha\beta^3}\right),$$

$$B_3 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2.4}\left(\frac{3}{\alpha^5\beta} + \frac{3}{\alpha\beta^5} + \frac{2}{\alpha^{33}}\right),$$

$$B_4 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2.4.6}\left[\frac{15}{\alpha^7\beta} + \frac{15}{\alpha\beta^7} + \frac{9}{\alpha^3\beta^5} + \frac{9}{\alpha^5\beta^3}\right],$$

$$\vdots$$

Das allgemeine Gesetz scheint zu sein:

$$B_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2.4\ldots(2n-2)} \left[\frac{\overset{n}{a}_1}{\alpha^{2n-1}\beta} + \frac{\overset{n}{a}_3}{\alpha^{2n-3}\beta^3} + \ldots + \frac{\overset{n}{a}_{2n-1}}{\alpha\beta^{2n-1}} \right], \tag{6}$$

worin $\overset{n}{a}_1$, $\overset{n}{a}_3, \ldots\ldots \overset{n}{a}_{2n-1}$ gewisse noch zu bestimmende Koeffizienten sind.

Wendet man die Formel (5) an und setzt:

$$\begin{aligned}
\overset{n+1}{a}_1 &= (2n-1)\,\overset{n}{a}_1\,, \\
\overset{n+1}{a}_3 &= (2n-3)\,\overset{n}{a}_3 + \overset{n}{a}_1\,, \\
\overset{n+1}{a}_5 &= (2n-5)\,\overset{n}{a}_5 + 3\overset{n}{a}_3\,, \\
\overset{n+1}{a}_7 &= (2n-7)\,\overset{n}{a}_7 + 5\overset{n}{a}_5\,, \\
&\vdots \\
\overset{n+1}{a}_{2n+1} &= (2n-1)\,\overset{n}{a}_{2n-1}\,;
\end{aligned} \tag{7}$$

so erhält man:

$$B_{n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2.4\ldots 2n} \left[\frac{\overset{n+1}{a}_1}{\alpha^{2n+1}\beta} + \frac{\overset{n+1}{a}_3}{\alpha^{2n-1}\beta^3} + \ldots + \frac{\overset{n+1}{a}_{2n+1}}{\alpha\beta^{2n+1}} \right],$$

was die Richtigkeit der Formel (6) beweist.

Nun ist $\overset{1}{a}_1 = 1$, also aus (7):

$$\overset{n}{a}_1 = 1.3.5.7\ldots(2n-3).$$

Ferner ist:

$$\overset{2}{a}_3 = \overset{1}{a}_1 = 1,$$

woraus vermittelst der zweiten Gleichung (7):

$$\overset{n}{a}_3 = 1^2.3.5\ldots(2n-5).(n-1).$$

Fährt man so fort, so wird man auf das folgende Gesetz geführt:

$$\overset{n}{a}_{2m+1} = 1^2.3^2.5^2 \ldots\ldots (2m-1)^2.(2m+1)(2m+3) \ldots\ldots (2n-2m-3).\frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m)}{1.2\ldots\ldots m}. \tag{8}$$

Wirklich folgt daraus nach (7):

$$\overset{n+1}{a}_{2m+1} = (2n-2m-1)\overset{n}{a}_{2m+1} + (2m-1)\overset{n}{a}_{2m-1}$$

$$= 1^2.3^2.5^2 \ldots\ldots (2m-1)^2.(2m+1)(2m+3) \ldots\ldots (2n-2m-1).\frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m)}{1.2\ldots\ldots m}$$

$$+ (2m-1).1^2.3^2 \ldots\ldots (2m-3)^2.(2m-1)(2m+1) \ldots (2n-2m-1).\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots\ldots(m-1)}$$

$$= 1^2.3^2.5^2 \ldots\ldots (2m-1)^2.(2m+1)(2m+3) \ldots\ldots (2n-2m-1)[(n-m)+m].\frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots\ldots m}$$

$$= 1^2.3^2.5^2 \ldots\ldots (2m-1)^2.(2m+1)(2m+3) \ldots\ldots (2n-2m-1).\frac{n.(n-1)\ldots\ldots(n+1-m)}{1.2\ldots m},$$

was die Formel (8) beweist. Demnach ist:

$$B_n = \frac{\pi.1.3.5\ldots\ldots(2n-3)}{2.2.4.6\ldots(2n-2)}\left[\frac{1}{\alpha^{2n-1}\beta} + \frac{n-1}{1}.\frac{1}{2n-3}.\frac{1}{\alpha^{2n-3}\beta^3} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}.\frac{1.3}{(2n-3)(2n-5)}.\frac{1}{\alpha^{2n-5}\beta^5}\right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}.\frac{1.3.5}{(2n-3)(2n-5)(2n-7)}.\frac{1}{\alpha^{2n-7}\beta^7} + \ldots\ldots + \frac{1}{\alpha\beta^{2n-1}}\right]. \tag{9}$$

Dadurch nun ist die Bestimmung des vorgelegten Integrals auf die Bestimmung von Integralen der Form

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\,\partial\varphi}{\alpha^{2m+1}\beta^{2r+1}} = L \qquad (10)$$

zurückgeführt.

Man setze:

$$\cos\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}\,\mathrm{tg}\,\psi,$$

so ist

$$\alpha^{2m+1} = \frac{(ac)^{2m+1}}{\cos^{2m+1}\psi}\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}\sin^2\psi\right)^{\frac{2m+1}{2}}, \quad \beta^{2r+1} = \frac{(bc)^{2r+1}}{\cos^{2r+1}\psi}.$$

Die Gränzen von ψ sind ε und 0, wo ε die obige Bedeutung hat; also wird das Integral (10), da

$$\partial\varphi = -\frac{p\,\partial\psi}{\sin\varphi\cos^2\psi}, \quad p^2 = \frac{c^2}{a^2-c^2}$$

ist:

$$L = \int_0^{\varepsilon} \frac{\partial\psi\,.\,p\,.\cos^{2r+1}\psi\,.\cos^{2m+1}\psi}{\cos^2\psi(bc)^{2r+1}(ac)^{2m+1}(1-\eta^2\sin^2\psi)^{\frac{2m+1}{2}}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}\,(ac)^{2m+1}(bc)^{2r+1}} \int_0^{\varepsilon} \frac{\cos^{2(r+m)}\psi\,\partial\psi}{(1-\eta^2\sin^2\psi)^{\frac{2m+1}{2}}}. \qquad (11)$$

Die Bestimmung des Integrales (10) ist somit auf die des Integrals

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\cos^{2n}\psi\,\partial\psi}{(1-\eta^2\sin^2\psi)^{\frac{2m+1}{2}}} \qquad (12)$$

zurückgeführt. Allein, wenn $1-\eta^2=\eta'^2$, so ist:

$$\cos^2\psi = \frac{1-\eta^2\sin^2\psi-\eta'^2}{\eta^2}, \quad \cos^{2n}\psi = \frac{(1-\eta^2\sin^2\psi-\eta'^2)^n}{\eta^{2n}}$$

$$= \frac{1}{\eta^{2n}}\Big[(1-\eta^2\sin^2\psi)^n - \frac{n}{1}\,\eta'^2.(1-\eta^2\sin^2\psi)^{n-1}$$

$$+ \frac{n.(n-1)}{1.2}\,\eta'^4(1-\eta^2\sin^2\psi)^{n-2} - \ldots\ldots (-1)^n.\eta'^{2n}\Big].$$

Dadurch wird:

$$\int_0^\varepsilon \frac{\cos^{2n}\psi\,\partial\psi}{(1-\eta^2\sin^2\psi)^{\frac{2m+1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\eta^{2n}}\Bigg[\int_0^\varepsilon \frac{(1-\eta^2\sin^2\psi)^n\,\partial\psi}{(1-\eta^2\sin^2\psi)^{\frac{2m+1}{2}}}-\frac{n}{1}\eta'^2\int_0^\varepsilon \frac{(1-\eta^2\sin^2\psi)^{n-1}\,\partial\psi}{(1-\eta^2\sin^2\psi)^{\frac{2m+1}{2}}}+\ldots$$

$$\ldots\ldots(-1)^n\eta'^{2n}\int_0^\varepsilon \frac{\partial\psi}{(1-\eta^2\sin^2\psi)^{\frac{2m+1}{2}}}\Bigg].$$

Die hier vorkommenden Integrale haben nun noch die Formen:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\varepsilon (1-\eta^2\sin^2\psi)^{\frac{2p+1}{2}}\partial\psi=P_{2p+1},\\&\int_0^\varepsilon \frac{\partial\psi}{(1-\eta^2\sin^2\psi)^{\frac{2q+1}{2}}}=Q_{2q+1}.\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Für diese Integrale bestehen aber folgende Rekursionsformeln:

(14)

$$(2p+1)P_{2p+1}=2p(1+\eta'^2)P_{2p-1}-(2p-1)\eta'^2P_{2p-3}$$
$$+\eta^2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\,(1-\eta^2\sin^2\varepsilon)^{\frac{2p-1}{2}},$$

$$(2q-1)\,Q_{2q+1}$$
$$=(2q-2)(1+\eta'^2)Q_{2q-1}-(2q-3)Q_{2q-3}-\frac{\eta^2\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{(1-\eta^2\sin^2\varepsilon)^{\frac{2q-1}{2}}};$$

während

(15)

$$P_1=E(\varepsilon,\eta),\quad P_3=\frac{4-2\eta^2}{3}E(\varepsilon,\eta)-\frac{\eta'^2}{3}F(\varepsilon,\eta)$$
$$+\frac{\eta^2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sqrt{1-\eta^2\sin^2\varepsilon}}{3},$$

$$Q_1=F(\varepsilon,\eta),\quad Q_3=\frac{E(\varepsilon,\eta)}{1-\eta^2}-\frac{\eta^2\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{\eta'^2(1-\eta^2\sin^2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}$$

ist. Vermöge (14) und (15) bestimmt man die Integrale (13), dadurch das Integral (11), und dadurch endlich das vorgelegte Integral.

Sei

$$(x^2+y^2+z^2)^{2n+4}=(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)^{2n+1}$$

die Gleichung einer Fläche, und man setze

$$x=\frac{r}{a}\sin\varphi\sin\psi,\ y=\frac{r}{b}\sin\varphi\cos\psi,\ z=\frac{r}{c}\cos\varphi;$$

so erhält man als Formel für den Kubikinhalt:

$$\frac{8(abc)^{2n+3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi}{[a^2b^2\cos^2\varphi+a^2c^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+b^2c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{n+2}}.$$

Setzte man aber

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi\cos\psi,\ z=r\sin\varphi\sin\psi;$$

so erhielte man für denselben Kubikinhalt:

$$\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{\frac{2n+1}{2}}\sin\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi.$$

Also ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{\frac{2n+1}{2}}\sin\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi$$

$$=(abc)^{2n+3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi}{[a^2b^2\cos^2\varphi+a^2c^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+b^2c^2\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{n+2}},$$

wodurch das erste Integral ebenfalls bestimmt ist.

XXVII.

Ueber den Heber.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

In den Comptes rendus vom 25. Septbr. 1848 sagt Person, dass ein überall gleich dicker Heber, dessen vertikale Arme die Längen a, c und dessen horizontaler Arm die Länge b habe, und in dem man nur den längern Arm c mit Flüssigkeit gefüllt habe, dann fortfliesse, wenn man diese Flüssigkeit von selbst ausfliessen lasse, wenn

$$c > a + \frac{a+b}{1-\frac{a}{H}},$$

worin H die Höhe der Flüssigkeit bedeutet, die dem atmosphärischen Drucke das Gleichgewicht hält. Zugleich will er dadurch die Formel Péclet's

$$c > 2a + b$$

entkräften. Trotzdem ist die letztere doch richtig und die erste falsch, wie man sogleich sehen wird.

Nehmen wir nämlich an, die Flüssigkeit fliesse aus der Röhre $CD (=c)$ (Taf. IV. Fig. 2.), so wird, da die in $AB + BC$ enthaltene Luft sich ausdehnt, die Flüssigkeit in AB steigen. Soll sie über B steigen, so muss vor Allem

$$H > a \qquad (1)$$

sein. Diese Bedingung vorausgesetzt nun, wollen wir annehmen, die Flüssigkeit habe, bis CD leer sei, in ihrem Steigen die Röh-

ren a, b nicht nur durchlaufen, sondern sei noch in CD bis zur Tiefe $CK=x$ gesunken, so dass also im Augenblick, als in D die letzte Schichte abfliesst, die gestiegene Flüssigkeit den Raum $a+b+x$ erfüllt. Suchen wir nun x zu bestimmen.

Die im Heber befindliche Luft, die ursprünglich den Raum $a+b$ einnahm, befindet sich im Raume $KD=c-x$; ihre Dichte ist also $\frac{a+b}{c-x}$ ihrer anfänglichen Dichte. Heisst δ der Querschnitt des Hebers, ε das Gewicht der Einheit der Flüssigkeit, P der Druck der atmosphärischen Luft auf den Querschnitt des Hebers, so ist

$$H\delta\varepsilon=P \qquad (2)$$

und die in KD befindliche Luft drückt nur mit der Kraft

$$\frac{a+b}{c-x}P=\frac{a+b}{c-x}H\delta\varepsilon.$$

Da D in dem betrachteten Augenblick durch die letzte abfliessende Schichte noch geschlossen ist, so wirkt auf die in $ABCK$ befindliche Masse einerseits der Druck

$$\frac{a+b}{c-x}H\delta\varepsilon-x\delta\varepsilon,$$

anderseits der Druck $H\delta\varepsilon-a\delta\varepsilon$; demnach muss, für gleichförmige Bewegung,

$$H\delta\varepsilon-a\delta\varepsilon=\frac{a+b}{c-x}H\delta\varepsilon-x\delta\varepsilon,$$

d. h.

$$H-a=\frac{(a+b)H}{c-x}-x$$

sein. Hieraus folgt:

$$x^2+x(H-a-c)=-H(a+b-c)-ac,$$

$$x=-\frac{H-a-c}{2}\pm\sqrt{-H(a+b+c)-ac+\frac{(H-a-c)^2}{4}}.$$

Soll nun der Heber fortfliessen, so muss

$$x>a,$$

d. h.

$$\sqrt{-H(a+b-c)-ac+\frac{(H-a-c)^2}{4}}>a+\frac{H-a-c}{2}$$

$$>\frac{H+a-c}{2},$$

d. h.

$$-4H(a+b-c)-4ac+H^2-2aH+a^2-2Hc+2ac+c^2$$
$$>H^2+2aH+a^2-2Hc+c^2-2ac\,,$$

d. h.

$$4Hc-8aH-4Hb>0,$$
$$c>2a+b \qquad (2)$$

sein, was eben die Bedingung von **Péclet** ist.

XXVIII.

Ueber eine durch zerstreutes Licht bewirkte Interferenzerscheinung.

Von

Herrn L. Schläfli,

Privatdocenten der Mathematik zu Bern.

Die Erscheinung, von der ich reden will, ist nur eine Modification eines schon von Newton angestellten Interferenzversuchs, den Radicke in seinem Handbuch der Optik (Theil II., S. 51) also beschreibt:

„Lässt man durch eine in einem weissen Schirm befindliche kleine kreisförmige Oeffnung auf die Mitte eines sphärischen hohlen Glassspiegels, dessen erhabene Rückseite belegt ist, einen Lichtbündel fallen, so erblickt man auf dem Schirm rings um die Oeffnung Farbenringe, wenn dieselbe im Mittelpunkte der Spiegelkrümmung liegt. Die Farben werden schwächer mit der Entfernung des Schirms aus dieser Lage und verschwinden endlich ganz.“

Der jüngere Herschel hat diesen Versuch aus der Interferenz des an der Vorderseite des Spiegels zerstreuten und an der Rückseite zurückgeworfenen Lichts mit dem zuerst an der Rückseite

zurückgeworfenen und dann an der Vorderseite zerstreuten Lichte erklärt; diese Erklärung wurde durch die Uebereinstimmung zwischen den berechneten Ringdurchmessern und den gemessenen bestätigt.

Eine ähnliche Erscheinung kann nun auch mit einem gewöhnlichen ebenen, mit Stanniol belegten Glassspiegel und ohne Schirm hervorgebracht werden, wenn man die zerstreuende Eigenschaft der Vorderseite des Spiegels durch Anhauchen oder Bestäuben erhöht. Der beim Newton'schen Versuch angewandte Schirm wird hier durch die Netzhaut des Auges ersetzt. Bringt man nämlich das Auge so zwischen den Spiegel und eine Lichtflamme, dass man die Bilder des Auges und der Flamme nahe bei einander sieht, so erblickt man auf dem Spiegel eine Menge concentrischer und farbiger Kreisbogen, die nur darum nicht vollständige Kreise sind, weil sie theilweise durch den Schatten des Kopfs verdeckt werden. Man braucht nur das Auge ein wenig zu heben oder zu senken, um zu bemerken, dass diese farbigen Kreisbogen die Gerade, welche die Bilder des Auges und der Flamme verbindet, senkrecht durchschneiden, und also ihren Mittelpunkt auf dieser Geraden haben müssen. Ist die Flamme viel weiter vom Spiegel entfernt als das Auge, so scheinen die farbigen Kreise das Bild des Auges selbst zum Mittelpunkt zu haben. Hält man die Flamme nahe neben das Auge, so sieht man parallele gerade Streifen, deren Richtung auf der Verbindungslinie der Bilder des Auges und der Flamme senkrecht steht. Hält man endlich die Flamme zwischen den Spiegel und das Auge, so krümmen sich die parallelen farbigen Streifen nach der entgegengesetzten Seite, und scheinen nun desto mehr das Bild der Flamme zu ihrem Mittelpunkt zu haben, je mehr die Entfernung des Auges vom Spiegel diejenige der Flamme übertrifft.

Benutzt man die Sonne als Lichtquelle, so haben die farbigen Ringe das Bild des Auges zum Mittelpunkt und werden desto grösser und breiter, je weiter man das Auge vom Spiegel entfernt. Ist diese Entfernung gross genug, so vermag der Schatten des Kopfs nicht mehr die Ringe zur Hälfte zu verdecken, und man sieht daher die äussersten Ringe als fast ganze Kreise. Um vom Sonnenbild nicht geblendet zu werden, kann man den Spiegel so stellen, dass der Schatten des Kopfs dasselbe verdeckt.

Obschon die folgende Erklärung durch keine Messung der Durchmesser der farbigen Ringe bestätigt wurde, so liegt doch im Allgemeinen in der so eben beschriebenen Erscheinungen nichts, was dieser Erklärung widerspräche.

Aus dem leuchtenden Punkt S werde auf die Vorderfläche des Planglases die Senkrechte SA gefällt, so ist, wenn n den Brechungsindex des Glases bezeichnet, und $TA = n . SA$ gemacht wird, T der Divergenzpunkt der ins Glas gebrochenen Strahlen. Nimmt man nun den Augenblick, in welchem das Licht von S ausgeht, als Anfangspunkt der Zeit, und die Zeit, welche das Licht braucht, um die Längeneinheit in der Luft zurückzulegen, als Einheit des Zeitmaasses an, so drückt $SA - n . TA$ die Zeit aus, zu welcher das im Glase sich bewegende Licht von jenem

fingirten Punkte T ausgegangen sein müsste, wenn es stets in demselben durchsichtigen Medium geblieben wäre. Die verlängerte Senkrechte TA treffe die Hinterfläche des Glases in D, und man mache auf der entgegengesetzten Verlängerung $DQ = TD$, so ist Q der Divergenzpunkt der an der Hinterfläche des Glases zurückgeworfenen Strahlen, so lange sie sich noch innerhalb des Glases bewegen, und diese zurückgeworfenen Strahlen verhalten sich gerade so, wie wenn sie zur selben Zeit $SA - n.TA$ von Q ausgegangen wären, wie wir uns die einmal gebrochenen Strahlen von T ausgehend gedacht haben. Folglich wird

$$SA - n.TA + n.QM = SA + 2n.AD + n(QM - QA)$$

die Zeit bezeichnen, zu der das zurückgeworfene Licht in irgend einem nicht zu weit von A entfernten Punkte M der Vorderfläche anlangen wird, um von da aus durch Zerstreuung in die Luft überzugehen und ins Auge zu gelangen. Derselbe Punkt M wird aber auch von der Lichtquelle S selbst zur Zeit SM direkt erleuchtet werden, und das empfangene Licht ins Glas hinein zerstreuen. Man ziehe MC senkrecht auf die Hinterfläche des Glases und mache die Verlängerung $CN = MC$, so wird das zurückgeworfene Licht sich verhalten, als wenn es gleichzeitig von N ausgegangen wäre, wie das zerstreute einfallende von M. An der Vorderfläche angelangt, wird es in die Luft gebrochen werden und einen auf der Geraden MN liegenden Punkt P zum Divergenzpunkt haben, dessen Lage durch die Gleichung $MP = \frac{1}{n} \cdot MN$ bestimmt ist; und die dem Punkt P entsprechende Zeit wird

$$SM + n.MN - PM$$

sein. Also ist der Zeitunterschied, um den wir den Punkt M später von Q aus erleuchtet uns denken müssen als das Licht von P ausgehen kann,

$$= -(SM - SA) + n(QM - QA) + PM.$$

Befindet sich nun das Auge O weder zu nahe am Spiegel, noch zu schief vor demselben, so erblickt es die beiden Punkte M und P, wenn das Glas dünn genug ist, in solcher Nähe, dass deren Bilder auf der Netzhaut sich interferiren. Wir dürfen auch desshalb die von M und P ins Auge gelangenden Strahlen als parallel ansehen, und wenn wir den Winkel, um welchen dieselben von der senkrechten Richtung abweichen, mit w bezeichnen, so ist der Weg von P aus ins Auge um $PM.\cos w$ länger als derjenige von M aus ebendahin. Demnach muss der Zeitunterschied, um den das Licht von M aus später ins Auge gelangt, als von P aus,

$$n(QM - QA) - (SM - SA) + PM(1 - \cos w)$$

betragen. Man errichte nun aus O die Senkrechte OB auf den Spiegel, setze $SA = a$, $OB = b$, $AM = p$, $BM = q$, $AD = d$ und

betrachte p, q als kleine Grössen erster Ordnung in Beziehung auf a und b, so ist, wenn man die vierten Potenzen von p und q ausser Acht lässt,

$$SM-SA=\sqrt{a^2+p^2}-a=\frac{p^2}{2a},$$

$$QM-QA=\sqrt{(na+2d)^2+p^2}-(na+2d)=\frac{p^2}{2(na+2d)},$$

$$PM=\frac{2d}{n},\ 1-\cos w=\frac{OM-OB}{OM}=\frac{1}{2}\frac{q^2}{b^2}.$$

Wird der obige Zeitunterschied mit t bezeichnet, so ergiebt sich hieraus

$$\frac{d}{n}\frac{q^2}{b^2}-\frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+\frac{2d}{n}}\right)=t,$$

oder

$$\frac{d}{n}\left(\frac{q^2}{b^2}-\frac{p^2}{a(a+\frac{2d}{n})}\right)=t,$$

oder endlich, wenn man die Dicke d im Vergleich mit a vernachlässigt,

$$\frac{q^2}{b^2}-\frac{p^2}{a^2}=\frac{nt}{d}.$$

Setzt man hier t constant, so hat man die Gleichung der Curve, welcher alle diejenigen Punkte M angehören, die dieselbe Interferenz hervorbringen. Für $t=0$ erhält man:

$$\frac{p}{a}=\frac{q}{b},$$

d. h. die von A und B nach M gehenden Fahrstrahlen haben zu einander dasselbe Verhältniss, wie die Abstände a und b der Flamme und des Auges vom Spiegel. Zufolge eines bekannten geometrischen Satzes liegt also der Punkt M auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt sich in der Verlängerung der Geraden AB befindet, und welcher diese Gerade AB innerhalb und ausserhalb im Verhältniss $a:b$ schneidet. Hieraus ist leicht zu ersehen, dass das Auge in der Richtung eines dieser beiden Durchschnittspunkte die Flamme erblickt, und dass der andere in der Geraden liegt, welche Auge und Flamme verbindet. Für ein beliebiges t nehme man AB als Abscissenaxe an, und drücke p^2 und q^2 durch die rechtwinkligen Coordinaten des Punkts M aus, so wird dieses auf rationale Weise geschehen, und man wird eine Gleichung zweiten Grades erhalten. Wenn aber eine solche Gleichung für

einen gewissen Werth des constanten Gliedes einen Kreis darstellt, so wird sie für alle andern Werthe dieses constanten Gliedes lauter concentrische Kreise darstellen. Setzt man $AB = c$ und nimmt

$$\frac{a^2}{a^2-b^2}c, \quad \frac{b^2}{a^2-b^2}c$$

als Abscissen der Punkte A, B an, so wird die Gleichung der Curve

$$x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\left(\frac{nt}{d}+\frac{c^2}{a^2-b^2}\right).$$

Ist der leuchtende Punkt unendlich weit entfernt, so drückt $\frac{c}{a}$ die Tangente des Winkels α aus, um welchen die einfallenden Strahlen von der normalen Richtung abweichen, und dann wird die Gleichung der Curve

$$x^2+y^2=b^2\left(\frac{nt}{d}+\operatorname{tang}^2\alpha\right);$$

der Mittelpunkt fällt mit der Projection B des Auges zusammen.

Zum Schlusse will ich noch bemerken, dass es gar nicht nothwendig ist, dass das Planglas mit Stanniol belegt sei; jede schmutzige oder staubige oder schwach angelaufene Fensterscheibe zeigt daher die beschriebene Interferenzerscheinung, nur verzerrt, weil die Flächen des Fensterglases gewöhnlich nicht eben sind. Die Stanniolbelegung erhöht indessen die Intensität der Interferenzbilder.

Der helle Kreis, welchen man durch das Bild der Flamme gehen sieht, soll nach der vorigen Erklärung der erste sein, weil er dem Phasenunterschied Null entspricht; und die folgenden Ringe sollen von diesem an sowohl nach innen als nach aussen gezählt werden. Wirklich zeigt dieser Kreis fast keine Farbensäume, während die übrigen Kreise demselben ihre violette Seite zuwenden und die rothe von ihm abwenden. Die innern Kreise sind also gegen den gemeinschaftlichen Mittelpunkt hin roth gesäumt, die äussern dagegen nach aussen. Dieses stimmt ganz damit überein, dass die Wellenlängen für rothes Licht am grössten und für violettes am kleinsten sind.

XXIX.

Ueber eine geometrische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

Die Aufgabe, mit deren Auflösung auf analytischem Wege wir uns in diesem Aufsatze beschäftigen wollen, ist die folgende in Thl. I. S. 105. vorgelegte Aufgabe:

Es ist ein Kreis und in dessen Ebene sind zwei Punkte gegeben; man soll durch diese beiden gegebenen Punkte einen Kreis dergestalt beschreiben, dass seine beiden Durchschnittspunkte mit dem gegebenen Kreise und der Mittelpunkt dieses letzteren Kreises in einer und derselben geraden Linie liegen.

Da der Mittelpunkt des gesuchten Kreises nothwendig in der geraden Linie liegen muss, welche auf der die beiden gegebenen Punkte mit einander verbindenden geraden Linie in deren Mittelpunkte senkrecht steht, so wird es am zweckmässigsten sein, diese gerade Linie als Axe der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy anzunehmen, dessen Axe der y wir zugleich der Einfachheit wegen durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises hindurch legen wollen. Bezeichnen wir dann die Coordinaten des Mittelpunkts des gegebenen Kreises durch 0, b und seinen Halbmesser durch r, wo natürlich b und r gegebene Grössen sind; so ist die Gleichung des gegebenen Kreises

$$1)\qquad x^2+(y-b)^2=r^2.$$

Bezeichnen wir ferner die Coordinaten des in der Axe der x liegenden Mittelpunkts des gesuchten Kreises durch p, 0 und seinen Halbmesser durch ϱ; so ist die Gleichung des gesuchten Kreises

2) $$(x-p)^2+y^2=\varrho^2.$$

Zuerst wird es nun darauf ankommen, die Coordinaten der beiden Durchschnittspunkte des gegebenen und des gesuchten Kreises zu bestimmen, welche man erhält, wenn man x, y aus den beiden Gleichungen

3) $$\begin{cases} x^2+(y-b)^2=r^2, \\ (x-p)^2+y^2=\varrho^2; \end{cases}$$

oder aus den beiden Gleichungen

4) $$\begin{cases} x^2+y^2-2by=r^2-b^2, \\ x^2+y^2-2px=\varrho^2-p^2 \end{cases}$$

mittelst gewöhnlicher algebraischer Elimination bestimmt. Zu dem Ende subtrahire man zuerst die zweite der beiden vorhergehenden Gleichungen von der ersten, so erhält man die Gleichung

5) $$2px-2by=r^2-b^2-\varrho^2+p^2$$

oder

6) $$2p(x-p)-2by=r^2-b^2-\varrho^2-p^2,$$

also

7) $$y=\frac{2p(x-p)-(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)}{2b}.$$

Führt man diesen Werth von y in die zweite der Gleichungen 3) ein, so wird dieselbe nach einer leichten Reduction

8) $$\begin{aligned} 4(b^2+p^2)(x-p)^2-4p(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)(x-p) \\ =4b^2\varrho^2-(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)^2; \end{aligned}$$

oder, wie man durch Zerlegung der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in zwei Factoren auf bekannte Weise leicht findet,

9) $$\begin{aligned} 4(b^2+p^2)(x-p)^2-4p(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)(x-p) \\ =\{r^2-p^2-(b-\varrho)^2\}\{p^2-r^2+(b+\varrho)^2\}; \end{aligned}$$

oder auch, wenn man das Product auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens gehörig entwickelt:

10) $$\begin{aligned} 4(b^2+p^2)(x-p)^2-4p(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)(x-p) \\ =-(r^2-p^2)^2+2(r^2-p^2)(b^2+\varrho^2)-(b^2-\varrho^2)^2. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung 8) ergiebt sich:

$$(x-p)^2-\frac{p(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)}{b^2+p^2}(x-p)=\frac{4b^2\varrho^2-(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)^2}{4(b^2+p^2)},$$

also, wenn man diese Gleichung in Bezug auf $x-p$ als unbekannte Grösse wie eine gewöhnliche quadratische Gleichung auflöst:

$$\left\{x-p-\frac{p(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)}{2(b^2+p^2)}\right\}^2=\frac{b^2\{4\varrho^2(b^2+p^2)-(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)^2\}}{4(b^2+p^2)^2},$$

d. i.

$$\left\{x-p-\frac{p(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)}{2(b^2+p^2)}\right\}^2=\frac{b^2\{4\varrho^2(b^2+p^2)-[(r^2-\varrho^2)-(b^2+p^2)]^2\}}{4(b^2+p^2)^2}$$

also, wie man hieraus leicht findet:

$$\left\{x-p-\frac{p(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)}{2(b^2+p^2)}\right\}^2=\frac{b^2\{4r^2\varrho^2-(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2\}}{4(b^2+p^2)^2},$$

folglich

$$x-p=\frac{p(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)\pm b\sqrt{4r^2\varrho^2-(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2}}{2(b^2+p^2)}.$$

Führt man aber diesen Ausdruck von $x-p$ in den Ausdruck 7) von y ein, so erhält man nach leichter Rechnung

$$y=\frac{-b(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)\pm p\sqrt{4r^2\varrho^2-(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2}}{2(b^2+p^2)},$$

und für die Coordinaten x, y der Durchschnittspunkte der beiden Kreise hat man also die folgenden Formeln:

$$11)\quad\begin{cases}x-p=\dfrac{p(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)\pm b\sqrt{4r^2\varrho^2-(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2}}{2(b^2+p^2)},\\[2ex] y=\dfrac{-b(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)\pm p\sqrt{4r^2\varrho^2-(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2}}{2(b^2+p^2)};\end{cases}$$

wo man auch noch bemerken kann, dass

$$12)\quad 4r^2\varrho^2-(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2=-\{b^2+p^2-(r-\varrho)^2\}\{b^2+p^2-(r+\varrho)^2\}$$

ist. Setzt man aber der Kürze wegen

$$13)\quad\begin{cases}P=\dfrac{r^2-b^2-\varrho^2-p^2}{2(b^2+p^2)},\\[2ex] Q=\dfrac{\sqrt{4r^2\varrho^2-(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2}}{2(b^2+p^2)};\end{cases}$$

so ist

$$14) \quad \begin{cases} x-p = pP \pm bQ, \\ y = -bP \pm pQ; \end{cases}$$

wo natürlich die obern und untern Zeichen sich immer auf einander beziehen.

Bezeichnen wir nun aber den einen Durchschnittspunkt der beiden Kreise durch $(x'y')$, den andern durch $(x''y'')$, so ist

$$15) \quad \begin{cases} x'-p = pP + bQ, \\ y' = -bP + pQ; \end{cases}$$

und

$$16) \quad \begin{cases} x''-p = pP - bQ, \\ y'' = -bP - pQ; \end{cases}$$

oder

$$17) \quad \begin{cases} x' = p(1+P) + bQ, \\ y' = -bP + pQ; \end{cases}$$

und

$$18) \quad \begin{cases} x'' = p(1+P) - bQ, \\ y'' = -bP - pQ. \end{cases}$$

Die Gleichung der durch die Durchschnittspunkte der beiden Kreise der Lage nach bestimmten geraden Linie sei jetzt

$$y = Ax + B;$$

so haben wir, da in dieser geraden Linie nach den Bedingungen der Aufgabe auch der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, dessen Coordinaten nach dem Obigen 0, b sind, liegen soll, die Gleichungen

$$y' = Ax' + B,$$
$$y'' = Ax'' + B,$$
$$b = B;$$

also

$$y' = Ax' + b, \quad y'' = Ax'' + b;$$

oder

$$y' - b = Ax', \quad y'' - b = Ax'';$$

folglich

$$\frac{y'-b}{x'} = \frac{y''-b}{x''},$$

und, wenn man in diese Gleichung die obigen Ausdrücke von x', y' und x'', y'' einführt:

$$19)\qquad \frac{b(1+P)-pQ}{p(1+P)+bQ}=\frac{b(1+P)+pQ}{p(1+P)-bQ},$$

welche Gleichung nach einigen leichten Reductionen sogleich zu der Gleichung

$$20)\qquad (b^2+p^2)(1+P)Q=0$$

führt, die also die Bedingungsgleichung ist, dass die beiden Durchschnittspunkte der beiden Kreise und der Mittelpunkt des gegebenen Kreises in einer und derselben geraden Linie liegen.

Diese Gleichung zerfällt in die drei Gleichungen:

$$21)\qquad b^2+p^2=0,\quad 1+P=0,\quad Q=0;$$

von denen aber die erste offenbar auf reelle Weise im Allgemeinen nicht zu erfüllen, und daher zu verwerfen ist, indem man zugleich übersieht, dass für $b^2+p^2=0$ die Ausdrücke 11) für die Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden Kreise unbestimmt werden würden. Daher behalten wir nur die beiden Gleichungen

$$22)\qquad 1+P=0,\quad Q=0;$$

welche nach 13) sogleich zu den beiden Gleichungen

$$23)\qquad \begin{cases} 2(b^2+p^2)+(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)=0, \\ 4r^2\varrho^2-(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2=0 \end{cases}$$

führen.

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des einen der beiden gegebenen Punkte durch α, β; so sind in Bezug auf das angenommene Coordinatensystem die Coordinaten des andern der beiden gegebenen Punkte offenbar durch α, $-\beta$ zu bezeichnen, und da nun der gesuchte Kreis durch die beiden gegebenen Punkte hindurch gehen soll, so erhalten wir nach 2) offenbar die Gleichung

$$24)\qquad (\alpha-p)^2+\beta^2=\varrho^2.$$

Verbinden wir nun mit dieser Gleichung die erste der beiden Gleichungen 23), nämlich die Gleichung

$$2(b^2+p^2)+(r^2-b^2-\varrho^2-p^2)=0,$$

welche man sogleich auf die einfache Form

$$\varrho^2-p^2=b^2+r^2$$

bringt; so haben wir zur Bestimmung der beiden unbekannten Grössen p, ϱ die beiden Gleichungen

$$(\alpha-p)^2+\beta^2=\varrho^2,\quad \varrho^2-p^2=b^2+r^2;$$

d. i. die beiden Gleichungen

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha p=\varrho^2-p^2,\quad b^2+r^2=\varrho^2-p^2;$$

aus denen sich sogleich

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha p=b^2+r^2,$$

also

$$p=\frac{\alpha^2+\beta^2-b^2-r^2}{2\alpha}$$

ergiebt. Führt man diesen Werth von p in die Gleichung

$$\varrho^2=b^2+r^2+p^2$$

ein, so erhält man nach leichter Rechnung

$$\varrho=\pm\frac{\sqrt{4\alpha^2(b^2+r^2)+(\alpha^2+\beta^2-b^2-r^2)^2}}{2\alpha},$$

wo man das Vorzeichen stets so zu nehmen hat, dass ϱ positiv wird, wie es seiner Natur nach sein muss. Also haben wir zur Bestimmung von p und ϱ die beiden Ausdrücke:

$$25)\quad \begin{cases} p=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-b^2-r^2}{2\alpha}, \\ \varrho=\pm\dfrac{\sqrt{4\alpha^2(b^2+r^2)+(\alpha^2+\beta^2-b^2-r^2)^2}}{2\alpha}; \end{cases}$$

welche für p und ϱ offenbar stets reelle Werthe liefern; jedoch bildet der Fall $\alpha=0$ augenscheinlich einen Ausnahmefall. Wie das Vorzeichen in dem Ausdrucke von ϱ zu nehmen ist, ist schon vorher erwähnt worden. Uebrigens kann man ϱ auch auf folgende Art ausdrücken:

$$26)\quad \varrho=\pm\frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^2+(b^2+r^2)^2+2(\alpha^2-\beta^2)(b^2+r^2)}}{2\alpha}.$$

Verbinden wir ferner mit der Gleichung 24) die zweite der Gleichungen 23), so haben wir zur Bestimmung von p und ϱ die beiden Gleichungen

$$(\alpha-p)^2+\beta^2=\varrho^2,\quad 4r^2\varrho^2-(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2=0.$$

Aus der zweiten Gleichung ergiebt sich

$$(b^2+p^2-r^2-\varrho^2)^2=4r^2\varrho^2,$$

also

$$b^2+p^2-r^2-\varrho^2=\pm 2r\varrho,$$

und folglich

$$b^2+p^2=(r\pm\varrho)^2.$$

Demnach haben wir jetzt die beiden Gleichungen

$$\alpha^2+\beta^2=\varrho^2-p^2+2\alpha p,$$
$$b^2-r^2=\varrho^2-p^2\pm 2r\varrho;$$

woraus durch Subtraction

$$\alpha^2+\beta^2-b^2+r^2=2\alpha p\mp 2r\varrho$$

oder

$$-\alpha^2+\beta^2-b^2+r^2=2\alpha(p-\alpha)\mp 2r\varrho,$$

folglich

$$27)\qquad \varrho=\pm\frac{2\alpha(p-\alpha)+(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)}{2r}$$

sich ergiebt. Also ist nach dem Obigen

$$(p-\alpha)^2+\beta^2=\frac{\{2\alpha(p-\alpha)+(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)\}^2}{4r^2},$$

woraus sich zur Bestimmung von $p-\alpha$ leicht die quadratische Gleichung

$$4(\alpha^2-r^2)(p-\alpha)^2+4\alpha(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)(p-\alpha)$$
$$=4\beta^2r^2-(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)^2,$$

oder die Gleichung

$$(p-\alpha)^2+\frac{\alpha(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)}{\alpha^2-r^2}(p-\alpha)=\frac{4\beta^2r^2-(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)^2}{4(\alpha^2-r^2)}$$

ergiebt. Löst man diese Gleichung auf, so erhält man

$$\left\{p-\alpha+\frac{\alpha(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)}{2(\alpha^2-r^2)}\right\}^2=\frac{4\beta^2r^2(\alpha^2-r^2)+r^2(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)^2}{4(\alpha^2-r^2)^2},$$

also

$$28)\quad p-\alpha=\frac{-\alpha(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)\pm r\sqrt{4\beta^2(\alpha^2-r^2)+(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)^2}}{2(\alpha^2-r^2)},$$

oder, wie man leicht findet,

29)

$$p-\alpha=\frac{-\alpha(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)\pm r\sqrt{\{(\alpha^2-r^2)+(\beta-b)^2\}\{(\alpha^2-r^2)+(\beta+b)^2\}}}{2(\alpha^2-r^2)}.$$

Führt man diesen Ausdruck von $p-\alpha$ in die Formel 27) ein, so erhält man nach leichter Rechnung:

$$30)\quad \varrho=(\pm)\,\frac{-r(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)\pm\alpha\sqrt{4\beta^2(\alpha^2-r^2)+(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)^2}}{2(\alpha^2-r^2)}$$

oder

31)

$$\varrho=(\pm)\frac{-r(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)\pm\alpha\sqrt{\{(\alpha^2-r^2)+(\beta-b)^2\}\{(\alpha^2-r^2)+(\beta+b)^2\}}}{2(\alpha^2-r^2)},$$

wo das Vorzeichen in der Parenthese stets so zu nehmen ist, dass ϱ positiv wird, was es seiner Natur nach sein muss. Die Möglichkeit dieser Auflösung erfordert, dass die Grössen

$$(\alpha^2-r^2)+(\beta-b)^2 \text{ und } (\alpha^2-r^2)+(\beta+b)^2$$

gleiche Vorzeichen haben. Auch ist nach 28) und 29)

$$32)\quad p=\frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2-b^2-r^2)\pm r\sqrt{4\beta^2(\alpha^2-r^2)+(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)^2}}{2(\alpha^2-r^2)}$$

oder

33)

$$p=\frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2-b^2-r^2)\pm r\sqrt{\{(\alpha^2-r^2)+(\beta-b)^2\}\{(\alpha^2-r^2)+(\beta+b)^2\}}}{2(\alpha^2-r^2)}.$$

Der Fall $\alpha^2-r^2=0$, d. i. $\alpha=\pm r$, bildet einen Ausnahmefall.

Eine Construction unserer Aufgabe aus den vorhergehenden Formeln abzuleiten, überlasse ich den Lesern, indem dies jetzt nicht mein Zweck ist, und bemerke darüber in der Kürze nur Folgendes.

Zuvörderst erhellet auf der Stelle, dass es bloss darauf ankommt, p zu construiren, weil sich dann offenbar der gesuchte Kreis beschreiben lässt, da sein Mittelpunkt und zwei Punkte, durch welche er gehen soll, gegeben sind.

Der Ausdruck

$$p=\frac{\alpha^2+\beta^2-b^2-r^2}{2\alpha}$$

in 25) kann aber leicht construirt werden, indem man bloss

$$m^2=\alpha^2+\beta^2,\quad n^2=b^2+r^2$$

zu setzen, und die Grössen m und n mittelst des pythagoräischen Lehrsatzes zu construiren braucht. Dann ist

$$p=\frac{m^2-n^2}{2\alpha}=\frac{(m-n)(m+n)}{2\alpha},$$

also

$$2\alpha:m-n=m+n:p;$$

wo nun p mittelst der Aufgabe, zu drei gegebenen Linien die vierte Proportionallinie zu finden, leicht durch Construction erhalten werden kann.

Ferner wollen wir die beiden Werthe, welche der Ausdruck

$$p-\alpha=\frac{-\alpha(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)\pm r\sqrt{\{\alpha^2-r^2+(\beta-b)^2\}\{\alpha^2-r^2+(\beta+b)^2\}}}{2(\alpha^2-r^2)}$$

in 29) für p liefert, vorausgesetzt, dass diese Werthe reell sind, durch p' und p'' bezeichnen. Dann ist

$$p'-\alpha=\frac{-\alpha(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)+r\sqrt{\{\alpha^2-r^2+(\beta-b)^2\}\{\alpha^2-r^2+(\beta+b)^2\}}}{2(\alpha^2-r^2)},$$

$$p''-\alpha=\frac{-\alpha(\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2)-r\sqrt{\{\alpha^2-r^2+(\beta-b)^2\}\{\alpha^2-r^2+(\beta+b)^2\}}}{2(\alpha^2-r^2)};$$

also

$$(p'-\alpha)+(p''-\alpha)=-\alpha\,\frac{\alpha^2-\beta^2+b^2-r^2}{\alpha^2-r^2},$$

$$(p'-\alpha)-(p''-\alpha)=\quad r\,\frac{\sqrt{\{\alpha^2-r^2+(\beta-b)^2\}\{\alpha^2-r^2+(\beta+b)^2\}}}{\alpha^2-r^2};$$

d. i.

$$p'+p''=\alpha\,\frac{\alpha^2-r^2+\beta^2-b^2}{\alpha^2-r^2},$$

$$p'-p''=r\,\frac{\sqrt{\{\alpha^2-r^2+(\beta-b)^2\}\{\alpha^2-r^2+(\beta+b)^2\}}}{\alpha^2-r^2}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$p'+p''-\alpha=\alpha\,\frac{\beta^2-b^2}{\alpha^2-r^2}=\alpha\,\frac{(\beta-b)(\beta+b)}{(\alpha-r)(\alpha+r)}.$$

Setzt man nun

$$f=\alpha\frac{\beta-b}{\alpha-r},$$

d. i.

$$\alpha-r:\beta-b=\alpha:f,$$

so ist

$$p'+p''-\alpha=f\frac{\beta+b}{\alpha+r},$$

folglich

$$\alpha+r:\beta+b=f:p'+p''-\alpha,$$

woraus man sieht, dass man $p'+p''-\alpha$ bloss mit Hülfe der Aufgabe, zu drei gegebenen geraden Linien die vierte Proportionallinie zu finden, construiren kann.

Die Grössen

$$\alpha^2-r^2+(\beta-b)^2 \quad \text{und} \quad \alpha^2-r^2+(\beta+b)^2$$

kann man mit Hülfe des pythagoräischen Lehrsatzes leicht construiren. Setzen wir nun

$$\{\alpha^2-r^2+(\beta-b)^2\}\{\alpha^2-r^2+(\beta+b)^2\}=g^2h^2,$$

was verstattet ist, da das Product auf der linken Seite des Gleichheitszeichens bekanntlich positiv sein muss, wenn die Auflösung möglich sein soll; so ist nach dem Obigen

$$p'-p''=r\frac{gh}{\alpha^2-r^2}=r\cdot\frac{gh}{(\alpha-r)(\alpha+r)}.$$

Wird also

$$i=r\frac{g}{\alpha-r},$$

nämlich

$$\alpha-r:r=g:i$$

gesetzt, so ist

$$p'-p''=i\frac{h}{\alpha+r},$$

also

$$\alpha+r:h=i:p'-p'',$$

so dass folglich auch $p'-p''$ ohne Schwierigkeit construirt werden kann.

Aus $p'+p''-\alpha$ und $p'-p''$ ergeben sich nun aber p' und p'' mittelst der Formeln:

$$p'=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}(p'+p''-\alpha)+\frac{1}{2}(p'-p''),$$

$$p''=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}(p'+p''-\alpha)-\frac{1}{2}(p'-p'')$$

und können also auch leicht durch Construction gefunden werden, so dass also jetzt die Aufgabe als aufgelöst zu betrachten ist.

Das Vorhergehende ist nur als Andeutung zur Auffindung einer zweckmässigen Auflösung unserer Aufgabe durch Construction zu betrachten.

Uebrigens erhellet aus dem Obigen von selbst, dass es im Allgemeinen immer eine reelle Auflösung unserer Aufgabe giebt, aber auch drei solche Auflösungen geben kann.

Weitere Betrachtungen überlassen wir dem Leser, und wollen nur noch bemerken, dass, wenn die beiden angegebenen Punkte in der Peripherie des gegebenen Kreises liegen, wo also nach dem Obigen

$$\alpha^2+(\beta-b)^2=r^2$$

und offenbar $b=0$, folglich

$$\alpha^2+\beta^2=r^2$$

ist, sowohl die Formeln 25), als auch die Formeln 33) und 31),

$$p=0,\quad \varrho=r$$

liefern, welche Auflösung einem mit dem gegebenen Kreise zusammenfallenden Kreise entspricht, der in gewissem Sinne auch als Auflösung unserer Aufgabe betrachtet werden kann.

XXX.

Theorie des Condensators.

Von

Herrn A. Weiss,

Lehrer der Mathematik, Physik und Chemie an der Königlichen Landwirthschaft- und Gewerbschule I. Klasse zu Fürth in Mittelfranken.

I. Zusammenenstellung einiger nöthigen Sätze der Electricitätslehre.

1) Im Zustand des Gleichgewichts verbreitet sich die Electricität über die Oberflächen der Körper so, dass die Intensität einer Stelle von der Art und Grösse ihrer Krümmung abhängig ist. Hieraus folgt, dass im Allgemeinen die verschiedenen Stellen eines Körpers unzählig viele verschiedene Intensitäten auf der vollkommenen Kugelfläche jedoch dieselbe Intensität haben. Wenn wir nun doch in der Folge von Einer Intensität der an einem Körper haftenden Electricität sprechen, so verstehen wir darunter den Quotienten aus der Menge der am Körper haftenden Electricität dividirt durch die Oberfläche desselben. Es ist dieses gleichsam die mittlere Intensität, von der man sich dadurch einen Begriff machen kann, dass man sie sich auf eine Kugel von gleicher Fläche gebracht denkt.

2) Sobald sich irgend zwei Körper berühren, ändern sich die electrischen Zustände derselben. Hat der eine Körper die Fläche o_1 und die mittlere Intensität a_1 und der andere die Fläche o_2 und die mittlere Intensität a_2 und bezeichnet man die mittlere Intensität des ersten Körpers nach der Berührung durch x_1, die des zweiten durch x_2, so wird man immer setzen können

$$x_2 = c x_1. \qquad (1)$$

Da die Gesammtmenge der Electricität durch die Berührung nicht geändert wird, so gilt ferner noch die Gleichung:

$$x_1 o_1 + x_2 o_2 = a_1 o_1 + a_2 o_2.$$

In letztere Gleichung den Werth von x_2 aus (1) gesetzt gibt

$$x_1 o_1 + c x_1 o_2 = a_1 o_1 + a_2 o_2;$$

hieraus folgt aber

$$x_1 = \frac{a_1 o_1 + a_2 o_2}{o_1 + c o_2}, \quad x_2 = c \frac{a_1 o_1 + a_2 o_2}{o_1 + c o_2}.$$

Die Zahl c ist $= \frac{x_2}{x_1}$ und drückt also das Verhältniss der mittleren Intensitäten derjenigen Electricitätsmengen aus, die sich in den beiden Körpern das Gleichgewicht halten; wir wollen sie in der Folge den Gleichgewichts-Coefficienten nennen. Gewöhnlich wird dieser vernachlässigt oder $= 1$ angenommen. Wann diess jedoch richtig ist, oder welchen Werth die Coefficienten in jedem speciellen Fall haben, muss zuvor auf anderm Wege entschieden worden sein. Im Allgemeinen hängt dieser Werth von der Gestalt der zwei Körper ab, welche mit einander in Verbindung stehen. Zu seiner Bestimmung müssen dieselben Mittel, wie zu der Bestimmung der mittleren Intensität bei einem einzigen Körper in Bewegung gesetzt werden.

3) Ist eine der beiden Oberflächen z. B. $o_1 = \infty$ und dessen Intensität $= a_1$, so ist, wie aus 2) hervorgeht,

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = c a_1;$$

d. h. die Intensität des unendlich grossen Körpers wird nicht geändert.

4) Hat einer der beiden Körper die Eigenschaft stets dieselbe Intensität a_1 beharrlich in sich zu erhalten, z. B. der erste, so ist $x_1 = a_1$ und $x_2 = c a_1$. Ein solcher Körper kann sonach in betrachteter Beziehung wie ein Körper von unendlich grosser Fläche angesehen werden. Wir sagen von einem solchen Körper er besitze constante Intensität.

5) Wenn man einen isolirten Leiter gleichviel ob im electrisirten oder neutralen Zustande in die Nähe eines electrischen Körpers bringt, so, dass eine nicht leitende Schicht zwischen beiden liegt, so trennen sich in dem genäherten Leiter bestimmte Mengen von bisher neutralisirten Electricitäten und es begibt sich die der Quelle entgegengesetzte nach dem ihr zugewendeten und die mit der Quelle gleiche zu dem von ihr abgewendeten Theil; letztere ist frei, erstere hat kein Streben ihren Ort zu verlassen und heisst deshalb gebundene Electricität. Gleichzeitig wird aber auch ein gewisser Theil von der in der Quelle befindlichen freien Electricität ebenfalls gebunden.

6) Berührt ein dritter Körper einen von den zweien, welche vertheilend auf einander einwirken, so wird das nach 2) erhaltene die freien Electricitäten in den beiden sich berührenden Körpern angehende Resultat nicht geändert, indem nämlich die gebundenen Electricitäten so aufgefasst werden, dass die freien für sich im Gleichgewicht sind. Man kann nämlich die gebundene Electricität eines Körpers immer in dem Sinne nehmen, dass es die sei, deren Wirkung auf die übrige in demselben

Körper enthaltene und mit dem Namen der freien bezeichnete Electricität durch die Influenz des andern bindenden Körpers ganz und gar aufgehoben wird. Dann muss offenbar die freie Electricität im ersten Körper für sich und also ganz so im Gleichgewicht sein, als ob in diesem Körper keine gebundene Electricität vorhanden wäre. Die Rechtmässigkeit dieser Vorstellungsweise kann wenigstens da keinem Zweifel unterliegen, wo wie bei den Condensatorwirkungen die freie Electricität immer nur gleichsam ein verschwindend kleiner Theil der Gesammtelectricität ist.

7) Sind die zwei Körper, in welchen eine gegenseitige Bindung statt findet, ebene Platten von congruenten Grundflächen, und so gegeneinander gestellt, dass erstens die Grundflächen parallel sind, zweitens deren entsprechende Punkte sich jedesmal in einer auf ihnen senkrechten Geraden befinden, so hängt die Menge der gebundenen Electricitäten in jedem erstens von der Gestalt des andern Körpers und der in ihm enthaltenen Electricität, zweitens von der Dicke der nicht leitenden Schicht ab; bleibt die Gestalt der Körper und die Dicke der sie von einander trennenden Schicht constant, so ist die Menge der gebundenen Electricität in der einen Platte der Erfahrung zu Folge $= nap$, wenn ap die Menge der in der andern Platte befindlichen Electricität, p die Plattenfläche selbst bedeutet; da die gebundene Electricität die der bindenden entgegengesezte Qualität hat, so kann, wenn unter ap die Menge und Qualität der bindenden Electricität begriffen wird, mit $-nap$ die Menge und Qualität der gebundenen bezeichnet werden. Die Zahl n heisst Bindungsvermögen, sie ist stets ein positiver eigentlicher Bruch, welcher der Zahl 1 um so näher kömmt, je dünner die nicht leitende Schicht ist.

8) Ein Instrument, das aus zwei leitenden congruenten Platten besteht, deren Grundflächen möglichst eben und durch eine sehr dünne nicht leitende Schicht getrennt sind, und noch die Einrichtung besitzen, dass man sie isolirt trennen kann, heisst Condensator (Verdichter) und dient zur Nachweisung von Electricitäten, welche geringe Intensitäten besitzen. Ueber die Wirkung wird im Allgemeinen Folgendes bemerkt: Wenn man mit den Platten die Electricitätsquellen in Verbindung setzt, so wird die Platte Electricität aufnehmen und zwar so lange, bis die freie Electricität derselben der noch übrigen freien Electricität der Quelle das Gleichgewicht hält. Die in der Platte befindliche Electricität besteht aus einer gewissen Menge freier und einer gewissen Menge gebundener Electricität; werden später die Platten getrennt, so wird die vorher gebundene Electricität auch frei und es äussert sich nun alle in die Platte gegangene Electricität, welche bei einer wahrhaft condensatorischen Wirkung immer viel grösser ist, als die Electricität, die sich in ihnen angesammelt hätte, wenn dieselben bei sonst gleichen Umständen getrennt gewesen wären.

II. Nähere Betrachtung der Condensatorwirkung.

1) Ist die Oberfläche einer jeden von den beiden Platten eines Condensators $= p$, das zwischen den Platten herrschende Bindungsvermögen $= n$, und wird mit der einen Platte ein Körper von der Oberfläche o und der electrischen Intensität a, mit

der andern Platte ein Körper von der Oberfläche ω und der electrischen Intensität α in Verbindung gebracht, so werden, nachdem der Condensator seine Wirkung vollendet hat, wenn u und v die mittlern Intensitäten der in die eine und andere Condensatorplatte gekommenen Gesammtelectricitäten bedeuten, up und vp die Gesammtmengen der in diesen Platten enthaltenen Electricitäten vorstellen. Bezeichnen b und β die mittleren Intensitäten der nach dem Uebergange in den Oberflächen o und ω noch zurückgebliebenen Electricitäten, so geben ob und $\omega\beta$ die Mengen dieser Electricitäten zu erkennen, sowie nach I. 6) bcp und $\beta\gamma p$ die in den beiden Condensatorplatten vorhandenen freien Electricitätsmengen, wenn c und γ die in I. 2) besprochenen Gleichgewichtscoefficienten zwischen der ersten oder zweiten Condensatorplatte und der Oberfläche o oder ω bezeichnen. In den nächsten Paragraphen wird angegeben werden, wie sich die Grössen u und v, b und β bestimmen lassen.

2) Wenn, wie angenommen, in der einen Platte die Gesammtmenge up, in der andern die Gesammtmenge vp ist, so ist nach I. 7) in der ersteren von der Menge up die Menge $-nvp$ und in der zweiten von der Menge vp die Menge $-nup$ gebunden, folglich ist in der einen nur noch die Menge $up-(-nvp)$ frei und in der andern $vp-(-nup)$. Die freie Electricität in der einen ist aber bcp, in der andern $\beta\gamma p$, folglich haben wir die Gleichungen:

$$up+nvp=bcp,$$
$$vp+nup=\beta\gamma p;$$

hieraus folgt

$$u=\frac{bc-n\beta\gamma}{1-n^2}, \quad v=\frac{\beta\gamma-nbc}{1-n^2}.$$

3) Durch das Berühren der Platten mit den Körpern, sowie durch das Nähern oder Trennen wird offenbar nichts an der Menge der auf ihnen und der auf den mit ihnen in Berührung stehenden Körpern sitzenden Electricität geändert. Die Gesammtmenge der in Betracht kommenden Electricität war aber, da sich vor der Berührung der Körper mit den Platten in letztern keine Electricität befand, in dem einen Theil ao, in dem andern $\alpha\omega$. Die Menge nach der Berührung ist im ersten Theil $up+bo$ im andern $vp+\beta\omega$, also haben wir:

$$up+ob=ao,$$
$$vp+\omega\beta=\alpha\omega;$$

oder für u und v aus der vorigen Nummer ihre Werthe gesezt, gibt:

$$bcp-n\beta\gamma p+bo(1-n^2)=ao(1-n^2),$$
$$\beta\gamma p-nbcp+\beta\omega(1-n^2)=\alpha\omega(1-n^2).$$

Hieraus erhalten wir für b und β nachstehende Werthe:

$$b=\frac{ao(\gamma p+\omega(1-n^2))+n\alpha\gamma\omega p}{o\omega(1-n^2)+p(o\gamma+\omega c)+p^2c\gamma},\beta=\frac{\alpha\omega(cp+o(1-n^2))+nacop}{o\omega(1-n^2)+p(o\gamma+\omega c)+p^2c\gamma}.$$

4) Setzt man diese Werthe in die für u und v in 2) enthaltene Gleichung, so haben wir:

$$u=\frac{aco(\gamma p+\omega)-n\alpha\gamma o\omega}{o\omega(1-n^2)+p(o\gamma+\omega c)+p^2c\gamma},v=\frac{\alpha\omega\gamma(cp+o)-naco\omega}{o\omega(1-n^2)+p(o\gamma+\omega c)+p^2c\gamma}$$

5) Aus den allgemeinen Formeln in 3) und 4) wollen wir nun einige specielle Fälle aufsuchen.

a) An der zweiten Platte sei kein Leiter.
Hier ist: $\alpha=\omega=0$.

$$b=\frac{ao}{o+cp},\quad \beta=\frac{naco}{\gamma(o+cp)};$$

$$u=\frac{aoc}{o+cp},\quad v=0.$$

Vorstehende Resultate lassen sich leicht aus I. 2) herleiten. Diese Formeln haben aber hier Gültigkeit, da nach I. 6) die gebundenen Electricitäten keinen Einfluss auf die Vertheilung der freien haben. Setzt man aber in I. 2) die unserm Falle entsprechenden Daten, als:

$$o_1=o,\ a_1=a,\ c=c;$$
$$o_2=p,\ a_2=0;$$

dann ist $x_1=b=\frac{ao}{o+cp}$ = freie Electricität des mit der einen Platte in Verbindung stehenden Körpers, und $x_2=cb=\frac{aoc}{o+cp}$ $=u=$ Ladung dieser Platte. Durch x_2 wird aber in der zweiten Platte $-nx_2=-\frac{naoc}{o+cp}$ gebunden, folglich bleibt, so lange die Platten nicht getrennt werden, $+\frac{naoc}{o+cp}=\beta\gamma$ frei, und hieraus $\beta=\frac{naoc}{(o+cp)\gamma}$, wie auch oben.

b) An der zweiten Platte ist ein Leiter von der Fläche ω und der Intensität 0, also $\omega=\omega$, $\alpha=0$;

$$b=\frac{ao(\gamma p+\omega(1-n^2))}{o\omega(1-n^2)+p(\gamma o+c\omega)+p^2c\gamma},\beta=\frac{nacop}{o\omega(1-n^2)+p(\gamma o+c\omega)+p^2c\gamma};$$

$$u=\frac{aoc(\gamma p+\omega)}{o\omega(1-n^2)+p(\gamma o+c\omega)+p^2c\gamma},v=\frac{-naco\omega}{o\omega(1-n^2)+p(\gamma o+c\omega)+p^2c\gamma};$$

c) Mit der zweiten Platte steht eine Quelle von constanter Intensität α in Verbindung; also $\alpha = \alpha$, $\omega = \infty$;

$$b = \frac{oa(1-n^2)+n\alpha p\gamma}{o(1-n^2)+pc}, \quad \beta = \frac{\alpha(cp+o(1-n^2))}{o(1-n^2)+pc};$$

$$u = \frac{aoc - n\alpha o\gamma}{o(1-n^2)+pc}, \quad v = \frac{\alpha\gamma(cp+o)-naoc}{o(1-n^2)+pc}.$$

d) Mit der zweiten Platte steht eine Quelle von constanter Intensität $\alpha = 0$ in Verbindung. $\alpha = o$, $\omega = \infty$; das wäre, wenn die zweite Platte mit der Erde in leitender Verbindung steht.

$$b = \frac{ao(1-n^2)}{o(1-n^2)+pc}, \quad \beta = 0;$$

$$u = \frac{aoc}{o(1-n^2)+pc}, \quad v = \frac{-aonc}{o(1-n^2)+pc}.$$

e) Mit beiden Platten stehen Electricitätsquellen von constanter Intensität in Verbindung; $a = a$, $\alpha = \alpha$, $o = \omega = \infty$;

$$b = a, \ \beta = \alpha;$$

$$u = \frac{ac - n\alpha\gamma}{1-n^2}, \quad v = \frac{\alpha\gamma - nac}{1-n^2}.$$

f) Die eine der constanten Intensität $\alpha = 0$, also die eine Platte mit der Erde verbunden.

$$b = a, \ \beta = 0;$$

$$u = \frac{ac}{1-n^2}, \quad v = -\frac{nac}{1-n^2}.$$

6) Sehr leicht ist es sich auf andern Wegen von der Richtigkeit der Formeln zu überzeugen, wie es z. B. bei denen vom Falle *a*) geschah. Die Formeln *e*) und *f*) sind die in den Lehrbüchern allein aufgestellten. Wir bemerken schliesslich noch, dass pcb und $p\gamma\beta$ die in den Platten während ihres Beisammenseins vorhandenen freien Electricitätsmengen sind.

7) Wir wollen nun zur Berechnung von dem Falle übergehen, wo ein Condensator schon die Ladungen u und v hat und nach Entfernung der diese Ladungen bewirkenden Quellen neue Quellen mit den Platten verbunden werden.

Es sind die neuen Ladungen u' und v'. Die neuen Quellen haben die Flächen o' und ω' mit den Intensitäten a' und α'; ferner seien c' und γ' die Gleichgewichtscoefficienten, p und n und b' und β' haben mit dem Vorigen gleiche und ähnliche Bedeutung

Nach demselben Räsonnement, wie im II. 3) findet man:

$$u' = \frac{b'c' - n\beta'\gamma'}{1-n^2}, \quad v' = \frac{\beta'\gamma' - nb'c'}{1-n^2}.$$

Um b' und β' zu bestimmen, machen wir eine ähnliche Betrachtung wie in II. 3).

Es ist nämlich die jetzt in der einen Platte befindliche Electricitätsmenge $u'b$, und die noch im Körper vorhandene $o'b'$ offenbar so gross, als die vorher in der Platte und im Körper gewesene, also

$$u'p + o'b' = up + o'a', \text{ ebenso}$$

$$v'p + \omega'\beta' = vp + \omega'\alpha'.$$

Hieraus findet man aber:

$$b' = \frac{(a'o' + up)(\gamma'p + \omega'(1-n^2)) + (\alpha'\omega' + vp)(np\gamma')}{o'\omega'(1-n^2) + p(o'\gamma' + \omega'c') + p^2c'\gamma'},$$

$$\beta' = \frac{(\alpha'\omega' + vp)(c'p + o'(1-n^2)) + (a'o' + up)(npc')}{o'\omega'(1-n^2) + p(o'\gamma' + \omega'c') + p^2c'\gamma'};$$

und ferner:

$$u' = \frac{c'(a'o' + up)(\gamma'p + \omega') - n(\alpha'\omega' - vp)\gamma'o'}{o'\omega'(1-n^2) + p(o'\gamma' + \omega'c') + p^2c'\gamma'},$$

$$v' = \frac{\gamma'(\alpha'\omega' + vp)(c'p + o') - n(a'o' + up)c'\omega'}{o'\omega'(1-n^2) + p(o'\gamma' + \omega'c') + p^2c'\gamma'}.$$

8) Es ist leicht einzusehen, dass, wenn nun noch weitere Ladungen bewerkstelligt würden, die betreffenden Grössen auf gleiche Weise durch diese Recursions - Formeln gefunden würden.

So weitläufig diese Formeln ihrer grossen Allgemeinheit wegen auch erscheinen, so einfach werden sie in den meisten speciellen Fällen. Im folgenden Paragraphen wollen wir, als Beleg hiefür, die Wirkung des sogenannten doppelten Condensators von Cuthbertson, dessen nähere Einrichtung in Gilberts Annalen XIII. oder Gehlers physikalischem Wörterbuch II. beschrieben ist, berechnen.

10) Im Wesentlichen ist die Einrichtung folgende: Zwei Condensatoren mit den Plattenflächen p_1 und p_2 und den Bindungsvermögen n_1 und n_2 werden durch ihre einen Platten mit einer Quelle von der constanten Intensität a, durch ihre andern Platten mit der Erde verbunden. Die hieher gehörigen Gleichgewichts-Coefficienten sind c_1 und c_2. Die zwei Condensatoren erhalten dadurch die Ladungen:

der erste:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{c_1 a}{1-n_1^2}, \\ v_1 = \dfrac{-n_1 c_1 a}{1-n_1^2}. \end{cases}$$

der zweite:

$$\begin{cases} u_2 = \dfrac{c_2 a}{1-n_2^2}, \\ v_2 = \dfrac{-n_2 c_2 a}{1-n_2^2}. \end{cases}$$

Nun trennt man die Platten des ersten Condensators und bringt die eine von ihnen, welche die Ladung u_1 besitzt, mit der Platte des zweiten, welche u_2 als Ladung hat, in Berührung, während die andere Platte des zweiten Condensators mit der Erde verbunden bleibt. Der zweite Condensator erhält hiedurch die Ladungen u'_2 und v'_2; c'_2 sei der zur Verbindung der zwei Platten gehörige Gleichgewichtscoefficient.

Die Werthe b'_2, β'_2, u'_2, v'_2 findet man aus den Formeln II. 7), wenn man dort die dem jetzigen Falle angemessenen Substitutionen macht, nämlich:

$$o' = p_1,\ a = u,\ c' = c'_2,\ u = u_2,\ p = p_2,\ n = n_2,\ \alpha' = 0,\ \omega' = \infty;$$

$$b'_2 = \frac{(u_1 p_1 + u_2 p_2)(1-n_2^2)}{p_1(1-n_2^2) + p_2 c'_2},\quad \beta'_2 = 0;$$

$$u'_2 = \frac{c'_2(u_1 p_1 + u_2 p_2)}{p_1(1-n_2^2) + p_2 c'_2},\quad v'_2 = \frac{-n_2 c'_2 (u_1 p_1 + u_2 p_2)}{p_1(1-n_2^2) + p_2 c'_2}.$$

11) In Gehlers physikalischem Wörterbuche steht eine Formel für den Fall, dass die Platten des ersten Condensators m mal grösser sind, als die des zweiten; ferner, dass die Bindungsvermögen einander gleich, und die Gleichgewichts-Coefficienten zu vernachlässigen sind. Wir setzen also:

$$p_1 = mp, p_2 = p,\ c_1 = c_2 = c'_2 = 1,\ n_1 = n_2 = n.$$

Dann ist:

$$u_1 = u_2 = \frac{a}{1-n^2},\quad v_1 = v_2 = \frac{-na}{1-n^2};$$

$$u'_2 = \frac{(m+1)u_1 p}{(m(1-n^2)+1)p} = \frac{(m+1)a}{(1+m(1-n^2))(1-n^2)}$$

In dem Gehlerschen Wörterbuche steht für u'_2 der Werth

$$\frac{ma}{(1-n^2)(2-n^2)}.$$

So lange m nicht gar gross wird, weichen die zwei Werthe, da $1-n^2$ gewöhnlich sehr klein ist, wenig von einander ab. Sobald aber m gross wird, gehen sie aus einander. Nach unserer Formel ist z. B. für $m=\infty$, u_2' ein Maximum $= \dfrac{a}{(1-n^2)^2}$, wäh-

rend nach der andern Formel u'_2 durch ein in's Unbestimmte fortgehendes Steigen von m selbst über alle Gränzen steigt, welchem Resultate aber schon die Erfahrung widerspricht.

12) Die Formeln des §. 10. lassen sich leicht für den Fall, dass mehrere Condensatoren hinter einander in Wirksamkeit treten, ausdehnen. Es sind z. B. r Condensatoren gegeben;

$$n_1\ n_2\ n_3 \ldots . n_r,\quad p_1\ p_2\ p_3 \ldots . p_r,\quad c_1\ c_2\ c_3 \ldots . c_r,$$
$$c'_2\ c'_3\ c'_4 \ldots . c'_r$$

haben analoge Bedeutung mit den im §. 10. gebrauchten gleichen Buchstaben.

Die Condensatoren werden durch ihre einen Platten mit einer Quelle von constanter Intensität a, durch ihre anderen Platten mit der Erde in Verbindung gesetzt.

Dadurch laden sie sich und es ist:

Ladung des 1sten Condensators, des 2ten, u. s. f. des $r$ten.

$$u_1 = \frac{c_1 a}{1-n_1^2}, \qquad u_2 = \frac{c_2 a}{1-n_2^2}, \ldots\ldots \qquad u_r = \frac{c_r a}{1-n_r^2};$$

$$v_1 = \frac{-n c_1 a}{1-n_1^2}; \qquad v_2 = \frac{n_2 c_2 a}{1-n_2^2}; \ldots . \qquad v_r = \frac{-n_r c_r a}{1-n_r^2}.$$

Nun trennt man die Platten des ersten Condensators, die mit der Ladung u_1 wird mit der Platte des zweiten Condensators, welche die Ladung u_2 besitzt, verbunden; wodurch diese Platte die Ladung u'_2 erhält. Hierauf wird auch der zweite Condensator getrennt, die Platte mit der Ladung u'_2 wird in Verbindung gesetzt mit der Platte des dritten Condensators, welcher die Ladung u_3 hat, wodurch leztere sich mit u'_3 ladet. So fährt man fort, bis man zuletzt zum $r$ten Condensator gelangt, dessen eine Platte dann die Ladung u'_r hat. Die Werthe u'_2, u'_3 und u'_r werden ganz sowie u'_2 in §. 10. gesucht und man findet u_1 und u'_2 wie dort; ferner

$$u'_3 = \frac{c'_3(u'_2 p_2 + u_3 p_3)}{p_2(1-n_3^2 + c'_3 p_3)},$$

u. s. f.; endlich

$$u'_r = \frac{c'_r(u'_{r-1} p_{r-1} + u_r p_r)}{p_{r-1}(1-n_r^2) + c'_r p_r}.$$

13) Sind die Bindungsvermögen aller Condensatoren $= n$ und die Gleichgewichts-Coefficienten $= 1$, haben ferner die Plattenflächen folgende Werthe:

$$p_1 = m^{r-1} p,$$
$$p_2 = m^{r-2} p,$$

$$p_3 = m^{r-3} p,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$p_r = p;$$

d. h. hat der folgende Condensator immer m mal kleinere Platten flächen, als der vorhergehende, so ist:

$$u_1 = \frac{a}{1-n^2},$$

$$u'_2 = \frac{a(m+1)}{(1-n^2)(m(1-n^2)+1)},$$

$$u'_3 = \frac{a(m(m+1)+1+m(1-n^2))}{(1-n^2)(1+m(1-n^2))^2},$$

$$u'_4 = \frac{a(m(m(m+1)+(1+m(1-n^2)))+(1+m(1-n^2))^2)}{(1-n^2)(1+m(1-n^2))^3}$$

$$= a\frac{m^2(m+1)+m(1+m(1-n^2))+(1+m(1-n^2))^2}{(1-n^2)(1+m(1-n^2))^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u'_r = a\frac{(m^{r-2}(m+1)+m^{r-3}(1+m(1-n^2))+m^{r-4}(1+m(1-n^2))^2+\ldots(1+m(1-n^2))^{r-2}}{(1-n^2)(1+m(1-n^2))^{r-1}}.$$

Wäre das n beinahe 1, so hätte man

$$u'_r = \frac{a(m^{r-1}+m^{r-2}+m^{r-3}\ldots\ldots+1)}{1-n^2} = \frac{a(m^r-1)}{(1-n^2)(m-1)}$$

als Ladung für den **kleinsten** und **letzten** Condensator.

III. Wirkung bei mehreren gleichzeitig in Thätigkeit gesetzten Condensatoren.

1) Ein Körper von der Oberfläche o und der Intensität a wird mit den einen Platten von r Condensatoren verbunden und ein zweiter Körper von der Oberfläche ω und der Intensität α mit den andern.

Die Oberflächen der Condensatorplatten sind:

$$p_1\, p_2\, p_3 \cdots\cdots p_r.$$

Die Bindungsvermögen:

$$n_1\ n_2\ n_3\ \ldots\ldots\ n_r.$$

Die Gleichgewichtscoefficienten:

$$c_1\ \gamma_1\quad c_2\ \gamma_2\quad c_3\ \gamma_3\ \ldots\ldots\ c_r\ \gamma_r.$$

In die Platten wird so lange Electricität gehen, bis die in jeder befindlichen freie Electricität und die noch übrige in den Körpern sich gegenseitig im Gleichgewicht halten. Haben die Körper am Ende noch die freien Electricitäten b und β, so sind:

$$\begin{cases} c_1 & b \\ \gamma_1 & \beta \end{cases} \quad \begin{cases} c_2 & b \\ \gamma_2 & \beta \end{cases} \quad \begin{cases} c_3 & b \\ \gamma_3 & \beta \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \begin{cases} c_r & b \\ \gamma_r & \beta \end{cases}$$

die freien Electricitäten in den Platten.

2) Sehr leicht ist es nun, die Richtigkeit nachstehender Gleichungen einzusehen:

$$u_r p_r + n_r v_r p_r = c_r b p_r,$$
$$v_r p_r + n_r u_r p_r = \gamma_r \beta p_r;$$

wo u_r und v_r die Ladungen der Platte des $r$ten Condensators bedeuten. Hieraus bestimmen sich u_r und v_r:

$$u_r = \frac{c_r b - n_r \gamma_r \beta}{1 - n_r^2}, \quad v_r = \frac{\gamma_r \beta - n_r c_r b}{1 - n_r^2}.$$

3) Eben so leicht springt die Richtigkeit folgender Gleichungen in die Augen:

$$S(u_r p_r) + b o = a o,$$
$$S(v_r p_r) + \beta \omega = \alpha \omega;$$

woraus mit Bezugnahme auf III. 2):

$$b = \frac{a\,o\,\{S\left(\frac{p_r\gamma_r}{1-n_r^2}\right)+\omega\} + \alpha\,\omega\,\{\left(\frac{n_r\gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right)\}}{o\omega + \omega S\left(\frac{c_r p_r}{1-n_r^2}\right)+o S\left(\frac{\gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right) + \{S\left(\frac{c_r p_r}{1-n_r^2}\right)\}\{S\left(\frac{\gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right)\} - \{S\left(\frac{n_r c_r p_r}{1-n_r^2}\right)\}\{S\left(\frac{n_r\gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right)\}},$$

$$\beta = \frac{\alpha\,\omega\,\{S\left(\frac{p_r c_r}{1-n_r^2}\right)+o\} + a\,o\,\{S\left(\frac{n_r c_r p_r}{1-n_r^2}\right)\}}{o\omega + \omega S\left(\frac{c_r p_r}{1-n_r^2}\right)+o S\left(\frac{\gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right) + \{S\left(\frac{c_r p_r}{1-n_r^2}\right)\}\{S\left(\frac{\gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right)\} - \{S\left(\frac{n_r c_r p_r}{1-n_r^2}\right)\}\{S\left(\frac{n_r\gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right)\}}$$

4) Wenn man diese Werthe in die Gleichungen des §. 2. setzt, so ist u_r und v_r bestimmt.

5) Schliesslich wollen wir noch den Fall in Betracht ziehen, wo die r Condensatoren schon Ladungen besitzen und nun mit zwei neuen Quellen, wie vorhin, in Verbindung gesetzt werden.

Es sind:

$$\left.\begin{array}{l} u_1\ u_2\ u_3 \ldots\ldots\ldots\ldots u_r \\ v_1\ v_2\ v_3 \ldots\ldots\ldots\ldots v_r \end{array}\right\}$$

die alten Ladungen;

$$c'_1\ \gamma'_1 \quad c'_2\ \gamma'_2 \ldots\ldots\ldots\ldots c'_r\ \gamma'_r$$

die Gleichgewichtscoefficienten;

o' und ω' sind die Flächen, a' und α' die Intensitäten der neuen Quellen;

$$\left.\begin{array}{l} u'_1\ u'_2\ u'_3 \ldots\ldots\ldots\ldots u'_r \\ v'_1\ v'_2\ v'_3 \ldots\ldots\ldots\ldots v'_r \end{array}\right\}$$

sind die neuen Ladungen;

b' und β' die freien Electricitäten der Quellen nach den neuen Ladungen.

6) Nun ist ganz wie früher

$$u'_r p_r + n_r v'_r p_r = b' c'_r p_r,$$
$$v_r p_r + n_r u'_r p_r = \beta' \gamma'_r p_r;$$

hieraus:

$$u'_r = \frac{c'_r b' - n_r \beta' \gamma'_r}{1 - n_r^2}, \quad v'_r = \frac{\gamma'_r \beta' - n_r b' c'_r}{1 - n_r^2}.$$

7) Ebenso ist dem frühern analog:

$$S(u'_r p_r) + o' b' = o' a' + S(u_r p_r),$$

$$S(v'_r p_r) + \omega' \beta' = \omega' \alpha' + S(v_r p_r);$$

hieraus folgt:

$$b' = \frac{\{S(u_r p_r) + \alpha' o'\}\,\{S\left(\frac{\gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right) + \omega'\} + \{S(v_r p_r) + \alpha' \omega'\}\,\{S\left(\frac{n_r \gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right)\}}{\{S\left(\frac{c_r p_r}{1-n_r^2}\right) + o'\}\,\{S\left(\frac{\gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right) + \omega'\} - \{S\left(\frac{n_r \gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right)\}\,\{S\left(\frac{n_r c_r p_r}{1-n_r^2}\right)\}},$$

$$\beta' = \frac{\{S(v_r p_r) + \alpha' \omega'\}\,\{S\left(\frac{c'_r p_r}{1-n_r^2}\right) + o'\} + \{S(u_r p_r) + \alpha' o'\}\,\{S\left(\frac{n_r c'_r p_r^2}{1-n_r^2}\right)\}}{\{S\left(\frac{c'_r p_r}{1-n_r^2}\right) + o'\}\,\{S\left(\frac{\gamma'_r p_r}{1-n_r^2}\right) + \omega'\} - \{S\left(\frac{n_r \gamma_r p_r}{1-n_r^2}\right)\}\,\{S\left(\frac{n_r c' p_r}{1-n_r^2}\right)\}}.$$

Diese Werthe in die Gleichungen für u' und v' gesetzt, geben diese in lauter bekannten Grössen ausgedrückt.

8) Wir wollen nun noch ein Beispiel für die letzten Formeln machen. Es seien r Condensatoren durch die einen Platten mit einer constanten Quelle a in Verbindung, durch die andern Platten aber mit der Erde. Ferner wollen wir alle Gleichgewichtscoefficienten $=1$ setzen. Ebenso alle Bindungsvermögen $=n$. Der Annahme nach ist $o=\omega=\infty$, $a=a$, $\alpha=0$;

$$\text{somit } b=a,$$
$$\beta=0.$$

Nun ist:

$$u=\frac{a}{1-n^2}=u_1=u_2=\ldots\ldots\ldots u_r,$$

$$v=-\frac{na}{1-n^2}=v_1=v_2=\ldots\ldots\ldots v_r;$$

aus den Formeln 1) und 2) dieses Abschnitts.

Wir entfernen nun die Quelle und den $r$ten Condensator, trennen die Platten des letztern und setzen die Ladung u mit den Platten, welche dieselbe Ladung schon besitzen, als neue Quelle in Verbindung. Um nun die neuen Ladungen zu erhalten, setzen wir in den Formeln 6) und 7):

$$r=r-1,\ n_1=n_2=\ldots\ldots n_{r-1}=n,\ \text{ alle } c \text{ und } \gamma=1,\ o'=p_r,$$
$$a'=u,\quad \omega=\infty,\quad \alpha=0.$$

Dann ist aus 7):

$$b'=\frac{u p_r+S(u_{r-1}p_{r-1})}{\frac{1}{1-n^2}S(p_{r-1})+p_r}=\frac{uS(p_r)}{\frac{1}{1-n^2}S(p_{r-1})+p_r},\ \beta'=0;$$

$$u'=\frac{u\,S(p_r)}{S(p_{r-1})+p_r(1-n^2)};$$

oder für u seinen Werth gesetzt, gibt endlich:

$$u'=\frac{a\,S(p_r)}{(1-n^2)\{S(p_{r-1})+p_r(1-n^2)\}}.$$

Hier ist wohl zu bemerken, dass u' die Ladung in den einen Platten aller nun noch in Wirksamkeit stehenden Condensatoren ist; da einer getrennt wurde, so sind ihrer nur noch $r-1$.

Wir entfernen nun den $(r-1)$ten Condensator und benützen, so wie vorhin, die Ladung des $r$ten, nun die Ladung dieses, d. h. wir trennen die Platten des eben entfernten $(r-1)$ten Condensators, setzen die von ihnen, welche nicht mit der Erde verbunden war, in Verbindung mit denjenigen Platten der übrigen $r-2$ Condensatoren, welche ebenfalls nicht mit der Erde verbunden waren. Diese Platten erhalten dadurch eine wie die andere die Ladung u'', und es ist:

$$u'' = \frac{u' \, S\,(p_{r-1})}{S\,(p_{r-2}) + (1-n^2)\,p_{r-1}}.$$

Entfernen wir nun den $(r-2)$ten Condensator und machen es wie vorhin, so ist die Ladung der übrigen $r-3$ Condensatoren:

$$u''' = \frac{u'' \, S\,(p_{r-2})}{S\,(p_{r-3}) + (1-n^2)\,p_{r-2}};$$

Endlich entfernen wir den 2ten Condensator, so hat der erste noch die Ladung:

$$u^{(r-1)'} = \frac{u^{(r-2)'} \, S\,(p_2)}{p_1 + (1-n^2)\,p_2}$$

Aus diesen Formeln für die u' erhalten wir endlich:

$$u^{(r-1)'} =$$

$$\frac{\{p_1+p_2\}\,\{p_1+p_2+p_3\}\,\ldots\ldots\,\{p_1+p_2\ldots+p_r\}}{\{p_1+(1-n^2)p_2\}\,\{p_1+p_2+(1-n^2)p_3\}\ldots\{p_1+p_2\ldots p_{r-1}+p_r(1-n^2)\}}\cdot\frac{a}{1-n^2}.$$

Setzen wir, wie oben im Abschnitt II. §. 13.:

$$p_r = m^{r-1}p,\ p_{r-1} = m^{r-2}p,\ p_{r-2} = m^{r-3}p,\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots p_2 = mp,\ p_1 = p;$$

so erhalten wir:

$$u^{(r-1)'} = \frac{\{1+m\}\,\{1+m+m^2\}\,\ldots\ldots\,\{1+m+\ldots\ldots m^{r-1}\}\,a}{\{1-n^2\}\{1+m(1-n^2)\}\{1+m+m^2(1-n^2)\}\ldots\{1+m\ldots m^{r-2}+m^{r-1}(1-n^2)\}}.$$

Die Art der Ladungen, wie wir sie jetzt haben, unterscheidet sich von der im Abschnitt II. nur dadurch, dass bei den auf einander folgenden Ladungen hier immer mehrere Condensatoren gleichzeitig wirken, es ihrer aber immer weniger werden, bis zu-

letzt nur der kleinste allein noch geladen wird; im II. Abschnitt ging die Ladung auch zuletzt allein auf den kleinsten Condensator über, aber bei den auf einander folgenden Ladungen war stets nur ein Condensator thätig; die Resultate sind, wie wir sehen, verschieden; wenn jedoch die Condensatoren recht gut sind, also n beinahe $=1$, so ist:

$$u^{(r-1)} = \frac{(1 + m \ldots + m^{r-1})\,a}{1 - n^2}$$

$$= \frac{(1 - m^r)\,a}{(1 - m)\,(1 - n^2)},$$

und wir erhalten demnach ganz dasselbe Resultat, welches bei gleicher Voraussetzung die Formeln in II. §. 13. gaben.

Zum Schlusse nehme ich Veranlassung dem verdienstvollen Autor „der galvanischen Kette" den innigsten Dank auszudrücken für das Schöne und Nützliche, welches zu erlernen er mir häufig Gelegenheit bot, theils als erfahrner und bewährter Lehrer in seinen Vorlesungen über Electricität, theils als wohlwollender und gefälliger Freund im nähern Umgang. Auch darf ich nicht verschweigen, dass mir sein Rath bei Abfassung dieses Aufsatzes (namentlich bei I. 6)) hülfreich zur Seite stand.

XXXI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

Die Stange AB in untenstehender Figur:



dreht sich um den Punkt E mit der Winkelgeschwindigkeit δ; längs ihr ist ein Körper (oder System von Körpern) ohne Reibung beweglich, dessen Schwerpunkt im Anfange der Bewegung in der Entfernung α von E ist (positiv nach B hin); am Ende der Zeit t wird der Schwerpunkt, wenn ausser der Fliehkraft keine andere Kraft wirkt, und die Geschwindigkeit im Anfange Null war, in der Entfernung

$$\frac{\alpha}{2}(e^{\delta t}+e^{-\delta t})$$

von E sein. Zugleich wird er, vermöge beider Bewegungen, eine Kurve beschreiben, deren Gleichung in Polarkoordinaten

$$r=\frac{\alpha}{2}(e^{\psi}+e^{-\psi})$$

ist, worin r die Entfernung eines Punktes der Kurve von E, ψ der Winkel dieses Radiusvektor mit EB ist, nach der Richtung der Bewegung hin gemessen.

Daraus folgt, dass, was auch die Winkelgeschwindigkeit und das Gleichgewicht des Körpers sei, wenn nur α dasselbe ist, immer dieselbe Kurve durchlaufen wird.

Die dem Werthe ψ_1 des Winkels ψ entsprechende Länge der Kurve, von $\psi = 0$ an gerechnet, ist

$$\alpha\sqrt{2}\left[\operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}-E\left(\varphi,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2}F\left(\varphi,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right],$$

worin

$$\cos\varphi=\sqrt{\frac{2}{e^{2\psi_1}+e^{-2\psi_1}}}=\frac{e^{\psi_1}\sqrt{2}}{\sqrt{e^{4\psi_1}+1}}.$$

Will man die Stellung des Körpers am Ende der Zeit t wissen, so sind die Werthe von r und ψ für diesen Augenblick:

$$r=\frac{\alpha}{2}(e^{\delta t}+e^{-\delta t}),\quad \psi=\delta t.$$

XXXII.

Miscellen.

Zur Abhandlung VII. in Theil XII. S. 93.

Von dem Herrn Doctor J. Dienger, Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

Man könnte gegen die dortige Beweisführung einen Einwand erheben. Es ist nämlich allerdings klar, und folgt aus der dortigen Formel (5) mit Nothwendigkeit, dass $\mathfrak{L}\left(\frac{n^n e^{-n}}{1.2..n}\right)$ nicht un-

endlich ist; zugleich ist $\mathfrak{L}\left(\frac{n^r e^{-n}}{1 \ldots . r}\right)=0$, so lange nicht $\mathfrak{L}\left(\frac{r}{n}\right)=1$, d. h. so lange nicht r um eine endliche Grösse von $n(=\infty)$ verschieden ist. Für diesen letztern Fall aber ist nicht bewiesen, dass $\mathfrak{L}\left(\frac{n^r e^{-n}}{1.2..r}\right)=0$ zu setzen sei. Es ist diess aber auch nicht nöthig. Sobald nämlich $\mathfrak{L}\left(\frac{r}{n}\right)=1$ gesetzt werden darf, wird die Formel (4) geben:

$$X=\mathfrak{L}\left(\frac{n^r e^{-n}}{1.2..r}\varphi(x)+\frac{n^{r+1}e^{-n}}{1.2..(r+1)}\varphi(x)+\ldots\ldots\right)$$

$$=\varphi(x).\mathfrak{L}\left(\frac{n^r e^{-n}}{1.2...r}+\frac{n^{r+1}e^{-n}}{1.2..(r+1)}+\frac{n^{r+2}e^{-n}}{1.2..(r+2)}+\ldots\right).$$

Aus (5) folgt, für $\varphi(x)=x$:

$$x=x.\mathfrak{L}\left(\frac{n^r e^{-n}}{1.2...r}+\frac{n^{r+1}e^{-n}}{1.2..(r+1)}+\frac{n^{r+2}e^{-n}}{1.2..(r+2)}+\ldots\ldots\right).$$

d. h.

$$\mathfrak{L}\left(\frac{n^r e^{-n}}{1.2...r}+\frac{n^{r+1}e^{-n}}{1.2..(r+1)}+\frac{n^{r+2}e^{-n}}{1.2..(r+2)}+\ldots\right)=1,$$

demnach

$$X=\varphi(x),$$

wie die Formel (8) besagt.

Ueber die Bedingungen der Konvergenz der Reihen (9) und (10) sehe man Cauchy's Vorlesungen über die Differenzialrechnung, Vorlesung 9.

Schreiben des Herrn Doctor Thomas Clausen, Observator an der Sternwarte zu Dorpat, an den Herausgeber.

Im XII ten Bande Ihres Archivs Nr. XXI. S. 293. findet sich von Professor Schlömilch ein Aufsatz, worin er beweist, dass die transcendente Function

$$(\ldots)$$

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\dots\dots =$$

weder durch reelle noch complexe Werthe von x den Werth $=-1$ erlangen könne. Es scheint mir als ob hierin ein Irrthum obwalten müsse, da es mir gelungen ist, zwei complexe Werthe von x zu finden, die dieser Gleichung Genüge leisten, nämlich: $x=-0{,}5794+0{,}6950i$ bis auf die vierte Decimalstelle genau, und $x=-2{,}51+0{,}63i$ bis auf die zweite Decimalstelle genau; ($i=\sqrt{-1}$). Es liesse sich durch weitläuftigere Rechnungen jede beliebige Genauigkeit erlangen, die jedoch für meinen Zweck, bloss das Vorhandensein dieser Wurzeln zu zeigen, ohne Nutzen sind.

Die Function $f(x)$ habe ich für den numerischen Calcul in eine schneller convergirende Reihe auf folgende Weise verwandelt:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}-\dots$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)-\dots\dots$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+2)(x+3)}-\dots$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{2^2}\frac{1}{x(x+1)}$$

$$+\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right)-\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{(x+2)(x+3)}\right)$$

$$+\dots\dots\dots$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{2^2}\frac{1}{x(x+1)}$$

$$+\frac{1}{2^2}\frac{1.2}{x(x+1)(x+2)}-\frac{1}{2^2}\frac{1.2}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\dots\dots$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{2^2}\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{2^3}\frac{1.2}{x(x+1)(x+2)}$$

$$+\frac{1.2}{2^3}\left(\frac{1}{x(x+1)(x+2)}-\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\right)-\dots\dots$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{2^2}\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1.2}{x(x+1)(x+2)}$$

$$+\frac{1.2.3}{2^3}\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}-\frac{1.2.3}{2^3}\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}\cdots$$

Durch Wiederholung der Operation erhält man:

$$f(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{2^2}\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{2^3}\frac{1.2}{x(x+1)(x+2)}$$

$$+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}+\ \ldots..$$

Das Gesetz, wonach die Reihe fortschreitet, ist augenfällig. Die Reihe selbst wird immer, gehörig verlängert, convergent, und man kann zugleich aus den letzten Gliedern, die man in Rechnung zieht, sehr leicht eine Grenze ableiten, die die Summe der übrigen vernachlässigten Glieder nicht übersteigen kann.

Druckfehler.

S. 320 in der letzten Zeile setze man II. 2) statt II. 3).

XXXIII.

Beweis des Satzes: Sind die Linien, welche aus zwei Dreieckswinkeln auf die Gegenseiten gezogen sind, und diese Dreieckswinkel in gleichen Verhältnissen theilen, einander gleich, so ist das Dreieck gleichschenklig, und zwar sind die erwähnten Gegenseiten einander gleich.

Von
Herrn Theodor Lange,
Studirenden der Mathematik zu Berlin.

I.

Alle gerade Linien aus einem Punkte A, auf denen Punkte liegen, welche von einem Punkte B den bestimmten Abstand r haben, sind Secanten aus A für den mit r als Halbmesser um den Punkt B beschriebenen Kreis. Ebenso sind alle gerade Linien aus dem Punkte B, auf denen Punkte liegen, welche von dem Punkte A den bestimmten Abstand r haben, Secanten aus B für den mit r als Halbmesser um den Punkt A gezeichneten Kreis. Man stelle sich vor, eine Secante aus B für den Kreis A drehe sich im Punkte B so, dass sie aus der Lage BA, als der ursprünglichen, sich nach einer Richtung bewege, bis sie in die Lage jeder Secante gekommen ist, welche auf der Seite AB liegt, nach welcher hin die Drehung stattfindet; der bei dieser Drehung zunehmende Winkel, welchen die Secante mit BA bildet, sei b. Sind während der Drehung auf die Secante stets die Halbmesser gezogen, so wird ein jeder derselben mit AB Winkel bilden, von denen der eine α mit dem Winkel b zunimmt, indessen der

gleichliegende Winkel α' am andern Halbmesser, bei zunehmendem b, fortwährend abnimmt. Ferner bezeichne man den Winkel, den eine Secante aus A für den Kreis um B mit AB macht, durch a, und, der obigen Bezeichnung von α und α' gemäss, die Winkel, welche die auf die Secante gezogenen Halbmesser bilden, mit β und β'.

Da die Winkel a und β sich nicht ändern, dagegen α und b gleichzeitig zunehmen, so nimmt das Verhältniss $\frac{a}{\alpha}$ ab, indessen das Verhältniss $\frac{b}{\beta}$ zunimmt. Es kann also höchstens einmal $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$ werden, während die Secante in die Lage jeder Secante auf einer Seite von AB gekommen ist. Da nun aber, wenn $a=b$ ist, immer $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$ wird, so muss auch umgekehrt

1) „immer, wenn $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$ ist, $a=b$ sein."

Nicht ganz so einfach ist der Schluss in Bezug auf die Verhältnisse $\frac{a}{\alpha'}$ und $\frac{b}{\beta'}$, weil beide gleichzeitig zunehmen. Die Gleichheit derselben findet statt, wenn $a\beta'=b\alpha'$ ist. Da $a\beta'$ eine unveränderliche Grösse ist, kommt es nur darauf an zu sehen, wie oft $\alpha'b$ einen bestimmten Werth erreichen kann, kurz die Natur des Productes $\alpha'b$ zu untersuchen, während b zunimmt. Man stelle sich vor, b wachse so, dass es immer um einen beständigen Winkel y zunehme; dabei wird der Winkel α' um die Winkel x abnehmen, welche entweder bei fortgesetzter Drehung immer kleiner werden $[AB<r]$, oder immer gleich bleiben $[AB=r]$, oder immer grösser werden $[AB>r]$. Das Product $\alpha'b$ ändert sich durch die Zunahme des Winkels b um y um die Differenz $\alpha'b-(\alpha'-x)(b+y)=x\,(b+y)-\alpha'y$. Das Vorzeichen dieser Differenz, welches dasselbe ist mit dem des Ausdrucks $\frac{x}{y}-\frac{\alpha'}{b+y}$, zeigt, ob das Product, während b zunimmt, auch zu- oder abnimmt. Der Ausdruck ist beim Beginn der Drehung negativ. Wenn, wie in Taf. IV. Fig. 3. und Fig. 4., x nicht kleiner und kleiner wird, wenn b zunimmt, so nimmt $\frac{x}{y}$ bei der Drehung nicht ab, indessen $\frac{\alpha'}{b+y}$ abnimmt. Die Differenz wird also mit negativen Werthen beginnen, sich der Null nähern, kann sie erreichen und mit positiven Zeichen zunehmen. Dasselbe lässt sich auch für Taf. IV. Fig. 5. zeigen, also, wenn die Abnahmen von α' bei zunehmendem b, abnehmen. Denn $\frac{x}{y}$ nimmt von Werthen, die kleiner als 2 sind, bis zu solchen ab, die grösser als Null sind, indessen $\frac{\alpha'}{b+y}$ von unendlich grossen Werthen bis Null abnimmt, und beide Verhältnisse in gleicher Weise sich ändern.

Da nun also obige Differenz $x(b+y)-\alpha' y$ mit negativen Werthen beginnt, sich der Null nähert, sie erreichen und mit positiven Werthen zunehmen kann, so nimmt das Product anfangs zu, bis zu einem grössten Werth, und kann von demselben wieder abnehmen. Es kann also höchstens zweimal $\alpha' b$ den bestimmten Werth $a\beta'$ erhalten, und zwar das eine Mal, wenn b grösser ist als φ (der dem grössten Werth des Productes $\alpha' b$ entsprechende Werth von b); und zum andern Male, wenn b kleiner ist als φ. Wenn $a=b$ ist, wird $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$; also ist, wenn $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ ist, entweder $a=b$ oder nicht; im ersteren Falle ist a und b gleichzeitig entweder kleiner, oder gleich, oder grösser als φ; oder a ist nicht gleich b, und dann ist auch a und b nicht gleichzeitig grösser, gleich oder kleiner als φ. Wenn also a und b gleichzeitig grösser oder gleich oder kleiner als φ ist, so ist

2) „wenn $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ ist, auch $a=b$."

Die Verhältnisse $\frac{a}{\alpha}$ und $\frac{b}{\beta'}$ können, da ersteres stets abnimmt, indessen letzteres zunimmt, höchstens einmal einander gleich werden. Ihre Gleichheit findet aber nur statt, wenn a nicht gleich b ist, es sei denn, dass $\beta=\beta'$ wäre, wo dann der Fall Nr. 1), stattfände. — Ebenso ist es mit der Gleichheit der Quotienten $\frac{a}{\alpha'}$ und $\frac{b}{\beta}$.

Es ist also in dem Bisherigen nachgewiesen, dass

1) wenn $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$ ist, immer $a=b$ ist;

2) wenn $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta'}$ ist, $a=b$ ist, wenn a und b gleichzeitig grösser oder gleich oder kleiner als φ ist;

3) wenn $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta'}$ oder $\frac{a}{\alpha'}=\frac{b}{\beta}$, nur dann $a=b$ ist, wenn $\alpha=\alpha'$ oder $\beta=\beta'$ ist.

II.

Die Auffindung des Winkels φ, für den $\alpha' b$ seinen grössten Werth hat, ist mir nicht gelungen. Jedoch lässt sich zeigen, dass φ nicht kleiner sein kann, als der Werth von b, den b hat, wenn $b=\alpha'$ ist. Der Quotient $\frac{x}{y}$ ist nämlich, wenn $AB \overset{=}{>} r$ ist, stets grösser als 1, und wenn $AB<r$ ist, so lange grösser als 1, als b kleiner als ein rechter Winkel ist, so dass also, wenn $\alpha'=b$ ist, immer $\frac{\alpha'}{b+y}<1$ und $\frac{x}{y}>1$ ist, mithin die Differenz

$\frac{x}{y} - \frac{\alpha'}{b+y}$ positiv, und deshalb das Product $\alpha' b$ im Abnehmen begriffen. Da nun der Winkel φ nicht grösser ist als PBA (der Winkel b, für den $\alpha' = b$ ist), so folgt erstens, dass, wenn a und b gleichzeitig grösser sind, als PBA, die Gleichung $\frac{a}{\alpha'} = \frac{b}{\beta'}$ die Gleichheit der Winkel a und b bedingt, zweitens, dass, wenn a und b gleichzeitig kleiner sind als PBA, die beiden Gleichungen nicht nothwendig zusammen auftreten, drittens, dass, wenn nur einer von den Winkeln a und b, grösser ist als PBA, z. B. b in Taf. IV. Fig. 5., man findet, wenn man BH zieht, $a \times ABH < a.\beta'$ und $a \times ABH > \alpha' b$, mithin $a\beta' > \alpha' b$ oder $\frac{a}{\alpha'} > \frac{b}{\beta'}$, so lange nämlich $\alpha' < a$ ist. — In Bezug auf diese drei Fälle, und in Rücksicht darauf, dass, wenn a und b gleichzeitig kleiner als PBA ist, sowohl $a < \alpha'$ als auch $b < \beta'$ ist, folgt: dass

3) „wenn $a > \alpha'$ und $b > \beta'$ ist, und $\frac{a}{\alpha'} = \frac{b}{\beta'}$, auch $a = b$ ist.“

Wenn $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta'}$ wird, ist, wie schon gezeigt ist, a nicht gleich b, es sei denn, dass $\beta = \beta'$ wäre. — Wenn $a > b$ ist und zugleich $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta'}$ wäre, müsste auch $\alpha > \beta'$ sein, was aber nicht eintreten kann, so lange b kleiner als ein rechter Winkel ist. — Wenn $a < b$ ist, und zugleich $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta'}$ wäre, müsste $a - \alpha < b - \beta'$ oder $a + \beta' < b + \alpha$ sein. Der kleinste Werth für $a + \beta'$ findet statt, wenn a gleich einem Rechten geworden ist. Die stets zunehmende Summe $b + \alpha$, wird, bis b gleich einem Rechten geworden ist, immer kleiner sein, als der kleinste Werth von $a + \beta'$. Es kann daher, so lange b kleiner als ein Rechter ist, nicht $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta'}$ sein. — Desgleichen kann, so lange a kleiner als ein Rechter ist, auch $\frac{a}{\alpha'}$ nicht gleich $\frac{b}{\beta}$ sein. Wenn daher die Winkel

4) „a und b spitz sind, kann nie $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta'}$ oder $\frac{a}{\alpha'} = \frac{b}{\beta}$ sein.“

Berücksichtigt man die vier Ergebnisse der bisherigen Untersuchung zugleich, so ergiebt sich: dass, wenn a und b spitze Winkel und beziehlich grösser als α' und β' sind, die Gleichheit der entsprechenden Verhältnisse zwischen irgend einem Paare der anstossenden Winkel in den Punkten A und B, die Gleichheit der Winkel a und b selbst bedinge; kurz dass, wenn eine der Gleichungen $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$, $\frac{a}{\alpha'} = \frac{b}{\beta'}$, $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta'}$ und $\frac{a}{\alpha'} = \frac{b}{\beta}$ stattfindet, die Winkel a und b gleich sind.

Da b und α in Bezug auf AB nur so lange dieselbe Lage wie a und β' haben, als b und a kleiner als rechte Winkel sind, und AB zugleich kleiner als r ist, so kann man anstatt der weiteren Bedingung, dass a und b kleiner als Rechter sein sollen, die engere aufstellen, dass b und α in Bezug auf AB dieselbe Lage haben sollen, wie a und β'. Jedenfalls hat nun aber b und α', und a und β' die gleiche Lage zu AB, wenn die Halbmesser, die den Winkeln α und β' entsprechen, in die Winkel a und b fallen; und mit dieser Bedingung ist zugleich auch die ausgesprochen, dass a kleiner als α', und b kleiner als β' ist.

Es ergiebt sich also folgender Satz:

Gehen aus zwei Punkten A und B einer geraden Linie zwei Strahlen unter den beliebigen Winkeln a und b aus, und fällt die aus jedem der Punkte auf diese Strahlen gezogene Gerade von der bestimmten Länge r in die Winkel, welche die Strahlen mit AB bilden, so bedingt die Gleichheit der Verhältnisse zwischen den Winkeln, welche einerseits die Strahlen, andrerseits die Halbmesser mit AB machen, die Gleichheit der Winkel a und b.

Liegt nun a und b so, dass sie Dreieckswinkel bilden, so erhält man den durch die Schwierigkeiten seines Beweises bekannten Satz: Ist in einem Dreieck aus jeder von zwei Ecken eine Linie von einer gegebenen Länge auf die Gegenseite gezogen, und theilen diese Linien den jedesmaligen Dreieckswinkel unter demselben Verhältniss, so ist das Dreieck ein gleichschenkliges.

Liegt nun a und b so, dass sie nicht Dreieckswinkel bilden, so erhält man folgenden mit dem obigen auf gleicher Linie stehenden Satz: Wird eine Gerade von zwei Strahlen geschnitten, und theilt die aus jedem Schnittpunkt auf den andern Strahl gezogene gerade Linie von der bestimmten Länge r die gleichliegenden- oder die Wechselwinkel in demselben Verhältniss, so sind die Strahlen parallel.

Nachschrift des Herausgebers.

In dem Schreiben, mit welchem der Herr Verfasser des vorstehenden Aufsatzes denselben mir zur Einrückung in's Archiv zu übersenden die Güte hatte, findet sich noch folgende Bemerkung, die ich glaube hier mittheilen zu müssen: „Wie der Herr Professor Steiner" — (durch den der Herr Verfasser auch auf die Schwierigkeit eines geometrischen Beweises des in dem vorstehenden Aufsatze behandelten Satzes aufmerksam gemacht wurde) — „mittheilte, sind jetzt von besagtem Satze nur zwei geome-

trische Beweise bekannt geworden; der eine findet sich im Journal für reine und angewandte Mathematik von Crelle und ist von Professor Steiner selbst, während ein anderer Beweis von einem Schüler der polytechnischen Schule zu Paris gegeben ist. Beide Beweise, von denen dem ersteren der Vorzug eingeräumt worden ist, sind von dem, wie ich ihn gebe, durchaus verschieden, da er dem Herrn Professor Steiner, dem ich denselben mittheilte, unbekannt war."

So weit der Herr Verfasser des vorstehenden Aufsatzes.

Zufällig sind mir die Schriften, in denen die beiden vorher angeführten geometrischen Beweise des Satzes sich finden sollen und mögen, in diesem Augenblicke nicht gleich zur Hand, und eine Vergleichung derselben mit dem von dem Herrn Verfasser gegebenen Beweise ist mir daher jetzt nicht möglich, wenn ich, was ich im Interesse der Sache nicht wünsche, die Mittheilung des obigen Aufsatzes im Archive nicht zu lange verschieben will. Jedenfalls möchte es aber gut sein, wenn die Leser des Archivs dem erwähnten Satze ihre Aufmerksamkeit schenkten und noch andere geometrische Beweise desselben zu finden suchten. Auch möchte ich den Herrn Verfasser des obigen Aufsatzes ergebenst ersuchen, gelegentlich einmal, aber so bald als möglich, den erwähnten von einem Schüler der polytechnischen Schule in Paris gefundenen geometrischen Beweis im Archive mitzutheilen, da mir selbst sowohl dieser Beweis selbst, als auch die Schrift, in welcher er sich findet, ganz unbekannt geblieben, oder von mir vielleicht übersehen worden ist, indem ich, offen gestanden, dem scheinbar so einfachen Satze bis jetzt die Aufmerksamkeit nicht geschenkt habe, welche er, da ein seiner eignen Einfachheit entsprechender einfacher Beweis nicht leicht zu führen ist, allerdings vollkommen zu verdienen scheint. Den Beweis des Herrn Professor Steiner kann jeder Leser des Archivs zwar leicht im Crelle'schen Journale nachsehen; indess ist es dem Zwecke des Archivs keineswegs entgegen, wenn es dem Herrn Studiosus T. Lange gefallen sollte — was ich recht sehr wünschen möchte — in Verbindung mit dem vorher erwähnten Beweise eines Schülers der polytechnischen Schule in Paris auch den Steiner'schen Beweis im Archive mitzutheilen, und überhaupt Alles zusammenzustellen, was ihm über den fraglichen Satz bis jetzt bekannt geworden ist, wodurch er so wie mich auch gewiss viele Leser des Archivs sich recht sehr verbinden würde. Einem mir gütigst mitgetheilten desfallsigen Aufsatze würde ich sehr gern sogleich eine Stelle im Archive einräumen.

Schliesslich will ich nun nur noch mittheilen, wie ich mir selbst den Satz im einfachsten Falle, wenn die beiden Winkel halbirt werden, mit Hülfe der Rechnung, der sich aber auch leicht die Form einer geometrischen Rechnung, um mich dieses Ausdrucks zu bedienen, wie sie die Alten anzustellen gewohnt waren, geben lassen würde, was für keinen Kenner der Geometrie der Griechen noch einer besonderen Erläuterung bedarf, da ja übrigens auch unsere algebraischen und trigonometrischen Symbole das Wesen der Sache an sich nicht ändern, sondern nur zur Abkürzung dienen und die Form etwas ändern, bewiesen habe.

Wenn in dem Dreiecke ABC (Taf. IV. Fig. 6.) der Winkel BAC durch die Linie $AD=\alpha$ halbirt ist, so hat man nach einem bekannten Satze der euklidischen Geometrie die Proportion

$$AC:AB=CD:BD$$

oder in bekannter Bezeichnung

$$b:c=a-BD:BD,$$

also

$$b.BD=ac-c.BD,$$

und hieraus sogleich

$$BD=\frac{ac}{b+c},\quad CD=\frac{ab}{b+c}.$$

Nun ist ferner in dem Dreieck ACD

$$AD^2=AC^2+CD^2-2AC.CD.\cos C,$$

also

$$\alpha^2=b^2+\frac{a^2b^2}{(b+c)^2}-\frac{2ab^2}{b+c}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

woraus nach leichter Rechnung und einer ganz einfachen algebraischen Transformation sich sogleich

$$\alpha^2=\frac{bc\{(b+c)^2-a^2\}}{(b+c)^2}=bc\{1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\}$$

ergiebt.

Werden nun in dem Dreiecke ABC (Taf. IV. Fig. 7.) die Winkel ABC und ACB durch die Linien $BE=\beta$ und $CF=\gamma$ halbirt, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\beta^2=ac\left\{1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right\},$$

$$\gamma^2=ab\left\{1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right\}.$$

Nimmt man also, wie in dem mehr erwähnten Satze, an, dass die Linien $BE=\beta$ und $CF=\gamma$, welche die Winkel ABC und ACB halbiren, einander gleich seien, dass also $\beta=\gamma$, und folglich auch $\beta^2=\gamma^2$ sei; so ist nach dem Vorhergehenden

$$ac\left\{1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right\}=ab\left\{1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right\},$$

also

$$c\left\{1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right\}=b\left\{1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right\},$$

und folglich

$$b-c=\frac{bc^2}{(a+b)^2}-\frac{cb^2}{(a+c)^2}=bc\frac{c(a+c)^2-b(a+b)^2}{(a+b)^2(a+c)^2}$$

oder

$$(b-c)(a+b)^2(a+c)^2=bc\{c(a+c)^2-b(a+b)^2\},$$

d. i., wie man leicht findet,

$$(b-c)(a+b)^2(a+c)^2=bc\{(c^3-b^3)+2a(c^2-b^2)+a^2(c-b)\}$$

oder

$$(b-c)(a+b)^2(a+c)^2=-bc\{(b^3-c^3)+2a(b^2-c^2)+a^2(b-c)\}.$$

Wäre nun nicht $b=c$, d. i. nicht $b-c=0$, so würde es verstattet sein, auf beiden Seiten der vorstehenden Gleichung mit $b-c$ zu dividiren, was nach leichter Ausführung der Rechnung zu der Gleichung

$$(a+b)^2(a+c)^2=-bc\{b^2+bc+c^2+2a(b+c)+a^2\},$$

oder zu der Gleichung

$$(a+b)^2(a+c)^2+bc\{b^2+bc+c^2+2a(b+c)+a^2\}=0$$

führt. Diese Gleichung ist aber, insofern natürlich a, b, c sämmtlich positiv sind und nicht verschwinden, was sich hier von selbst versteht, offenbar völlig ungereimt, weshalb es falsch ist, dass nicht $b-c=0$ wäre. Also ist $b-c=0$, d. h. unter der Voraussetzung, dass die Linien $BE=\beta$ und $CF=\gamma$, welche die Winkel ABC und ACB des Dreiecks ABC halbiren, einander gleich sind, ist immer $b=c$, nämlich $AC=AB$, welches der zu beweisende Satz ist.

Ich wiederhole, dass mir die Mittheilung geometrischer Beweise für den fraglichen Satz angenehm sein und mich zu Dank verpflichten wird. G.

XXXIV.

Ueber das Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische oder das Problem der drei Punkte.

Von

dem Herausgeber.

Am Eingange dieses Aufsatzes kann ich die vorläufige Bemerkung nicht unterdrücken, dass die in demselben angestellten Betrachtungen weniger für die Praxis des Rückwärtseinschneidens, als in theoretischer Beziehung einiges Interesse darbieten dürften, weil mich dieselben zu einigen, wie ich glaube, bemerkenswerthen geometrischen Sätzen geführt haben. Ich hätte leicht eine andere passendere Ueberschrift wählen können, habe aber die obige absichtlich beibehalten, weil mir Untersuchungen über das Rückwärtseinschneiden zu diesen Betrachtungen Veranlassung gegeben haben, und ich dem vorliegenden Aufsatze späterhin noch einige andere von ähnlicher Tendenz folgen zu lassen hoffe.

Wir wollen uns vier in gerader Linie liegende Punkte A, A', B, B' und einen fünften nicht in dieser geraden Linie liegenden Punkt C denken. Beschreiben wir dann durch die drei Punkte A, C, A' und durch die drei Punkte B, C, B', d. h. um die beiden Dreiecke ACA' und BCB', zwei Kreise, so werden sich diese beiden Kreise ausser in dem Punkte C noch in einem zweiten Punkte D schneiden, mit dessen näherer Bestimmung wir uns jetzt beschäftigen wollen.

Zu dem Ende nehmen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xy an, dessen Axe der x die gerade Linie sein soll, in welcher die vier Punkte A, A', B, B' nach der Voraussetzung liegen. In Bezug auf dieses Coordinatensystem seien die Coordinaten der Punkte

$$A,\ A',\ B,\ B',\ C$$

respective:

$$a,\ 0;\ a',\ 0;\ b,\ 0;\ b',\ 0;\ m,\ n.$$

Die Gleichungen der durch die Punkte A, C, A' und B, C, B' beschriebenen Kreise seien respective

$$1)\qquad (x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

und

$$2)\qquad (x-p')^2+(y-q')^2=r'^2,$$

wo die Bedeutung der Symbole p, q, r und p', q', r' aus der Theorie des Kreises bekannt ist.

Da der erste dieser beiden Kreise durch die drei Punkte A, A', C geht, so liefert die Gleichung 1) zur Bestimmung der Grössen p, q, r die folgenden Gleichungen:

$$3)\qquad \begin{cases}(a-p)^2+q^2=r^2,\\ (a'-p)^2+q^2=r^2,\\ (m-p)^2+(n-q)^2=r^2.\end{cases}$$

Aus den beiden ersten dieser drei Gleichungen folgt:

$$4)\qquad \begin{cases}a^2-2ap=r^2-p^2-q^2,\\ a'^2-2a'p=r^2-p^2-q^2;\end{cases}$$

also durch Subtraction

$$a^2-a'^2-2(a-a')p=(a-a')(a+a')-2(a-a')p=0,$$

folglich

$$a+a'-2p=0,$$

und hieraus

$$5)\qquad p=\frac{1}{2}(a+a'),$$

wovon die Richtigkeit auch aus bekannten Elementarsätzen auf der Stelle erhellet.

Aus der dritten der drei Gleichungen 3) folgt

$$m^2+n^2-2mp-2nq=r^2-p^2-q^2,$$

also nach 4)

$$6)\qquad m^2+n^2-2mp-2nq=a^2-2ap=a'^2-2a'p.$$

Führt man in diese Gleichung den Werth von p aus 5) ein, so erhält man:

$$m^2+n^2-m(a+a')-2nq$$
$$=a^2-a(a+a')=a'^2-a'(a+a')=-aa',$$

folglich

$$2nq=m^2+n^2+aa'-m(a+a'),$$

und hieraus

$$7)\qquad q=\frac{(m-a)\,(m-a')+a^2}{2n}=\frac{1}{2}n+\frac{(m-a)(m-a')}{2n}.$$

Endlich erhält man, wenn man in die erste oder zweite, oder in die dritte der Gleichungen 3) für p und q ihre vorher gefundenen Werthe 5) und 7) einführt, für $4r^2$ die folgenden Ausdrücke:

$$4r^2=(a-a')^2+\left\{\frac{(m-a)\,(m-a')+n^2}{n}\right\}^2$$
$$=\{m-\frac{1}{2}(a+a')\}^2+\left\{\frac{(m-a)(m-a')-n^2}{n}\right\}^2,$$

also

$$8)\qquad 2r=\sqrt{(a-a')^2+\left\{\frac{(m-a)\,(m-a')+n^2}{n}\right\}^2}$$
$$=\sqrt{\{m-\frac{1}{2}(a+a')\}^2+\left\{\frac{(m-a)\,(m-a')-n^2}{n}\right\}^2}.$$

Stellen wir nun die gefundenen Werthe von p, q, r nochmals zusammen, so erhalten wir:

$$9)\qquad \begin{cases} p=\frac{1}{2}(a+a'), \\ q=\frac{(m-a)\,(m-a')+n^2}{2n}=\frac{1}{2}n+\frac{(m-a)\,(m-a')}{2n}, \\ r=\frac{1}{2}\sqrt{(a-a')^2+\left[\frac{(m-a)\,(m-a')+n^2}{n}\right]^2} \\ \quad=\frac{1}{2}\sqrt{\{m-\frac{1}{2}(a+a')\}^2+\left[\frac{(m-a)\,(m-a')-n^2}{n}\right]^2}; \end{cases}$$

und für p', q', r' ergeben sich ganz auf dieselbe Weise die folgenden Ausdrücke:

$$10)\quad\begin{cases} p'=\frac{1}{2}(b+b'), \\ q'=\frac{(m-b)(m-b')+n^2}{2n}=\frac{1}{2}n+\frac{(m-b)(m-b')}{2n}, \\ r'=\frac{1}{2}\sqrt{(b-b')^2+\left[\frac{(m-b)(m-b')+n^2}{n}\right]^2} \\ \quad=\frac{1}{2}\sqrt{\{m-\frac{1}{2}(b+b')\}^2+\left[\frac{(m-b)(m-b')-n^2}{n}\right]^2}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden Kreise überhaupt durch X, Y, so haben wir zu deren Bestimmung nach 1) und 2) die beiden folgenden Gleichungen:

$$11)\quad\begin{cases}(X-p)^2+(Y-q)^2=r^2, \\ (X-p')^2+(Y-q')^2=r'^2;\end{cases}$$

d. i.

$$12)\quad\begin{cases}X^2+Y^2-2pX-2qY=r^2-p^2-q^2, \\ X^2+Y^2-2p'X-2q'Y=r'^2-p'^2-q'^2;\end{cases}$$

aus denen sich durch Subtraction die Gleichung

$$13)\quad 2(p-p')X+2(q-q')Y=(r'^2-p'^2-q'^2)-(r^2-p^2-q^2)$$

ergiebt. Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$r^2-p^2-q^2=a^2-2ap=a^2-a(a+a')=-aa',$$
$$r'^2-p'^2-q'^2=b^2-2bp'=b^2-b(b+b')=-bb';$$

und wir haben daher nach 13) die Gleichung:

$$14)\quad 2(p-p')X+2(q-q')Y=aa'-bb',$$

oder, wie aus dieser Gleichung ferner leicht folgt, die Gleichung:

$$15)\quad 2(p-p')(X-p)+2(q-q')(Y-q)$$
$$=aa'-bb'-2p(p-p')-2q(q-q').$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$16)\quad Y-q=\frac{aa'-bb'-2p(p-p')-2q(q-q')-2(p-p')(X-p)}{2(q-q')},$$

und nach 11) haben wir daher zur Bestimmung von $X-p$ die folgende Gleichung des zweiten Grades:

$$17)\quad (X-p)^2$$
$$+\left[\frac{aa'-bb'-2p(p-p')-2q(q-q')-2(p-p')(X-p)}{2(q-q')}\right]^2=r^2,$$

welche nach gehöriger Entwickelung die Form

$$18)\quad (X-p)^2-\frac{(p-p')\{aa'-bb'-2p(p-p')-2q(q-q')\}}{(p-p')^2+(q-q')^2}(X-p)$$

$$=\frac{4(q-q')^2r^2-\{aa'-bb'-2p(p-p')-2q(q-q')\}^2}{4\{(p-p')^2+(q-q')^2\}}$$

erhält.

Setzen wir jetzt der Kürze wegen

$$19)\qquad P=(p-p')^2+(q-q')^2$$

und

$$20)\qquad Q=aa'-bb'-2p(p-p')-2q(q-q'),$$

so wird die Gleichung 18):

$$21)\qquad (X-p)^2-\frac{(p-p')Q}{P}(X-p)=\frac{4(q-q')^2r^2-Q^2}{4P},$$

und führt, auf gewöhnliche Weise aufgelöst, zu dem folgenden Ausdrucke von $X-p$:

$$22)\qquad X-p=\frac{(p-p')Q\pm(q-q')\sqrt{4r^2P-Q^2}}{2P}.$$

Weil ferner nach 16)

$$Y-q=\frac{Q-2(p-p')(X-p)}{2(q-q')}$$

ist, so erhält man durch Einführung des vorhergehenden Aus drucks von $X-p$:

$$23)\qquad Y-q=\frac{(q-q')Q\mp(p-p')\sqrt{4r^2P-Q^2}}{2P},$$

und wir haben daher jetzt zur Bestimmung von X und Y die folgenden Formeln, in denen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen:

$$24)\qquad \begin{cases} X-p=\dfrac{(p-p')Q\pm(q-q')\sqrt{4r^2P-Q^2}}{2P}, \\[2ex] Y-q=\dfrac{(q-q')Q\mp(p-p')\sqrt{4r^2P-Q^2}}{2P}. \end{cases}$$

Um uns die Rechnung zu erleichtern, wollen wir jetzt, was offenbar verstattet ist, $m=0$ setzen, d. h. wir wollen den Durchschnittspunkt der geraden Linie, in welcher die Punkte A, A',

B, B' liegen, mit dem von dem Punkte C auf dieselbe gefällten Perpendikel als Anfang der Coordinaten annehmen. Dann ist nach 9):

$$25)\qquad p=\frac{1}{2}(a+a'),\ q=\frac{aa'+n^2}{2n};$$

und nach 10):

$$26)\qquad p'=\frac{1}{2}(b+b'),\ q'=\frac{bb'+n^2}{2n};$$

also nach 19) und 20):

$$\begin{aligned}
&4r^2P-Q^2\\
&=4r^2\{(p-p')^2+(q-q')^2\}-\{aa'-bb'-2p(p-p')-2q(q-q')\}^2\\
&=-(aa'-bb')^2+4(aa'-bb')p(p-p')\\
&\qquad\qquad +4(aa'-bb')q(q-q')\\
&\qquad\qquad -8pq(p-p')(q-q')\\
&\qquad\qquad +4(r^2-p^2)(p-p')^2\\
&\qquad\qquad +4(r^2-q^2)(q-q')^2\\
&=-(aa'-bb')^2\\
&\quad +(aa'-bb')(a+a')\{(a+a')-(b+b')\}\\
&\quad +(aa'-bb')^2.\frac{aa'+n^2}{n^2}\\
&\quad -\frac{1}{2}(aa'-bb')(a+a')\{(a+a')-(b+b')\}.\frac{aa'+n^2}{n^2}\\
&\quad -\frac{1}{4}\left\{4aa'-\left(\frac{aa'+n^2}{n}\right)^2\right\}\{(a+a')-(b+b')\}^2\\
&\quad +\frac{1}{4}(a-a')^2.\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2\\
&=\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2\{aa'+\frac{1}{4}(a-a')^2\}\\
&\quad +(aa'-bb')(a+a')\{(a+a')-(b+b')\}.\frac{n^2-aa'}{2n^2}\\
&\quad +\frac{a^2a'^2-2aa'n^2+n^4}{4n^2}\{(a+a')-(b+b')\}^2\\
&=\left(\frac{a+a'}{2}\right)^2.\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2\\
&\quad +2\,\frac{a+a'}{2}.\frac{aa'-bb'}{n}\{(a+a')-(b+b')\}.\frac{n^2-aa'}{2n}\\
&\quad +\{(a+a')-(b+b')\}^2.\left(\frac{n^2-aa'}{2n}\right)^2
\end{aligned}$$

$$=\left[\frac{a+a'}{2}\cdot\frac{aa'-bb'}{n}+((a+a')-(b+b'))\cdot\frac{n^2-aa}{2n}\right]^2,$$

und folglich nach 24):

$$\{((a+a')-(b+b'))^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2\}\{X-\frac{1}{2}(a+a')\}$$

$$=\{(a+a')-(b+b')\}$$

$$\times\left\{aa'-bb'-\frac{1}{2}(a+a')((a+a')-(b+b'))-\frac{n^2+aa'}{n}\cdot\frac{aa'-bb'}{2n}\right\}$$

$$\pm\frac{aa'-bb'}{2n}\left\{(a+a')\frac{aa'-bb'}{n}+((a+a')-(b+b'))\cdot\frac{n^2-aa'}{n}\right\}$$

$$=\{(a+a')-(b+b')\}\left\{\begin{array}{l}aa'-bb'-\frac{1}{2}(a+a')((a+a')-(b+b'))\\-\left(\frac{n^2+aa'}{n}\mp\frac{n^2-aa'}{n}\right)\frac{aa'-bb'}{2n}\end{array}\right\}$$

$$\pm\frac{1}{2}(a+a')\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2.$$

Nimmt man die untern Zeichen, so wird

$$\{((a+a')-(b+b'))^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2\}\{X-\frac{1}{2}(a+a')\}$$

$$=-\frac{1}{2}(a+a')\{((a+a')-(b+b'))^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2\},$$

und folglich

$$X-\frac{1}{2}(a+a')=-\frac{1}{2}(a+a'),$$

also $X=0$, woraus man sieht, dass die untern Zeichen dem Durchschnittspunkte C der beiden Kreise entsprechen, und dass man also, wenn man die Coordinaten des Durchschnittspunkts D der beiden Kreise haben will im Vorhergehenden die obern Zeichen nehmen muss.

Dadurch erhält man:

$$\{((a+a')-(b+b'))^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2\}\{X-\frac{1}{2}(a+a')\}$$

$$=-\frac{1}{2}(a+a')\{((a+a')-(b+b'))^2-\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2\}$$

$$+\frac{\{(a+a')-(b+b')\}(aa'-bb')(n^2-aa')}{n^2},$$

also

$$\{((a+a')-(b+b'))^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2\}X$$

$$=\frac{aa'-bb'}{n^2}\{(a+a')(aa'-bb')+((a+a')-(b+b'))(n^2-aa')\}$$

$$=\frac{aa'-bb'}{n^2}\{(a+a')(n^2-bb')-(b+b')(n^2-aa')\}$$

oder

$$\{((a+a')-(b+b'))^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2\}X$$

$$=(aa'-bb')\{(a+a')\left(1-\frac{bb'}{n^2}\right)-(b+b')\left(1-\frac{aa'}{n^2}\right)\},$$

und folglich

$$27)\quad X=\frac{(aa'-bb')\{(a+a')\left(1-\frac{bb'}{n^2}\right)-(b+b')\left(1-\frac{aa'}{n^2}\right)\}}{\{(a+a')-(b+b')\}^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2}.$$

Mittelst der zweiten der Gleichungen 24) könnte man auf ähnliche Weise den Werth von Y ermitteln. Man kann zu demselben aber auch auf folgende Art gelangen.

Man setze

$$X'-p=\frac{(p-p')Q+(q-q')\sqrt{4r^2P-Q^2}}{2P},$$

$$Y'-q=\frac{(q-q')Q-(p-p')\sqrt{4r^2P-Q^2}}{2P}$$

und

$$X''-p=\frac{(p-p')Q-(q-q')\sqrt{4r^2P-Q^2}}{2P},$$

$$Y''-q=\frac{(q-q')Q+(p-p')\sqrt{4r^2P-Q^2}}{2P};$$

so ist nach dem Obigen

$$y-Y'=\frac{Y'-Y''}{X'-X''}(x-X')$$

oder

$$y - Y'' = \frac{Y' - Y''}{X' - X''}(x - X'')$$

die Gleichung der Linie CD. Weil nun

$$X' - X'' = \frac{(q - q')\sqrt{4r^2P - Q^2}}{2P},$$

$$Y' - Y'' = -\frac{(p - p')\sqrt{4r^2P - Q^2}}{2P}$$

und immer entweder

$$X' = m,\ Y' = n \text{ oder } X'' = m,\ Y'' = n$$

ist, so ist

$$y - n = -\frac{p - p'}{q - q'}(x - m)$$

die Gleichung der Linie CD. Nach den allgemeinen Formeln 9) und 10) ist aber

$$p - p' = \frac{(a + a') - (b + b')}{2},$$

$$q - q' = \frac{(m - a)(m - a') - (m - b)(m - b')}{2n};$$

und die Gleichung der Linie CD ist folglich

28) $$y - n = -\frac{n\{(a + a') - (b + b')\}}{(m - a)(m - a') - (m - b)(m - b')}(x - m),$$

also für $m = 0$:

29) $$y - n = -\frac{n\{(a + a') - (b + b')\}}{aa' - bb'}x.$$

Weil nun der Punkt (XY) in dieser Linie liegt, so ist

29*) $$Y - n = -\frac{n\{(a + a') - (b + b')\}}{aa' - bb'}X,$$

d. i. nach 27):

$$Y-n=-\frac{n\{(a+a')-(b+b')\}\{(a+a')\left(1-\frac{bb'}{n^2}\right)-(b+b')\left(1-\frac{aa'}{n^2}\right)\}}{\{(a+a')-(b+b')\}^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2},$$

folglich, wie man hieraus leicht findet:

$$30)\quad Y=\frac{1}{n}\cdot\frac{(aa'-bb')^2-\{(a+a')-(b+b')\}\{aa'(b+b')-bb'(a+a')\}}{\{(a+a')-(b+b')\}^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2}.$$

Daher haben wir zur Bestimmung der Coordinaten X, Y des Punktes D jetzt die beiden folgenden Formeln:

$$31)\left\{\begin{array}{l}X=\dfrac{(aa'-bb')\{(a+a')\left(1-\frac{bb'}{n^2}\right)-(b+b')\left(1-\frac{aa'}{n^2}\right)\}}{\{(a+a')-(b+b')\}^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2},\\[2ex] Y=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{(aa'-bb')^2-\{(a+a')-(b+b')\}\{aa'(b+b')-bb'(a+a')\}}{\{(a+a')-(b+b')\}^2+\left(\frac{aa'-bb'}{n}\right)^2}.\end{array}\right.$$

Will man aus diesen für $m=0$ geltenden Formeln die allgemeinen für jedes m geltenden Formeln ableiten, so braucht man in denselben, wie leicht mittelst der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten erhellen wird, bloss für

$$a,\ a',\ b,\ b',\ X$$

respective

$$a-m,\ a'-m,\ b-m,\ b'-m,\ X-m$$

zu setzen, was wir, als nicht der geringsten Schwierigkeit unterliegend, füglich dem Leser überlassen können.

Die allgemeine Gleichung der Linie CD war nach 28)

$$y-n=-\frac{n\{(a+a')-(b+b')\}}{(m-a)(m-a')-(m-b)(m-b')}(x-m).$$

Bezeichnen wir nun die erste Coordinate des Durchschnittspunkts dieser Linie mit der Axe der x, d. i. mit der geraden Linie, in welcher nach der Voraussetzung die vier Punkte A, A', B, B' liegen, durch $\mathfrak{X}$, so ist

$$\mathfrak{X}-m=\frac{(m-a)(m-a')-(m-b)(m-b')}{(a+a')-(b+b')},$$

und folglich

$$32)\qquad \mathfrak{X}=m+\frac{(m-a)(m-a')-(m-b)(m-b')}{(a+a')-(b+b')}$$

oder

$$33)\qquad \mathfrak{X}=m+\frac{(m-a)(m-a')-(m-b)(m-b')}{(a-b)+(a'-b')};$$

woraus sich aber nach gehöriger Entwickelung leicht

$$34)\qquad X=\frac{aa'-bb'}{(a+a')-(b+b')}$$

oder

$$35)\qquad X=\frac{aa'-bb'}{(a-b)+(a'-b')}$$

ergiebt.

Weil diese Ausdrücke von m und n ganz unabhängig sind, so sieht man, dass die gerade Linie, in welcher die vier unveränderlichen Punkte A, A', B, B' liegen, was auch der fünfte Punkt C für eine Lage haben mag, von der Linie CD immer in einem und demselben Punkte geschnitten wird, ein Resultat, welches sich auch leicht auf ganz elementare Weise aus den bekanntesten Sätzen vom Kreise ableiten lässt.

Wenn man aus der ersten der beiden für $m=0$ geltenden Gleichungen 31) die Grösse n^2 bestimmt, so erhält man:

$$n^2=-\frac{aa'-bb'}{(a+a')-(b+b')}\cdot\frac{aa'(b+b')-bb'(a+a')-(aa'-bb')X}{aa'-bb'-\{(a+a')-(b+b')\}X}.$$

Nach 29*) ist aber

$$n=\frac{(aa'-bb')Y}{aa'-bb'-\{(a+a')-(b+b')\}X},$$

welches, mit dem Vorhergehenden verglichen, zu der Gleichung

$$\frac{aa'(b+b')-bb'(a+a')-(aa'-bb')X}{(a+a')-(b+b')}$$

$$=-\frac{(aa'-bb')Y^2}{aa'-bb'-\{(a+a')-(b+b')\}X}$$

führt. Diese Gleichung bringt man aber nach gehöriger Entwickelung leicht auf die Form

36)
$$X^2+Y^2-\left.\begin{matrix}\dfrac{(aa'-bb')^2+\{(a+a')-(b+b')\}\{aa'(b+b')-bb'(a+a')\}}{(aa'-bb')\{(a+a')-(b+b')\}}X\\ +\dfrac{aa'(b+b')-bb'(a+a')}{(a+a')-(b+b')}\end{matrix}\right\}=0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung

$$(X-P_1)^2+(Y-Q_1)^2=R_1{}^2,$$

d. i. mit der Gleichung

$$X^2+Y^2-2P_1X-2Q_1\,Y+P_1{}^2+Q_1{}^2-R_1{}^2=0,$$

so erhält man zur Bestimmung von P_1, Q_1, R_1 die drei folgenden Gleichungen:

$$P_1=\frac{(aa'-bb')^2+\{(a+a')-(b+b')\}\{aa'(b+b')-bb'(a+a')\}}{2(aa'-bb')\{(a+a')-(b+b')\}},$$

$$Q_1=0,$$

$$P_1{}^2+Q_1{}^2-R_1{}^2=\frac{aa'(b+b')-bb'(a+a')}{(a+a')-(b+b')};$$

aus denen sich leicht

37)
$$\left\{\begin{array}{l}P_1=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{aa'-bb'}{(a+a')-(b+b')}+\dfrac{aa'(b+b')-bb'(a+a')}{aa'-bb'}\right],\\ Q_1=0,\\ R_1{}^2=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{aa'-bb'}{(a+a')-(b+b')}-\dfrac{aa'(b+b')-bb'(a+a')}{aa'-bb'}\right]^2;\end{array}\right.$$

oder auch

38)
$$\left\{\begin{array}{l}P_1=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{aa'-bb'}{(a+a')-(b+b')}+\dfrac{aa'(b+b')-bb'(a+a')}{aa'-bb'}\right],\\ Q_1=0,\\ R_1=\pm\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{aa'-bb'}{(a+a')-(b+b')}-\dfrac{aa'(b+b')-bb'(a+a')}{aa'-bb'}\right];\end{array}\right.$$

wo man das Zeichen immer so zu nehmen hat, dass R_1 positiv wird, ergiebt.

Hieraus sieht man, dass die Gleichung 36) einem Kreise angehört, dessen Mittelpunkt in der geraden Linie liegt, in welcher die vier unveränderlichen Punkte A, A', B, B' liegen.

Setzt man in der Gleichung

$$(X-P_1)^2+(Y-Q_1)^2=R_1{}^2$$

die Grösse $Y=0$, so erhält man

$$X-P_1=\pm R_1, \text{ also } X=P_1\pm R_1;$$

und wenn man nun die aus dem Obigen bekannten Werthe von P_1 und R_1 einführt, so ergiebt sich mittelst leichter Rechnung, dass dem Werthe $Y=0$ immer die beiden folgenden Werthe von X entsprechen:

$$\frac{aa'-bb'}{(a+a')-(b+b')}, \quad \frac{aa'(b+b')-bb'(a+a')}{aa'-bb'};$$

so dass also der durch die Gleichung 36) charakterisirte Kreis immer durch den durch die Coordinaten

$$\frac{aa'-bb'}{(a+a')-(b+b')}, 0$$

bestimmten Punkt geht.

Hält man dies aber mit dem Obigen zusammen, so ergiebt sich der folgende bemerkenswerthe Satz, zu dessen Erläuterung man Taf. V. Fig. 1. zu vergleichen hat.

Lehrsatz.

Wenn vier Punkte A, A', B, B' in einer und derselben geraden Linie liegen und C ein fünfter nicht in dieser geraden Linie liegender Punkt ist, durch die Punkte A, C, A' und B, C, B' aber Kreise beschrieben werden, deren zweiter Durchschnittspunkt durch D bezeichnet wird; so schneiden für alle in einer und derselben auf der geraden Linie, in welcher die vier Punkte A, A', B, B' liegen, senkrecht stehenden Linie liegende Punkte C die entsprechenden Linien CD die gerade Linie, in welcher die vier unveränderlichen Punkte A, A', B, B' liegen, sämmtlich in einem und demselben Punkte E, und die den Punkten C entsprechenden Punkte D liegen sämmtlich auf einem durch den Punkt E gehenden Kreise, dessen Mittelpunkt in der geraden Linie liegt, in welcher die vier unveränderlichen Punkte A, A', B, B' liegen.

Wenn man nur einen der Punkte D durch Construction sucht, so kann man nach diesem Satze immer leicht sowohl den Punkt E, als auch den Kreis, in welchem die sämmtlichen Punkte D liegen, construiren.

Aus der Gleichung 34) erhält man leicht:

$$39)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}-a=\dfrac{(a-b)(b'-a)}{(a+a')-(b+b')}, \\ \mathfrak{X}-b=\dfrac{(a-b)(a'-b)}{(a+a')-(b+b')}; \end{cases}$$

also

$$40)\quad \mathfrak{X}-a:\mathfrak{X}-b=b'-a:a'-b;$$

ferner

$$41)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}-a'=\dfrac{(a'-b')(b-a')}{(a+a')-(b+b')}, \\ \mathfrak{X}-b'=\dfrac{(a'-b')(a-b')}{(a+a')-(b+b')}; \end{cases}$$

also

$$42)\quad \mathfrak{X}-a':\mathfrak{X}-b'=b-a':a-b'.$$

Bezeichnen wir jetzt der Kürze wegen den Durchschnittspunkt der Linien AB und CD durch O; so sind nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten offenbar

$$\mathfrak{X}-a \text{ und } \mathfrak{X}-b$$

die ersten Coordinaten des Punktes O in Bezug auf die Punkte

$$A \text{ und } B$$

als Anfangspunkte der Coordinaten, und

$$b'-a \text{ und } a'-b$$

sind die ersten Coordinaten der Punkte

$$B' \text{ und } A'$$

in Bezug auf die Punkte

$$A \text{ und } B$$

als Anfangspunkte der Coordinaten. Wenn nun die Coordinaten $b'-a$ und $a'-b$ ungleiche Vorzeichen haben, d. h. wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus nach entgegengesetzten Seiten hin liegen, so haben wegen der Proportion 40) auch die Coordinaten $\mathfrak{X}-a$ und $\mathfrak{X}-b$ ungleiche Vorzeichen, d. h. der Punkt O liegt zwischen den Punkten A und B. Wenn dagegen die Coordinaten $b'-a$ und $a'-b$ gleiche Vorzeichen haben, d. h. wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus nach denselben Seiten hin liegen, so haben wegen der Proportion 40) auch die Coordinaten $\mathfrak{X}-a$ und $\mathfrak{X}-b$ gleiche Vorzeichen, d. h. der Punkt O liegt nicht zwi-

schen den Punkten A und B. In allen Fällen hat man aber nach 40) die Proportion

$$43)\qquad AO:BO=AB':BA'^{*)},$$

aus welcher zugleich unmittelbar hervorgeht, dass in dem Falle wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus nach denselben Seiten hin liegen, jenachdem

$$AB'>BA' \text{ oder } AB'<BA'$$

ist, der Punkt O in der Verlängerung der Linie AB über den Punkt B hinaus, oder in der Verlängerung der Linie AB über den Punkt A hinaus liegt.

Nimmt man jetzt alles Vorhergehende zusammen, so ergeben sich zur Bestimmung der Lage des Punktes O in der Linie AB oder deren Verlängerungen, und dadurch auch zugleich der Lage der Linie CD die folgenden einfachen Regeln.

Wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus nach entgegengesetzten Seiten hin liegen, so liegt der Punkt O in der Linie AB, und seine Entfernungen AO und BO von den Punkten A und B verhalten sich wie die Linien AB' und BA' zu einander.

Wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus nach derselben Seite hin liegen und

$$AB'>BA'$$

ist, so liegt der Punkt O in der Verlängerung der Linie AB über den Punkt B hinaus, und seine Entfernungen AO und BO von den Punkten A und B verhalten sich wie die Linien AB' und BA' zu einander.

---

*) Dass sich diese Proportion auch leicht aus ganz bekannten Elementarsätzen vom Kreise ableiten lässt, wird ein Jeder sogleich übersehen. Es ist nämlich mit Rücksicht auf Taf. V. Fig. 2.

$$AO.A'O=CO.DO,$$

$$BO.B'O=CO.DO;$$

also

$$AO.A'O=BO.B'O,$$

und folglich

$$AO:BO=B'O:A'O.$$

also auch

$$AO:BO=B'O:A'O=AO-B'O:BO-A'O,$$

d. i.

$$AO:B'O=B'O:A'O=AB':BA'.$$

Wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus nach derselben Seite hin liegen und

$$AB' < BA'$$

ist, so liegt der Punkt O in der Verlängerung der Linie AB über den Punkt A hinaus, und seine Entfernungen AO und BO von den Punkten A und B verhalten sich wie die Linien AB' und BA' zu einander.

Wenn man die Proportionen 40) und 42) mit einander vergleicht, so fällt auf der Stelle in die Augen, dass man im Vorhergehenden die Punkte A, A' und B, B' gegen einander vertauschen, und daher die Regeln zur Bestimmung der Lage des Punktes O in der Linie AB oder deren Verlängerungen, und dadurch zugleich der Lage der Linie CD auch auf folgenden Ausdruck bringen kann.

Wenn die Punkte B und A respective von den Punkten A' und B' aus nach entgegengesetzten Seiten hin liegen, so liegt der Punkt O in der Linie $A'B'$, und seine Entfernungen $A'O$ und $B'O$ von den Punkten A' und B' verhalten sich wie die Linien $A'B$ und $B'A$ zu einander.

Wenn die Punkte B und A respective von den Punkten A' und B' aus nach derselben Seite hin liegen und

$$A'B > B'A$$

ist, so liegt der Punkt O in der Verlängerung der Linie $A'B'$ über den Punkt B' hinaus, und seine Entfernungen $A'O$ und $B'O$ von den Punkten A' und B' verhalten sich wie die Linien $A'B$ und $B'A$ zu einander.

Wenn die Punkte B und A respective von den Punkten A' und B' aus nach derselben Seite hin liegen und

$$A'B < B'A$$

ist, so liegt der Punkt O in der Verlängerung der Linie $A'B'$ über den Punkt A' hinaus, und seine Entfernungen $A'O$ und $B'O$ von den Punkten A' und B' verhalten sich wie die Linien $A'B$ und $B'A$ zu einander.

In dem im Vorhergehenden noch nicht berücksichtigten Falle, wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus, oder, was dasselbe ist, die Punkte B und A respective von den Punkten A' und B' aus nach derselben Seite hin liegen, und

$$AB' = BA' \text{ oder } A'B = B'A$$

ist, muss nach dem Obigen offenbar

$$b' - a = a' - b \text{ oder } b - a' = a - b',$$

also

$$(a+a')-(b+b')=0$$

sein, und da nun

$$a+a'=b+b',$$

also auch

$$(a+a')^2=(b+b')^2,$$

d. i.

$$a^2+a'^2+2aa'=b^2+b'^2+2bb'$$

ist; so ist

$$2(aa'-bb')=b^2+b'^2-a^2-a'^2=(b'^2-a^2)-(a'^2-b^2)$$
$$=(b'-a)(b'+a)-(a'-b)(a'+b),$$

folglich nach dem Obigen

$$2(aa'-bb')=(b'-a)(b'-a'+a-b)$$
$$=(a'-b)(b'-a'+a-b).$$

Nach dem Obigen ist aber

$$b'-a'=a-b,$$

also

$$b'-a'+a-b=2(b'-a')=2(a-b),$$

woraus sich in Verbindung mit dem Vorhergehenden unmittelbar

$$aa'-bb'=(b'-a)(b'-a')=(a-b)(a'-b)$$

ergiebt. Weil nun nach 28)

$$y-n=-\frac{n\{(a+a')-(b+b')\}}{(m-a)(m-a')-(m-b)(m-b')}(x-m)$$

die Gleichung der Linie CD ist, so wird diese Gleichung im vorliegenden Falle

$$y-n=0 \text{ oder } y=n,$$

woraus man sieht, dass in demselben die Linie CD der Linie AB parallel ist, und also von einem Durchschnittspunkte O dieser beiden Linien im eigentlichen Sinne nicht die Rede sein kann

Ueberlegt man jetzt, dass in Taf. V. Fig. 2. sowohl die Winkel $AA'C$ und ADC, als auch die Winkel $BB'C$ und BDC einander gleich sind, so wird mittelst des im Vorhergehenden Bewiesenen leicht die Richtigkeit der folgenden Methode des Rückwärtseinschneidens mit dem Messtische erhellen, wobei ich die den drei auf dem Messtische gegebenen Punkten A, B, C entsprechenden Punkte auf dem Felde durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnen werde.

Man lege die Kippregel an BA und orientire den Tisch nach $\mathfrak{A}$, lege die Kippregel an C, visire nach $\mathfrak{C}$, und bestimme in dieser Lage der Kippregel deren Durchschnittspunkt A' mit der Linie AB.

Ferner lege man die Kippregel an AB und orientire den Tisch nach $\mathfrak{B}$, lege die Kippregel an C, visire nach $\mathfrak{C}$, und bestimme in dieser Lage der Kippregel deren Durchschnittspunkt B' mit der Linie AB.

Nun unterscheide man die vier folgenden Fälle:

1. Wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus nach entgegengesetzten Seiten hin liegen.

2. Wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus nach derselben Seite hin liegen und

$$AB' > BA'$$

ist.

3. Wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B nur nach derselben Seite hin liegen und

$$AB' < BA'$$

ist.

4. Wenn die Punkte B' und A' respective von den Punkten A und B aus nach derselben Seite hin liegen und

$$AB' = BA'$$

ist.

Im ersten Falle bestimme man in der Linie AB den Punkt O so, dass sich seine Entfernungen AO und BO von den Punkten A und B eben so zu einander verhalten wie die Linien AB' und BA'.

Im zweiten Falle bestimme man in der Verlängerung der Linie AB über den Punkt B hinaus den Punkt O so, dass sich seine Entfernungen AO und BO von den Punkten A und B eben so zu einander verhalten wie die Linien AB' und BA'.

Im dritten Falle bestimme man in der Verlängerung der Linie AB über den Punkt A hinaus den Punkt O so, dass seine Entfernungen AO und BO von den Punkten A und B sich eben so zu einander verhalten wie die Linien AB' und BA'.

Im vierten Falle bestimme man den Punkt O so, dass die durch ihn und den Punkt C der Lage nach bestimmte gerade Linie der Linie AB parallel ist.

Auch kann man bei der Bestimmung der Lage des Punktes O aus den vier Punkten A, B, A', B' nach den vorhergehenden Regeln die Punkte A, A' und B, B' gegen einander vertauschen, d. h. in diesen Regeln überall B für A und A für B setzen.

Hat man aber auf diese Weise die Lage des Punktes O bestimmt, so lege man die Kippregel an die Linie OC und orientire den Tisch nach C, worauf derselbe *richtig* orientirt sein wird, und dann bekanntlich die Bestimmung der Lage des gesuchten Punkts D keiner weiteren Schwierigkeit unterliegt, was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

Bei der Bestimmung der Lage des Punktes O in den Linien AB oder $A'B'$, oder deren Verlängerungen über ihre Endpunkte hinaus, aus den Proportionen

$$AO:BO=AB':BA'$$

oder

$$A'O:B'O=A'B:B'A,$$

könnte man sich allerdings der bekannten ganz einfachen strengen geometrischen Constructionen bedienen. In der Praxis wird man sich aber hierbei wohl meistens auf das Augenmaass verlassen müssen und nur durch successive Annäherung zur genauen Bestimmung des Punktes O und hiernach auch des Punktes D gelangen können.

Auch darf nicht unbemerkt bleiben, dass die obige Methode des Rückwärtseinschneidens, weil die Linie OC, wie wir vorher gesehen haben, der Linie AB in gewissen Fällen parallel werden kann, wenn die Linie OC sich dieser Lage nähert, für die praktische Anwendung so gut wie unbrauchbar werden kann.

Ich habe dieselbe hier jedoch nicht unterdrücken wollen, weil ich der Meinung bin, dass man dergleichen Methoden in der Praxis nicht genug haben kann, indem sich wohl schwerlich eine für alle möglichen Fälle gleich gut geeignete Methode zur Ausführung der so wichtigen Operation des Rückwärtseinschneidens auffinden lassen dürfte. Was in der Theorie manchmal ganz hübsch aussieht, taugt in speciellen Fällen öfters für die Praxis gar nichts.

Die vollständige Begründung der vorhergehenden Methode mit Hülfe blosser Elementarsätze der ebenen Geometrie aus der Lehre vom Kreise, welche sich ohne Schwierigkeit geben lassen würde, und oben in der Note schon angedeutet worden ist, glaube ich füglich dem Leser überlassen zu können. Ich habe mich im vorliegenden Falle ganz absichtlich der Lehren der analytischen Geometrie bedient, da dieselbe hier noch zu einigen andern, wie ich glaube, nicht ganz uninteressanten Resultaten führen.

XXXV.

Ueber Transversalen im Dreieck und den ihnen zugeordneten Punkt.

Von dem

Herrn Dr. J. R. Boyman,

Gymnasiallehrer zu Coblenz.

(Zu diesem Aufsatze gehört Tafel VI., welche man gleich vom Anfange an zu vergleichen hat.)

1.

Beschreibt man um irgend ein Dreieck ABC einen Kreis und zieht von einem beliebigen Punkte P der Peripherie nach den Dreiecksseiten unter gleichem, übrigens beliebigem Winkel in demselben Sinne drei gerade Linien Pp_1, Pp_2, Pp_3, so liegt jedes System der vier Punkte PCp_1p_2; PAp_2p_3; PBp_1p_3 auf einer neuen Kreislinie. Verbindet man nun zwei der Fusspunkte durch eine gerade Linie, z. B. p_1 mit p_3, so wie P mit den Ecken A, B, C: so ist $\angle PAC = \angle PBC = \angle PBp_1 = \angle Pp_3p_1$, also $\angle PAC = \angle Pp_3p_1$. Diese Winkel sind aber Peripheriewinkel des Kreises PAp_2p_3. Die Schenkel des erstern gehen durch die Endpunkte des Bogens Pp_2, und da der eine Schenkel des zweiten Winkels durch P geht, so muss der andere ebenfalls durch p_2 gehen: $p_1p_2p_3$ ist mithin eine gerade Linie.— Hier ist also auf ganz elementare Weise folgender bekannte Satz erwiesen:

„Wenn man von irgend einem Punkte auf der Peripherie „eines Kreises nach den drei Seiten eines einbeschriebenen Drei- „ecks unter demselben beliebigen Winkel gerade Linien zieht, so „liegen die drei Fusspunkte in einer geraden Linie.“

2.

Trifft eine beliebige Gerade die Seiten eines Dreiecks ABC in den drei Punkten p_1, p_2, p_3 und man beschreibt durch irgend zwei Winkelpunkte und die auf den anstossenden Seiten liegenden Durchschnitte der geraden Linie, z. B. durch C, p_1, p_2 und A, p_2, p_3, zwei Kreise, und verbindet deren Durchschnitt P mit den Ecken des Dreiecks und den Punkten p_1, p_2, p_3: so ist offenbar $\angle Pp_1C = \angle Pp_2A = \angle Pp_3A$. Ueberdies ist $\angle p_1p_3B = \angle p_2PA$ und $\angle p_3p_1B = \angle CPp_2$, folglich $\angle ABC + \angle CPA = 2R$. Daher liegt der Punkt P auf der dem Dreieck ABC umschriebenen Kreislinie. Für eine andere schneidende Gerade wird der Punkt P im Allgemeinen ein anderer, liegt aber immer auf dem Umfang des dem gegebenen Dreieck umschriebenen Kreises. — Wir haben folglich den Satz:

„Legt man durch die Seite eines Dreiecks beliebig viele „Transversalen, so lässt sich für jede derselben immer ein Punkt „finden von der Eigenschaft, dass die von demselben nach den „drei Durchschnittspunkten gezogenen Geraden den Seiten des „Dreiecks unter demselben Winkel begegnen. Der Ort aller die- „ser Punkte ist die dem Dreieck umschriebene Kreislinie.

3.

Zugleich ist der folgende Satz bewiesen:

„Beschreibt man um jedes der vier Dreiecke, welche die vier „Seiten eines vollständigen Vierecks unter sich bilden, einen „Kreis: so schneiden diese vier Kreise sich in Einem Punkte, „welcher überdies die Eigenschaft hat, dass die Geraden, welche „von ihm nach den drei auf derselben Seite liegenden Durch- „schnitten gezogen werden, hier mit den drei andern Seiten „gleiche Winkel einschliessen.“

4.

Erklärung. Der Punkt, dessen Verbindungslinien mit den Durchschnitten einer durch ein Dreieck gelegten Transversale den Seiten desselben unter dem nämlichen Winkel begegnen, soll der der Transversale (nach diesem Winkel) zugeordnete Punkt, und dem entsprechend die Transversale die dem Punkte (nach diesem Winkel) zugeordnete Transversale genannt werden.

5.

Es ist leicht zu zeigen, dass jedes Paar der folgenden Dreiecke ähnlich ist, nämlich:

$$\Delta PBA \backsim \Delta Pp_1p_2,\quad \Delta PCA \backsim \Delta Pp_1p_3,\quad \Delta PCB \backsim \Delta Pp_2p_3.$$

Daher ist denn auch $\angle BPA = \angle p_1Pp_2$, $\angle CPA = \angle p_1Pp_3$, $\angle CPB = \angle p_2Pp_3$. Die Gleichheit dieser Winkel besteht, wie auch immer die Transversale ihre Lage ändern mag, wenn sie nur dem Punkt P zugeordnet bleibt. — Daher der Satz:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks beliebig viele „Transversalen, welche alle ein und demselhen Punkte zugeord- „net sind, so werden ihre zwischen denselben zwei Seiten ent- „haltenen Segmente und die jedesmalige dritte Seite von jenem „Punkte aus unter demselben Winkel gesehen."

6.

Aus der Achnlichkeit obiger Dreiecke ergeben sich folgende Proportionen:

$$BA : p_1p_2 = PB : Pp_1 = PA : Pp_2,$$

$$CA : p_1p_3 = PC : Pp_1 = PA : Pp_3,$$

$$CB : p_2p_3 = PC : Pp_2 = PB : Pp_3.$$

Hierin ist folgender Satz enthalten:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks eine beliebige „Transversale: so ist das Verhältniss aus irgend einer Dreiecks- „seite und dem von den beiden andern Seiten interceptirten Seg- „ment der Transversale dem Verhältniss aus den Entfernungen „des der Transversale zugeordneten Punktes von denjenigen End- „punkten dieser Seite und des Segmentes gleich, welche auf der- „selben anstossenden Dreiecksseite liegen."

Aus obiger Proportion folgt noch die Gleichung:

$$PA . Pp_1 = PB . Pp_2 = PC . Pp_3.$$

Dies gibt nachstehenden Satz:

„Die Produkte der Entfernungen des einer Transversale des „Dreiecks zugeordneten Punktes jedesmal von einer Ecke des „Dreiecks und dem Durchschnittspunkt der Transversale mit der „gegenüberstehenden Seite sind einander gleich."

7.

Auch ist jedes Paar der folgenden Dreiecke ähnlich:

$\Delta PBp_1 \backsim \Delta PAp_2$, $\Delta PCp_1 \backsim \Delta PAp_3$, $\Delta PCp_2 \backsim \Delta PBp_3$.

Hieraus ergeben sich nun die Proportionen:

$$PB:PA = Pp_1 : Pp_2 = Bp_1 : Ap_2;$$

$$PA:PC = Pp_3 : Pp_1 = Ap_3 : Cp_1;$$

$$PC:PB = Pp_2 : Pp_3 = Cp_2 : Bp_3.$$

Hierin ist folgender Satz enthalten:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks eine beliebige „Transversale: so sind die Entfernungen des derselben zugeord- „neten Punktes von den Endpunkten irgend einer Dreiecksseite „und die Entfernungen eben dieses Punktes (so wie auch der „gewählten Endpunkte) von denjenigen Durchschnitten der Trans- „versale, welche mit jenen Endpunkten auf derselben anstossen- „den Dreiecksseite liegen, verhältnissgleich."

8.

Aus den vorstehenden Proportionen ergibt sich die Gleichung:

$$Cp_1 . Ap_2 . Bp_3 = Bp_1 . Cp_2 . Ap_3 .$$

Hierin liegt nachstehender Satz:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks eine beliebige „Transversale: so ist das Produkt der von den drei Winkelpunk- „ten aus abwechselnd genommenen Seitensegmente dem Produkte „der drei anderen abwechselnden Seitensegmente gleich."

Dieser Satz war nach Brianchon und Poncelet schon den Alten bekannt (s. Plücker „Entwicklungen" Bd. II. N. 437.) und soll sich zuerst in der „Sphärik" des Menelaus finden.

Anmerkung. Der vorstehende Satz gilt auch umgekehrt, d. h.: Sind die Punkte p_1, p_2, p_3 auf den Seiten des Dreiecks und ihren Verlängerungen so genommen, dass

$$Cp_1 . Ap_2 . Bp_3 = Bp_1 . Cp_2 . Ap_3 ,$$

so liegen diese Punkte in gerader Linie. Vergl. Adams „Lehre von den Transversalen" S. 6., und „Harmonische Verhältnisse" S. 88.

9.

Durch irgend drei sich schneidende Geraden AB, AC, BC seien drei neue Geraden $p_1p_2p_3$, $q_1q_2q_3$, $r_1r_2r_3$ gezogen, welche in Bezug auf das durch die drei ersteren gebildete Dreieck zu ein und demselben Punkt P zugeordnete Transversalen sind und sich in den Punkten k_1, k_2, k_3 schneiden: alsdann erhält man im Ganzen zwanzig Kreise, welche sich alle im Punkte P durchsetzen, nämlich:

$$ABCP,$$

$$PAp_2p_3, \quad PAq_2q_3, \quad PAr_2r_3;$$

$$PBp_1p_3, \quad PBq_1q_3, \quad PBr_1r_3;$$

$$PCp_1p_2, \quad PCq_1q_2, \quad PCr_1r_2; \; -$$

$$Pk_1p_1q_1, \quad Pk_1p_2q_2, \quad Pk_1p_3q_3;$$

$$Pk_2p_1r_1, \quad Pk_2p_2r_2, \quad Pk_2p_3r_3;$$

$$Pk_3q_1r_1, \quad Pk_3q_2r_2, \quad Pk_3q_3r_3;$$

$$Pk_1k_2k_3.$$

Von diesen sechs Geraden sind also je drei dem Punkt P zugeordnete Transversalen in Bezug auf das durch die drei übrigen gebildete Dreieck. Daher hat man durch Vermittlung von §. 7. folgende Proportionen:

$$p_1p_2 : p_2p_3 = q_1q_2 : q_2q_3 = r_1r_2 : r_2r_3,$$
$$p_1q_1 : q_1r_1 = p_2q_2 : q_2r_2 = p_3q_3 : q_3r_3,$$

u. s. w.

Daher der Satz:

„Zieht man in einer Ebene sechs sich schneidende Geraden, „so dass drei derselben zu einem und demselben Punkt zugeord- „nete Transversalen sind in Bezug auf das durch die drei übri- „gen gebildete Dreieck: so sind die auf irgend drei derselben lie- „genden Segmentenpaare, welche von den drei übrigen intercep- „tirt werden, verhältnissgleich.

10.

Liegen ausserdem irgend drei Punkte, in welchen diese sechs Geraden, zu Paaren verbunden, sich schneiden (z. B. $q_2p_3r_1$), mit dem Punkte P in gerader Linie, so ist noch in dem $\Delta\, k_1k_2k_3$:

$$\angle k_1 = \angle p_2 P p_3 = \angle CAB,$$

$$\angle k_3 = \angle q_2 P q_1 = \angle ACB;$$

also

$$\angle k_2 = \angle ABC.$$

Dies giebt nachstehenden Satz:

„Wählt man auf den drei Seiten eines Dreiecks irgend drei „in gerader Linie liegende Punkte, und legt durch dieselben „drei Transversalen, welche einem und demselben, mit jenen „dreien in der nämlichen geraden Linie sich befindenden Punkte „zugeordnet sind: so schneiden sich diese drei Transversalen unter „den Winkeln des gegebenen Dreiecks."

11.

Man bestimme zu irgend zwei parallelen Transversalen p_1p_3, q_1q_3 eines Dreiecks ABC die zugeordneten Punkte P und Q, und verbinde diese mit den ihnen entsprechenden Durchschnittspunkten p_1, p_2, p_3 und q_1, q_2, q_3, so wie mit den Ecken des Dreiecks; alsdann ist:

$$\angle CPp_1 = \angle Cp_2p_1 \quad \text{und} \quad \angle CQq_1 = \angle Cq_2q_1;$$

da aber

$$\angle Cp_2p_1 = \angle Cq_2q_1,$$

so ist

$$\angle CPp_1 = \angle CQq_1;$$

eben so folgt

$$\angle CPp_2 = \angle CQq_2;$$

und auch

$$\angle CPp_3 = \angle CQq_3.$$

Daher hat man folgenden Satz:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks beliebig viele „parallele Transversalen, und verbindet die diesen zugeordneten „Punkte mit den auf einer und derselben Dreiecksseite ihnen „entsprechenden Durchschnittspunkten dieser Transversalen: so „gehen diese Verbindungslinien alle durch einen und denselben „Punkt, welcher auf der dem Dreiecke umschriebenen Kreislinie „liegt."

12.

Solcher Punkte erhält man offenbar drei, nämlich A', B', C'. Man verbinde diese zu einem Dreieck $A'B'C'$. Da nun

$\angle p_1 C p_2 = \angle p_1 P p_2$, $\angle p_2 AB = \angle p_2 P p_3$, $\angle p_1 B p_3 = \angle A'PC$;

so ist:

$$AB = A'B',\ BC = B'C',\ AC = A'C.$$

Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind also einander congruent. Beide Dreiecke sind offenbar auch symmetrisch nach der Linie MN, welche zugleich Durchmesser des Kreises ist. Daher treffen sich auch die Verbindungslinien $A\pi_1$, $B\pi_2$, $C\pi_3$ in einem und demselben Punkte P', welcher dem Punkte P, so wie die Verbindungslinien $A\varphi_1$, $B\varphi_2$, $C\varphi_3$ in einem und demselben Punkte Q', welcher dem Punkte Q symmetrisch liegt.

Offenbar also, wenn man von dem Dreiecke $A'B'C'$ mit denselben Transversalen p_1p_3, q_1q_3 ausgegangen wäre, würde man auf das Dreieck ABC und die in Bezug auf dasselbe diesen Transversalen zugeordneten Punkte P und Q gekommen sein.

Transversalen in derselben Richtung mit p_1p_3 führen alle auf dasselbe Dreieck $A'B'C'$; Transversalen in einer andern Richtung geben ein anderes, aber immer dem Dreieck ABC congruentes und symmetrisches Dreieck.

13.

Durch die Seiten des Dreiecks ABC lege man die Transversale DH so, dass das zwischen zwei Seiten enthaltene Segment DH durch die dritte Seite so getheilt werde, dass $DL:LH = p:q$, und bestimme den derselben zugeordneten Punkt P und ziehe PA, PC, PL. Nach §. 6. ist alsdann:

$$AB:DL = PA:PL,$$

$$CB:LH = PC:PL,$$

woraus in Verbindung mit vorstehender Bedingungs-Proportion sich ergibt:

$$AB.PC:CB.PA = p:q.$$

Hierin liegt folgender Satz:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks eine Transver-
„sale so, dass das zwischen zwei Dreiecksseiten interceptirte
„Segment derselben durch die dritte Seite in dem Verhältniss
„$p:q$ getheilt wird, so bildet der dieser Transversale zugeordnete
„Punkt mit den Eckpunkten des Dreiecks ein Kreisviereck, in
„welchem die Produkte aus den gegenüberstehenden Seiten in
„dem gegebenen Verhältniss $p:q$ stehen.

Für den Fall, dass das Verhältniss $p:q = 1$, sind die Produkte aus den gegenüberstehenden Seiten des Vierecks einander gleich.

14.

Es gibt offenbar unendlich viele Transversalen, welche durch dieselbe dritte Seite AC in dem Verhältniss $p:q$ getheilt werden. Da es aber auf dem Bogen AC nur Einen Punkt P geben kann, für welchen $AB.PC:CB.PA=p:q$ ist, so haben alle Transversalen, welche durch dieselbe dritte Seite in dem Verhältniss $p:q$ getheilt werden, immer einen und denselben zugeordneten Punkt, und es bestimmen alle diese Transversalen also auch nur ein einziges Viereck.— Aehnlich entspricht allen durch die Seite AB in dem Verhältniss $m:n$ getheilten Transversalen ein und derselbe zugeordnete Punkt Q, so wie den durch die Seite BC in dem Verhältniss $r:s$ getheilten Transversalen ein und derselbe zugeordnete Punkt R. Somit erhalten wir im Ganzen drei solcher Vierecke, nämlich $ABCP$, $BCAQ$, $CABR$. Für diese bestehen also die folgenden drei Proportionen:

$$AB.PC:CB.PA=p:q,$$

$$CB.QA:AC.QB=m:n,$$

$$AC.RB:AB.RC=r:s;$$

aus welchen sich durch Multiplikation und Aufhebung der gleichen Glieder nachstehende Proportion ergibt:

$$PC.RB.QA:PA.QB.RC=pmr:qns.$$

Daher hat man den Satz:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks drei Transver-„salen, welche einzeln (und zwar hinsichts der intercepirenden „Seitenpaare nach derselben Ordnung) in den Verhältnissen $p:q$, „$m:n$, $r:s$ getheilt werden, so bilden die drei diesen Transversa-„len zugeordneten Punkte mit den Eckpunkten des Dreiecks ein „Sechseck im Kreise, für welches die Produkte aus den drei ab-„wechselnden Seiten in dem zusammengesetzten Verhältnisse „$pmr:qns$ stehen.“

Für den Fall, dass $m:n=r:s=p:q$ erhält man

$$PC.RB.QA:PA.QB.RC=p^3:q^3.$$

Ist ausserdem noch $p:q=1$, so sind die Produkte aus den abwechselnden Seiten des Sechsecks einander gleich.

15.

In einem beliebigen Kreisviereck $ABCD$ ziehe man die beiden Diagonalen, und bestimme durch Fällung der Perpendikel aus den Winkelpunkten auf die Seiten und Diagonalen des Vierecks die diesen Winkelpunkten in Bezug auf das jedesmal gegen-

überstehende Dreieck nach dem rechten Winkel zugeordneten Transversalen, nämlich $p_1p_2p_3$, $p_4p_5p_6$, $p_7p_8p_9$, $p_{10}p_{11}p_{12}$; alsdann ist nach §. 6. und weil $\Delta CAp_6 \backsim \Delta DBp_1$:

$$p_1p_3 : CA = Dp_1 : DC,$$
$$p_4p_6 : BD = Cp_6 : CD;$$
$$CA : Cp_6 = BD : Dp_1;$$

mithin

$$p_1p_3 = p_4p_6. \qquad 1)$$

Ferner hat man:

$$p_4p_6 : BD = Cp_4 : CB,$$
$$p_7p_9 : AC = Bp_9 : BC;$$
$$BD : Bp_9 = AC : Cp_4;$$

folglich

$$p_4p_6 = p_7p_9. \qquad 2)$$

Ebenso ist:

$$p_7p_9 : AC = Bp_7 : BA,$$
$$p_{10}p_{12} : DB = Ap_{12} : AB;$$
$$AC : Ap_{12} = DB : Bp_7;$$

daher auch

$$p_7p_9 = p_{10}p_{12}. \qquad 3)$$

Aus der Verbindung von 1), 2), 3) ergeben sich nun folgende Gleichheiten:

$$p_1p_3 = p_4p_6 = p_7p_9 = p_{10}p_{12}; \qquad \text{I.}$$

ebenso findet man:

$$p_1p_2 = p_5p_6 = p_7p_8 = p_{11}p_{12}; \qquad \text{II.}$$

und endlich auch:

$$p_2p_3 = p_4p_5 = p_8p_9 = p_{10}p_{11}. \qquad \text{III.}$$

Hierin liegt nachstehender Satz:

„Wenn man in einem Kreisviereck die beiden Diagonalen „zieht und zu jedem Winkelpunkte in Bezug auf das jedesmal „gegenüberstehende Dreieck die nach dem rechten Winkel zu„geordnete Transversale construirt: so sind sowohl diese vier

„Transversalen, welche zwischen je zwei anstossenden Virecks-
„seiten liegen, unter sich gleich, als auch jedesmal diejenigen
„vier Segmente derselben, welche zwischen den Diagonalen und
„je zwei gegenüberstehenden Seiten des Vierecks enthalten sind."

16.

Durchschneiden sich zwei gleiche Sehnen innerhalb oder ausserhalb des Kreises, so sind bekanntlich die Segmente der einen Sehne den Segmenten der andern beziehlich gleich. Solche gleiche Sehnen eines Kreises sind aber die Transversalen p_1p_3 und p_7p_9, p_4p_6 und $p_{10}p_{12}$. Wenn wir nun den Durchschnittspunkt von p_1p_3 und p_7p_9 mit O_1, den Durchschnittspunkt von p_4p_6 und $p_{10}p_{12}$ mit O_2 bezeichnen, so ist daher:

$$O_1p_1 = O_1p_7, \quad O_1p_3 = O_1p_9, \quad O_1p_2 = O_1p_8;$$

$$O_2p_4 = O_2p_{10}, \quad O_2p_6 = O_2p_{12}, \quad O_2p_5 = O_2p_{11}.$$

Indem wir hier in jeder Reihe multipliciren, ergibt sich:

$$O_1p_1 . O_1p_2 = O_1p_7 . O_1p_8, \quad O_1p_2 . O_1p_3 = O_1p_8 . O_1p_9;$$

$$O_2p_4 . O_2p_5 = O_2p_{10} . O_2p_{11}; \quad O_2p_5 . O_2p_6 = O_2p_{11} . O_2p_{12}.$$

Demnach ist sowohl O_1 als O_2 der Durchschnittspunkt der Potenzlinien der Kreise M_1 und M_2, so wie der Kreise M_3 und M_4; beide Punkte sind also nur Einer, den wir in der Figur mit O bezeichnet haben.

Hierin liegt der Satz:

„Wenn man in einem Kreisviereck, in welchem die Diago-
„nalen gezogen sind, zu jedem Winkelpunkt in Bezug auf das
„gegenüberliegende Dreieck die nach dem rechten Winkel zuge-
„ordneten Transversalen construirt: so durchschneiden sich diese
„vier Transversalen in einem und demselben Punkte."

17.

Gleiche Sehnen derselben Kreise sind auch noch:

p_1p_2 und p_5p_6, p_2p_3 und $p_{10}p_{11}$, p_4p_5 und p_8p_9, p_7p_8 und $p_{11}p_{12}$.

Demnach hat man ferner:

$$Op_1 = Op_6 = Op_7 = Op_{12};$$

$$Op_2 = Op_5 = Op_8 = Op_{11};$$

$$Op_3 = Op_4 = Op_9 = Op_{10}.$$

Dies giebt nachstehenden Satz:

„Fällt man aus den Winkelpunkten eines Kreisvierecks, in „welchem die Diagonalen gezogen sind, auf die Seiten des jedes- „mal gegenüberliegenden Dreiecks die drei Perpendikel: so lie- „gen die zwölf Fusspunkte, zu vier zusammen geordnet, auf den „Peripherien dreier concentrischer Kreise, deren Mittelpunkt der „gemeinschaftliche Durchschnitt der vier Transversalen ist, welche „durch je drei entsprechende Fusspunkte gelegt sind."

18.

Aus den vorhergehenden Gleichungen erhält man auch:

$$Op_1.Op_2 = Op_{11}.Op_{12};\quad Op_2.Op_3 = Op_4.Op_5;$$

$$Op_1.Op_3 = Op_{10}Op_{12};$$

mithin ist O der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der Potenzlinien der Kreise M_1 und M_2; M_3 und M_4; M_5 und M_6.

Daher der Satz:

„Beschreibt man in einem Kreisviereck über je zwei gegen- „überstehende Seiten und über die beiden Diagonalen als Durch- „messer Kreise: so schneiden sich die Potenzlinien dieser drei „Kreisepaare in einem und demselben Punkte, dem Durchschnitts „punkt der vier Transversalen, welche den einzelnen Winkel- „punkten in Bezug auf das jedesmal gegenüberstehende Dreieck „nach dem rechten Winkel zugeordnet sind."

XXXVI.

Entwickelung der Gleichung der Loxodrome auf dem durch Drehung der Parabel um ihre äussere Axe entstehenden Rotationsparaboloid.

Von dem

Herrn Dr. J. R. Boyman,

Gymnasiallehrer zu Coblenz.

Lässt man die Parabel um ihre äussere Axe, die Axe der Z, sich drehen, so erhält man ein Rotationsparaboloid, welches dargestellt ist durch folgende Gleichung:

$$x^2+y^2=\frac{z^4}{p^2}. \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich durch Differentiation:

$$xdx+ydy=\frac{2z^3dz}{p^2}, \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

und daher ist:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{p^2x}{2z^3}, \quad \frac{dz}{dy}=\frac{p^2y}{2z^3}.$$

Werden diese Werthe in die allgemeine Gleichung der Loxodromen, welche ist:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-\operatorname{tang}\gamma.\left[y+y\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+x\frac{dz}{dx}.\frac{dz}{dy}\right]}{y\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\operatorname{tang}\gamma.\left[x+x\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+y\frac{dz}{dx}.\frac{dz}{dy}\right]}\,{}^{*)},$$

substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x\left(1+\frac{p^4x^2}{4z^6}+\frac{p^4y^2}{4z^6}\right)^{\frac{1}{2}}-\operatorname{tang}\gamma.\left(y+y\frac{p^4y^2}{4z^6}+x\frac{p^4xy}{4z^6}\right)}{y\left(1+\frac{p^4x^2}{4z^6}+\frac{p^4y^2}{4z^6}\right)^{\frac{1}{2}}+\operatorname{tang}\gamma.\left(x+x\frac{p^4x^2}{4z^6}+y\frac{p^4xy}{4z^6}\right)},$$

oder mit geringer Veränderung:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x\left(1+\frac{p^4(x^2+y^2)}{4z^6}\right)^{\frac{1}{2}}-\operatorname{tang}\gamma.\left(1+\frac{p^4(x^2+y^2)}{4z^6}\right)y}{y\left(1+\frac{p^4(x^2+y^2)}{4z^6}\right)^{\frac{1}{2}}+\operatorname{tang}\gamma.\left(1+\frac{p^4(x^2+y^2)}{4z^6}\right)x}.$$

Diese Gleichung geht durch Ausscheidung des gemeinsamen Faktors $\left(1+\frac{p^4(x^2+y^2)}{4z^6}\right)^{\frac{1}{2}}$ und mit Rücksicht auf Gleichung 1) in die nachstehende über:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x-\operatorname{tang}\gamma.\left(1+\frac{p^2}{4z^2}\right)^{\frac{1}{2}}y}{y+\operatorname{tang}\gamma.\left(1+\frac{p^2}{4z^2}\right)^{\frac{1}{2}}x},$$

welche folgendermassen sich darstellen lässt:

$$ydx-xdy=-\operatorname{tang}\gamma.\left(1+\frac{p^2}{4z^2}\right)^{\frac{1}{2}}.(xdx+ydy).$$

Substituirt man nun hierin auf der rechten Seite aus Gleichung 2) den Werth in z, und dividirt Behufs der Integration auf beiden Seiten beziehlich durch $x^2+y^2=\frac{z^4}{p^2}$, so erhält man:

$$\int\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=-\operatorname{tang}\gamma.\int(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^2},$$

und für die Gleichungen in x und z, so wie in y und z, indem man $x^2+y^2=v^2=\text{const.}$ setzt:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{v^2-x^2}}=-\operatorname{tang}\gamma.\int(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^2}.$$

$$\int\frac{-dy}{\sqrt{v^2-y^2}}=-\operatorname{tang}\gamma.\int(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^2}.$$

---

*) M. s. Archiv Theil VII. S. 337.

Nun ist aber:

$$\int -z^{-2}(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}dz$$

$$=\frac{(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}}{p^2 z}-\frac{4z(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}}{p^2}-4\int(p^2+4z^2)^{-\frac{1}{2}}dz$$

$$=\frac{(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}}{z}-2\log(2z+(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}})+\text{Const.}$$

Daher erhält man, indem man die nach dem Anfange der Curve zu bestimmende Const. $=\text{tang}\,\gamma.(2\log B-A)$ setzt, die Endgleichung:

$$\text{Arc tang}\frac{x}{y}$$

$$=\text{tang}\,\gamma.\left[\frac{(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}-Az}{z}-2\log\frac{2z+(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}}{B}\right],$$

die Gleichung der Wendelfläche dieses Rotationsparaboloids, welche in Verbindung mit der Gleichung des Rotationsparaboloids 1) die Paraboloidische Loxodrome bestimmt; ebenso:

$$\text{Arc sin}\frac{x}{v}$$

$$=\text{tang}\,\gamma.\left[\frac{(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}-Az}{z}-2\log\frac{2z+(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}}{B}\right],$$

$$\text{Arc cos}\frac{y}{v}$$

$$=\pm\text{tang}\,\gamma.\left[\frac{(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}-Az}{z}-2\log\frac{2z+(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}}{B}\right],$$

die Gleichungen der Projektionen dieser Paraboloidischen Loxodrome auf den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ, welche dieselbe ebenfalls vollständig bestimmen.

In anderer Form lauten diese Gleichungen, wenn man noch zur Abkürzung den Ausdruck in der Klammer mit P_1 bezeichnet, also:

$$x=y\,\text{tang}(\text{tang}\,\gamma.P_1),$$
$$x=v\sin(\text{tang}\,\gamma.P_1),$$
$$y=v\cos(\text{tang}\,\gamma.P_1).$$

XXXVII.

Ueber parallele Transversalen im Dreieck, welche von den Dreiecksseiten nach demselben Verhältniss geschnitten werden.

Von dem

Herrn Dr. J. R. Boyman,

Gymnasiallehrer zu Coblenz.

1.

Durch die Seiten eines Dreiecks ABC lege man drei unter sich parallele Transversalen, so dass in jedem Winkel eine ganze Transversale, ein grösserer und ein kleinerer Abschnitt liegt und die zwischen den Dreiecksseiten enthaltenen Segmente in demselben Verhältniss stehen, so dass also mit Bezug auf Taf. VII. Fig. 1.:

$$EJ:JK = HL:LD = GO:OF = m:n.$$

Alsdann hat man, indem man $m+n=s$ setzt, folgende Proportionen:

$$1)\quad \begin{cases} AF:AH = FG:\frac{m}{s}DH, \\ BE:BO = \frac{m}{s}EK:\frac{n}{s}FG, \\ CL:CJ = \frac{n}{s}DH:EK; \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} AH : AJ = \frac{m}{s} DH : \frac{n}{s} EK, \\ BO : BD = \frac{n}{s} FG : DH, \\ CK : CG = EK : \frac{m}{s} FG; \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} AL : AG = \frac{m}{s} DH : FG, \\ BF : BJ = \frac{n}{s} FG : \frac{m}{s} EK, \\ CE : CD = EK : \frac{n}{s} DH; \end{cases}$$

$$4)\quad \begin{cases} AG : AK = FG : \frac{n}{s} EK, \\ BJ : BH = \frac{m}{s} EK : DH, \\ CD : CO = \frac{n}{s} DH : \frac{m}{s} FG. \end{cases}$$

Aus diesen vier Gruppen von Proportionen folgen nachstehende Gleichungen:

$$5)\quad \begin{cases} AF.BE.CL = AH.BO.CK, \\ AH.BO.CK = AJ.BD.CG; \\ AL.BF.CE = AG.BJ.CD, \\ AG.BJ.CD = AK.BH.CO; \end{cases}$$

aus welchen sich ergibt:

$$6)\quad AF.BE.CL = AH.BO.CK = AJ.BD.CG;$$

$$7)\quad AL.BF.CE = AG.BJ.CD = AK.BH.CO.$$

Nun bestehen aber ferner in Bezug auf die Transversalen FG, DH, EK nach dem Satze des Menelaos die Gleichungen:

$$8)\quad \begin{cases} AF.BO.CG = AG.BF.CO, \\ AH.BD.CL = AL.BH.CD, \\ AJ.BE.CK = AK.BJ.CE; \end{cases}$$

woraus durch Multiplikation sich ergibt:

$$9)\quad \left\{\begin{matrix} (AF.BE.CL) \\ \times(AH.BO.CK) \\ \times(AJ.BD.CG) \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} (AL.BF.CE) \\ \times(AK.BH.CO) \\ \times(AG.BJ.CD). \end{matrix}\right\}.$$

Da nun in dieser Gleichung die in Klammern gestellten Produkte auf derselben Seite nach 6) und 7) einander gleich sind, so sind diese sechs Produkte alle einander gleich, so dass man hat:

$$10)\quad \left\{\begin{matrix} AF.BE.CL = AL.BF.CE = \\ AH.BO.CK = AK.BH.CO = \\ AJ.BD.CG = AG.BJ.CD. \end{matrix}\right.$$

Man hat also den Satz:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks drei parallele „Transversalen, welche von den Dreiecksseiten in demselben Ver„hältniss getheilt werden, indem zugleich jeder Winkel eine ganze „Transversale, einen grösseren und einen kleineren Abschnitt „enthält: so liegen von den neun Durchschnittspunkten drei Mal „drei in gerader Linie, und geben die Verbindungslinien dersel„ben drei neue Transversalen, für welche die Produkte aus den „drei abwechselnden Segmenten der Dreiecksseiten alle einander „gleich sind."

2.

Die erhaltenen Transversalen *EF*, *GJ*, *KO* bilden unter sich ein neues Dreieck *MNS*, von dessen Seiten die parallelen Transversalen in demselben Verhältniss und auf dieselbe Weise, wie von den Seiten des Dreiecks *ABC*, geschnitten werden. Daher gilt für dieses Dreieck dasselbe, was für das Dreieck *ABC* gilt, dass nämlich die Produkte aus den abwechselnden Segmenten, in welche die Seiten desselben durch die Seiten des Dreiecks *ABC* getheilt werden, einander gleich sind, so dass sich ergibt:

$$11)\quad \left\{\begin{matrix} MD.NE.SO = ME.NO.SD = \\ MF.NH.SJ = MJ.NF.SH = \\ ML.NK.SG = MG.NL.SK. \end{matrix}\right.$$

Demnach hat man folgenden Satz:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks drei parallele „Transversalen, welche von den Dreiecksseiten in demselben „Verhältniss getheilt werden, indem zugleich in jedem Winkel „eine ganze Transversale, ein grösserer und ein kleinerer Ab„schnitt liegt: so bilden die Verbindungslinien der drei Mal drei „in gerader Linie liegenden Punkte ein zweites Dreieck, welches „mit dem erstern die Beziehung hat, dass die Produkte aus den „abwechselnden Segmenten, welche auf den Seiten des einen „durch jede Seite des andern gebildet werden, in jedem Dreiecke „einander gleich sind."

3.

Es bestehen auch folgende Proportionen

$$12)\quad \begin{cases} AH : AF = \frac{m}{s} DH : FG, \\ AH : AJ = \frac{m}{s} DH : \frac{n}{s} EK, \\ AJ : AF = \frac{n}{s} JK : FG; \\ BF : BH = \frac{n}{s} FG : DH, \\ BF : BJ = \frac{n}{s} FG : \frac{m}{s} JK, \\ BJ : BH = \frac{m}{s} EK : DH; \end{cases}$$

ferner:

$$13)\quad \begin{cases} BE : BD = \frac{m}{s} EK : DH, \\ BE : BO = \frac{m}{s} EK : \frac{n}{s} FG, \\ BO : BD = \frac{n}{s} FG : DH; \\ CD : CE = \frac{n}{s} DH : EK, \\ CD : CO = \frac{n}{s} DH : \frac{m}{s} FG, \\ CO : CE = \frac{m}{s} FG : EK; \end{cases}$$

endlich:

$$14)\quad \begin{cases} CG : CK = \frac{m}{s} FG : EK, \\ CG : CL = \frac{m}{s} FG : \frac{n}{s} DH, \\ CL : CK = \frac{n}{s} DH : EK; \\ AK : AG = \frac{n}{s} EK : FG, \\ AK : AL = \frac{n}{s} EK : \frac{m}{s} DH, \\ AL : AG = \frac{m}{s} DH : FG. \end{cases}$$

Aus diesen Gruppen ergibt sich durch Multiplication:

$$15)\quad \begin{cases} AH^2.BF.BJ : BH^2.AF.AJ = m^3 : s^3, \\ BF^2.AH.AJ : AF^2.BH.BJ = n^3 : s^3, \\ BJ^2.AF.AH : AJ^2.BF.BH = m^3 : n^3; \end{cases}$$

$$16)\quad \begin{cases} BE^2.CD.CO : CE^2.BD.BO = m^3 : s^3, \\ CD^2.BE.BO : BD^2.CE.CO = n^3 : s^3, \\ CO^2.BD.BE : BO^2.CD.CE = m^3 : n^3; \end{cases}$$

$$17)\quad \begin{cases} CG^2.AK.AL : AG^2.CK.CL = m^3 : s^3, \\ AK^2.CG.CL : CK^2.AG.AL = n^3 : s^3, \\ AL^2.CG.CK : CL^2.AG.AK = m^3 : n^3. \end{cases}$$

Multiplicirt man jetzt in diesen Nummern die dritten Proportionen mit einander und ausserdem noch das erste und zweite Glied beziehlich mit

$$AL.BJ.CO \times AJ.BO.CL$$
$$= AJ.BO.CL \times AL.BJ.CO,$$

so erhält man:

$$\left.\begin{matrix} (AL^3.BJ^3.CO^3) \times \\ (AF.BO.CG) \times \\ (AH.BD.CL) \times \\ (AJ.BE.CK) \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} (AJ^3.BO^3.CL^3) \times \\ (AG.BF.CO) \times \\ (AL.BH.CD) \times \\ (AK.BJ.CE) \end{matrix}\right\} = m^9 : n^9,$$

oder mit Rücksicht auf Nro. 8):

$$AL^3.BJ^3.CO^3 : AJ^3.BO^3.CL^3 = m^9 : n^9,$$

oder endlich:

18) $$AL.BJ.CO : AJ.BO.CL = m^3 : n^3.$$

Wir unterlassen es, die vorstehenden merkwürdigen Ausdrücke alle in Worten wiederzugeben, und beschränken uns auf den letzten.

In demselben liegt der Satz:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks drei parallele „Transversalen, welche von den Dreiecksseiten in demselben Ver„hältniss ($m:n$) geschnitten werden, indem zugleich jeder Winkel „eine ganze Transversale, einen grössern und einen kleinern Ab„schnitt enthält: so werden die Dreiecksseiten durch die drei „nicht in gerader Linie liegenden Durchschnittspunkte so getheilt, „dass die Produkte aus den drei abwechselnden Segmenten der„selben sich verhalten, wie die Kuben der in gehöriger Ordnung „gewählten Verhältnissglieder."

4.

Nehmen wir (Taf. VII. Fig. 2.) den speziellen Fall, dass die parallelen Transversalen einzeln durch die Seiten des Dreiecks halbirt werden, dass also $m=n$. Alsdann kann man zunächst die dritten Proportionen der Nummern 15), 16), 17) also aufstellen, wie folgt:

19) $$\begin{cases} AF.AH : BF.BH = AJ^2 : BJ^2, \\ BD.BE : CD.CE = BO^2 : CO^2, \\ CG.CK : AG.AK = CL^2 : AL^2. \end{cases}$$

In diesen Proportionen spricht sich folgender Satz aus:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks drei parallele „Transversalen, welche einzeln durch die Dreiecksseiten halbirt „werden: so bilden auf jeder Seite die drei Durchschnittspunkte „mit den beiden Ecken eine Involution von fünf Punkten, „und zwar ist jedesmal der Durchschnittspunkt, in welchem eine „Transversale halbirt ist, ein doppelter Punkt.

5.

Aus den beiden ersten Proportionen in den Nummern 15), 16), 17) erhalten wir unter derselben Voraussetzung folgende Gleichungen:

20) $$\begin{cases} BH^2.AF.AJ = 8AH^2.BF.BJ, \\ AF^2.BH.BJ = 8BF^2.AH.AJ; \end{cases}$$

21) $$\begin{cases} CE^2.BD.BO=8BE^2.CD.CO, \\ BD^2.CE.CO=8CD^2.BE.BO; \end{cases}$$

22) $$\begin{cases} AG^2.CK.CL=8CG^2.AK.AL, \\ CK^2.AG.AL=8AK^2.CG.CL. \end{cases}$$

Diese Gleichungen enthalten eine merkwürdige Beziehung hinsichts der Distanzen zwischen fünf in Involution stehenden Punkten.

Ferner erhalten wir unter obiger Voraussetzung aus Nr. 18) die Gleichung:

23) $$AL.BJ.CO=AJ.BO.CL.$$

Auch ist in diesem Falle:

$$2AL:AK=DH:\frac{1}{2}EK,$$

$$BJ:BH=\frac{1}{2}EK:DH,$$

$$CO:CO=CO:CO;$$

woraus durch Multiplikation:

24) $$2AL.BJ.CO=AK.BH.CO.$$

Aus 23) und 24) ergibt sich nun der Satz:

„Legt man durch die Seiten eines Dreiecks drei parallele „Transversalen, welche einzeln durch die Dreiecksseiten halbirt „werden: so liegen von den neun Durchschnittspunkten vier Mal „drei in gerader Linie, und geben die Verbindungslinien derselben vier neue Transversalen von der Eigenschaft, dass das Produkt aus den abwechselnden Segmenten, welche von der durch „die Halbirungspunkte gehenden Transversale auf den Seiten des „Dreiecks gebildet werden, gleich ist dem halben Produkte aus „den abwechselnden Segmenten, welche auf den Dreiecksseiten „durch eine der drei übrigen Transversalen bestimmt werden.“

6.

Diese drei letztern Transversalen bilden, wie schon erwähnt, ein neues Dreieck *MNS*, und da auch durch dessen Seiten die parallelen ursprünglichen Transversalen halbirt werden, so gilt für das Dreieck *MNS* dasselbe, was von dem Dreieck *ABC* gesagt ist. Jene drei Transversalen sind daher in den Durchschnitten mit sich und den Seiten des ursprünglichen Dreiecks ebenfalls nach einer Involution von fünf Punkten getheilt. Da demnach sowohl die Punkte J, A, H, F, B, als auch die Punkte J, M, D, G, S eine Involution bilden und $DH \# FG$

ist, so ist auch $AM \# DH \# FG \# BS$, und daher ebenfalls die Transversale JO, welche durch die Halbirungspunkte der parallelen ursprünglichen Transversalen geht, in den Punkten J, U, L, O, V nach einer Involution von fünf Punkten getheilt.

Noch ist zu bemerken, dass die Durchschnittspunkte von je zwei entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke ABC und MNS auf der Transversale JO, also in gerader Linie liegen; beide Dreiecke sind folglich collinear, und die Transversale JO ist ihre Collineations-Achse. Die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Ecken AM, CN, BS schneiden sich demnach in einem und demselben Punkte, dem Collineations-Centrum. Da dieser Punkt aber hier in unendlicher Entfernung liegt, so stehen beide Dreiecke zu einander in derjenigen besondern Beziehung, welche Möbius, nach dem Vorgange von Euler, in seinem trefflichen Barycentrischen Calcül Verwandtschaft der Affinität genannt hat.

XXXVIII.

Ueber die Theilung eines ebenen Dreiecks durch zwei sich innerhalb desselben schneidende gerade Linien in vier gleiche Flächenstücke.

Von dem

Herrn Dr. E. W. Grebe,

Gymnasiallehrer zu Cassel.

In der Sammlung geometrischer Aufgaben von Adams (Winterthur 1849) findet sich unter Nr. 87. auch die: „ein Dreieck durch zwei auf einander senkrechte Geraden in vier gleiche Theile zu theilen.“ Um eine Gleichung des achten Grades zu umgehen, glaubt sich Herr Adams Seite 308. seines Buches berechtigt, zwei Gleichungen, die in Beziehung auf dieselben Unbekannten

vom zweiten Grade sind, als identisch zu betrachten, und gelangt durch diese offenbare Uebereilung zu augenscheinlich falschen Resultaten. Sowohl dieser Umstand, als der interessante Gegenstand der Aufgabe an sich, hat mich veranlasst, dieselbe von neuem zu behandeln. Weil indessen die wichtigsten meiner Formeln durch die Bedingung des rechtwinkeligen Durchschnittes nicht auffallend vereinfacht werden, so habe ich die Aufgabe allgemeiner gestellt. Ob die Art, wie ich dieselbe durch Näherung auflösend die Gleichung des achten Grades vermeide, den Beifall der Leser dieses Archivs und insbesondere des Herrn **Adams** gewinnen werde, muss ich erwarten.

Die beiden Durchschnittslinien unseres Dreiecks endigen in vier Punkten des Umfangs. Wenigstens einer seiner Seiten, wozu wir unsere Grundlinie CB (Taf. V. Fig. 3.) bestimmen wollen, gehören mithin zwei dieser Endpunkte an. Bezeichnen wir CB mit a, CE mit x, BG mit y, EG mit z, W. CED mit φ, W. BGF mit ψ, den Durchschnittswinkel EHG mit ω, den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit A; so erhalten wir den Forderungen unserer Aufgabe und einer bekannten trigonometrischen Formel gemäss die Gleichungen:

$$[1] \quad A=\frac{\frac{1}{2}a^2}{\cot B+\cot C}; \quad [2] \quad A=\frac{x^2}{\cot C+\cot\varphi};$$

$$[3] \quad A=\frac{y^2}{\cot B+\cot\psi}; \quad [4] \quad A=\frac{2z^2}{\cot\varphi+\cot\psi}.$$

Aus den Verbindungen von [1] und [2], sowie von [1] und [3], folgt:

$$[5] \quad \cot\varphi=\frac{2x^2(\cot B+\cot C)}{a^2}-\cot C=\frac{x^2}{A}-\cot C;$$

$$[6] \quad \cot\psi=\frac{2y^2(\cot B+\cot C)}{a^2}-\cot B=\frac{y^2}{A}-\cot B;$$

endlich aus der Verbindung von [1] und [4], wenn man statt $\cot\varphi$ und $\cot\psi$ die Werthe in [5] und [6] substituirt und reducirt,

$$[7] \quad 4z^2=2x^2+2y^2-a^2,$$

eine wegen ihrer Unabhängigkeit von allen Winkeln besonders merkwürdige Formel.

Da nach der Trigonometrie

$$\cot\omega=\frac{1-\cot\varphi.\cot\psi}{\cot\varphi+\cot\psi},$$

mithin auch

$$1-(\cot\varphi+\cot\psi)\cot\omega=\cot\varphi.\cot\psi;$$

so ergibt sich durch Substitutionen aus [5] und [6] in diese letzte Gleichung, so wie durch Multiplication derselben mit A^2:

$$[8] \quad A^2 - 2Az\cot\omega = (x^2 - A\cot C)(y^2 - A\cot B).$$

Löst man nun die beiden Gleichungen [7] und [8] nach x^2 und y^2 auf, so erhält man nach einigen Vereinfachungen die Formeln:

$$[9] \quad x^2 = z^2 + A\cot C \pm 2\sqrt{z^4 + 2Az^2\cot\omega - A^2},$$

$$[10] \quad y^2 = z^2 + A\cot B \mp 2\sqrt{z^4 + 2Az^2\cot\omega - A^2};$$

in Folge welcher man nun auch statt [5] und [6] setzen kann:

$$[11] \quad \cot\varphi = \frac{z^2}{A} \pm \sqrt{\frac{z^4}{A^2} + \frac{2z^2\cot\omega}{A} - 1},$$

$$[12] \quad \cot\psi = \frac{z^2}{A} \mp \sqrt{\frac{z^4}{A^2} + \frac{2z^2\cot\omega}{A} - 1}.$$

Es ist einleuchtend, dass durch die Formeln [9], [10], [11] und [12] unsere Aufgabe vollständig gelöst sein würde, wenn die in diesen Formeln vorkommende Grösse z ermittelt wäre. Dieses ist nun aber, leider, nicht der Fall, und würde eben, wenn man die bereits gewonnenen Gleichungen mit der aus der Figur sich leicht ergebenden Fundamentalgleichung

$$[13] \quad z = x + y - a$$

verbinden wollte, zu einer Gleichung des achten Grades für z führen. Zum Glück ist jedoch der Werth von z in sehr enge Grenzen eingeschlossen; es fällt nämlich, wie sogleich gezeigt werden wird, z stets zwischen $\frac{2}{3}a$ und $\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot a$, z^2 also, welches in den Formeln vorkommt, zwischen $\frac{4}{9}a^2$ und $\frac{1}{2}a^2$, oder zwischen $\frac{16}{36}a^2$ und $\frac{18}{36}a^2$. Man kann daher ohne einen bedeutenden Fehler zu begehen — und dieses ist die Auflösungsmethode durch Näherung, welche ich vorschlage — in den Formeln [9] und [10] statt z^2 etwa $\frac{17}{36}a^2$ setzen, hiernach die Werthe von x und y berechnen, und sich dann durch die Formel [13] einen genaueren Werth von z verschaffen. Dieses Verfahren, nach Umständen mehrmals wiederholt, wird ohne Zweifel die Werthe für alle hier in Betracht kommenden Grössen mit jedem nur irgend gewünschten Grade von Genauigkeit liefern.

Um nun das eben über die Grenzen von z Gesagte zu erhärten, lösen wir die Gleichungen [7] und [13] nach x und y auf, wodurch wir, wenn wir noch festsetzen, dass x nicht kleiner als y sein solle, was ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun geschehen kann, erhalten:

$$[14] \quad \begin{cases} x=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{3z^2-2az}, \\ y=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{3z^2-2az}. \end{cases}$$

Der Wurzelausdruck in [14] wird nun aber für alle Werthe von z, welche kleiner als $\frac{2}{3}a$ sind, imaginär; $\frac{2}{3}a$ ist also die eine Grenze für z. Wächst es von da an, so wächst [14] zufolge auch x; dieses aber kann nie grösser werden als a. Man wird daher den grössten Werth von z erhalten, wenn man die Gleichung

$$a=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{3z^2-2az}$$

nach z auflöst. Thut man dieses, so erhält man $z=\sqrt{\frac{1}{2}}.a$, welcher Ausdruck mithin die andere Grenze für z ist.

Aus den von mir hingestellten allgemeinen Formeln, deren mehrere noch interessanter Umwandlungen fähig sind, wie z. B. [8], wenn man statt des Flächeninhalts und der Winkel B und C die Höhe des Dreiecks und die beiden Abschnitte der Grundlinie, welche dieselbe bildet, einführt, lassen sich ohne Schwierigkeit speciellere für besondere Arten von Dreiecken, so wie für besondere Durchschnittswinkel, namentlich einen rechten, ableiten. Solche Uebungen sind stets sehr genussreich. Ich begnüge mich hier damit, nur noch zwei Resultate derselben anzuführen. Erstens: ist das vorgelegte Dreieck gleichseitig und ω ein Rechter, so lässt sich für z eine Gleichung des vierten Grades, nämlich

$$4z^4-16az^3+4a^2z^2+8a^3z-3a^4=0$$

aufstellen. Von den Wurzeln dieser Gleichung $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}.a$ und $(2\pm\sqrt{\frac{5}{2}})a$ ist aber nur die eine $z=+\sqrt{\frac{1}{2}}.a$ brauchbar. Zweitens: nimmt man den Durchschnittswinkel wieder als rechten an und setzt $z=\frac{2}{3}a$, wodurch sich $x=y=\frac{5}{6}a$ bestimmt; so findet man den Flächeninhalt des Dreiecks an keine andere Bedingung geknüpft, als dass der Abstand seiner Spitze von der Mitte der Grundlinie $=\frac{8}{9}a$ sei. Die Durchschnittslinien theilen hierbei beide Schenkel des Dreiecks in dem Verhältniss von 2 zu 3.

XXXIX.

Direktes Verfahren zum Rationalmachen der Gleichungen.

Von

Herrn H. Scheffler,

Bauconducteur bei den Herzoglich Braunschweigischen Eisenbahnen.

Im 1. Hefte des diesjährigen Theiles des Archivs, Thl. XIII. Nr. IV., hat Hr. Dr. Grebe gezeigt, wie man einen jeden Bruch mit irrationalem Nenner so umformen kann, dass sein Nenner rational wird. Das diesem Verfahren zu Grunde liegende Princip leitet aber zu einer noch viel wichtigeren Anwendung, nämlich zu einer direkten Methode behuf Rationalmachung der Gleichungen. Hr. Dr. Grebe wird mir erlauben, seinen geistreichen Gedanken im Interesse der Wissenschaft zu diesem Zwecke hier weiter auszubeuten.

Jenes Prinzip beruht auf der Bemerkung, dass, wenn man aus den n Faktoren α, β, γ... mit $(m-1)$ maliger Wiederholung eines jeden Elementes die Kombinationen zu allen Klassen von der 1sten bis incl. zur $n(m-1)$ten bildet, und die hierdurch dargestellten Produkte, welche sich nebst der Zahl 1 auch durch die Entwickelung der Formel

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots\alpha^{m-1})(1+\beta+\beta^2+\ldots\beta^{m-1})(1+\gamma+\gamma^2+\ldots\gamma^{m-1})\ldots$$

ergeben, mit B, C, D... bezeichnet, eine Funktion von der Form

$$a+b\sqrt[m]{B}+c\sqrt[m]{C}+d\sqrt[m]{D}+\ldots,$$

deren Gliederzahl $=m^n$ ist, durch ein- oder mehrmalige Multiplikation mit einer ähnlichen Funktion, worin nur die Koeffizienten a, b, c, d.... andere Werthe haben, stets wieder eine ähn-

liche Funktion von derselben Gliederzahl und mit denselben Wurzelgrössen erzeugen muss, sobald man nur nach geschehener Multiplikation alle unter den Wurzelzeichen sich einstellenden Faktoren vom $m$ten Grade absondert und als rationale Koeffizienten vor diese Wurzelzeichen stellt, also z. B. $\sqrt[m]{e^{m+p}} = e\sqrt[m]{e^p}$ schreibt.

Um von diesem Satze Gebrauch zu machen, würde es in jedem speziellen Falle (wo auch einige der Koeffizienten a, b, c.. gleich Null sein können) erforderlich sein:

1) dass man alle Wurzelgrössen, insofern sie nicht schon sämmtlich mit ein- und demselben positiven ganzen Exponenten gegeben sind, auf einerlei Wurzelbenennung m brächte, wobei m der kleinste gemeinschaftliche Dividend aller Wurzelexponenten werden würde;

2) dass man aus den hierdurch sich einstellenden Grössen B, C, D.... die einfacheren Faktoren α, β, γ.... bestimmte.

Aus der Grösse m^n, welche die Gliederzahl der so umgeformten und nöthigenfalls durch Glieder mit dem Koeffizienten Null vervollständigt gedachten Funktion ausdrückt, erkennt man aber, in welchem bedeutenden Maasse diese Gliederzahl sowohl mit dem Exponenten m, wie auch mit der Anzahl n der Faktoren α, β, γ.... wächst, und es erscheint daher zur Vermeidung einer überflüssigen Weitläufigkeit der Rechnung erforderlich, zuvörderst zu untersuchen, ob und wie weit sich diese Gliederzahl in jedem besondern Falle vermindern lasse.

Was zunächst die Umformung zu einerlei Wurzelexponenten anlangt, so kann man dieselbe zum grossen Vortheil der Rechnung sehr häufig unterlassen, selbst wenn in ein und demselben Gliede mehrere Wurzelgrössen mit verschiedenen Exponenten mit einander multiplizirt wären, wenn man also z. B. ein Glied von der Form $b\sqrt[m_1]{B_1}\sqrt[m_2]{B_2}\sqrt[m_3]{B_3}$ u. s. w. hätte. Denn angenommen, es kommen unter dem

Wurzelexponenten m_1 die Grössen B_1, C_1, D_1..... mit den n_1 einfacheren Faktoren α_1, β_1, γ_1....

„ „ m_2 die Grössen B_2, C_2, D_2...... mit den n_2 einfacheren Faktoren α_2, β_2, γ_2....

„ „ m_3 die Grössen B_3, C_3, D_3...... mit den n_3 einfacheren Faktoren α_3, β_3, γ_3....

u. s. w. vor; so denke man sich alle Produkte, welche durch die Formel

$$\sqrt[m]{(\alpha_1^{r_1}\beta_1^{s_1}\gamma_1^{t_1}\ldots)}\sqrt[m_2]{(\alpha_2^{r_2}\beta_2^{s_2}\gamma_2^{t_2}\ldots)}\sqrt[m_3]{(\alpha_3^{r_3}\beta_3^{s_3}\gamma_3^{t_3}\ldots)}\ldots.$$

dargestellt sind, indem man die Exponenten $r_1, s_1, t_1 \ldots, r_2, s_2, t_2$..

als von einander unabhängige Veränderliche ansieht, wovon nach und nach

ein jeder der Exponenten r_1, s_1, t_1 ... die Werthe 0, 1, 2 ... m_1-1

„ „ r_2, s_2, t_2 ... „ 0, 1, 2 ... m_2-1

„ „ r_3, s_3, t_3 ... „ 0, 1, 2 ... m_3-1

u. s. w. durchlaufen soll. Die Anzahl dieser Produkte, wovon das erste $=1$ ist, und welche wir mit 1, B', C', D' ... bezeichnen wollen, wird $=m_1^{n_1} m_2^{n_2} m_3^{n_3} \ldots$ sein. Von der Funktion

$$a' + b'B' + c'C' + d'D' + \ldots..$$

lässt sich nun die nämliche obige Behauptung aussagen, dass ihre Natur und Gliederzahl sich in Folge einer Multiplikation mit einem ähnlich gebildeten Ausdrucke, worin nur die Koeffizienten a', b', c' .... andere Werthe haben, nicht ändere.

Ist nun m der kleinste gemeinschaftliche Dividend von m_1, m_2, m_3 .... und ist ferner n die Anzahl der verschiedenen Faktoren unter allen obigen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots. \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \ldots. \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \ldots$, so würde, wenn man zuvor eine gleiche Wurzelbenennung hergestellt hätte, m^n die Anzahl der Glieder des gleichbedeutenden Ausdruckes

$$a + b\sqrt[m]{B} + c\sqrt[m]{C} + d\sqrt[m]{D} + \ldots.$$

sein. In den meisten Fällen wird aber

$$m_1^{n_1} m_2^{n_2} m_3^{n_3} \ldots. < m^n$$

sein. Mit Bestimmtheit ereignet sich dies:

1) wenn sämmtliche Faktoren $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots. \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \ldots \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \ldots$ von einander verschieden sind, indem alsdann nothwendig $n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$ wird, während m mindestens so gross ist, als der grösste der Exponenten m_1, m_2, m_3 ...

2) wenn je zwei der Wurzelexponenten m_1, m_2, m_3 ... relative Primzahlen gegen einander sind, indem alsdann $m = m_1 m_2 m_3 \ldots$ ist, während n mindestens so gross ist, als die grösste der Zahlen n_1, n_2, n_3 ....

In einem jeden dieser beiden Fälle wird man die Wurzelgrössen nicht auf einerlei Benennung bringen. Wie gross der dadurch zu erreichende Vortheil ist, mag das Beispiel lehren, wo man zwei Quadrat- und zwei Kubikwurzeln hat, worin die Radikanden α_1, β_1 und α_2, β_2 sämmtlich verschieden seien. Hier erhält man ohne Zurückführung auf einerlei Wurzelbenennung $m_1^{n_1} m_2^{n_2} = 2^2 . 3^2 = 36$ Glieder; wenn man dagegen erst gleiche Wurzelbenennungen herstellt, was den 6ten Grad erfordert, $m^n = 6^4 = 1296$ Glieder.

Nur in seltenen Fällen, wo unter den genannten Faktoren viel gleiche und unter den Wurzelexponenten viel solche vorkom-

men, welche ein gemeinschaftliches Maass besitzen, wird umgekehrt

$$m^n < m_1^{n_1} m_2^{n_2} m_3^{n_3} \ldots$$

werden können. Man braucht aber alsdann immer noch nicht **alle** Wurzelexponenten gleich zu machen, sondern vielleicht nur diejenigen, unter deren Wurzelzeichen sich die grösste Menge der einander gleichen Faktoren befindet, was man in jedem besonderen Falle leicht ermessen wird.

Was ferner die Bestimmung der Faktoren α, β, γ... aus den unter ein- und demselben Wurzelzeichen vom Grade m stehenden Grössen B, C, D.. betrifft, so wird man im ungünstigsten Falle, wo je zwei der letzteren Grössen relativ prim sind, diese Grössen selbst für α, β, γ.... anzunehmen haben. Wenn jedoch mehrere von B, C, D.... ein gemeinschaftliches Maass haben, wird man dieselben in die einfacheren Faktoren α, β, γ.... so zu zerlegen suchen, dass die Anzahl der Letzteren niemals die der Ersteren übersteigt, weil sonst mit dieser Zerlegung ein offenbarer Nachtheil für die Rechnung verbunden sein würde, wobei indessen für den Fall, dass die Anzahl von α, β, γ.... genau **gleich** der von B, C, D... wäre, ein Gewinn noch darin bestände, dass α, β, γ.... kleinere Zahlen, resp. einfachere Buchstabenausdrücke sind, als B, C, D...

Um nun zugleich die möglich **wenigsten** und daneben die möglich **kleinsten** Faktoren α, β, γ... zu erhalten, aus denen sich die Grössen B, C, D.... zusammensetzen lassen, hat man ein Verfahren einzuschlagen, welches sich am besten an einem Beispiele erläutern lässt. Man zerlege eine jede der Grössen B, C, D... in ihre Primfaktoren, und erhalte dafür, indem man solche Primfaktoren mit a, b, c... bezeichnet, folgende Ausdrücke:

$$ade \quad bde \quad c \quad def \quad de \quad ddef \quad deff \quad addee \quad c \quad dgh.$$

Aus der Reihe dieser Grössen streicht man zuvörderst die einander gleichen Grössen, mit Ausnahme einer einzigen, also hier die Grösse c, ferner alle diejenigen, welche Produkte aus zwei oder mehr der übrigen Grössen oder aus deren Potenzen darstellen, also hier die Grösse $addee$, welche $= ade \times de$ ist. Hierdurch bleiben

$$ade \quad bde \quad c \quad def \quad de \quad ddef \quad deff \quad dgh.$$

Jetzt sondert man aus beliebig vielen dieser Grössen ein darin enthaltenes gemeinschaftliches Maass, z. B. de ab, schreibt dasselbe wie eine **neu hinzukommende** Grösse mit in die neue Reihe, deren übrige Glieder die Quotienten von de in die betreffenden früheren Glieder und daneben vollständig die übrigen Glieder enthalten, von denen de als gemeinschaftliches Maass nicht abgesondert ist. Dies giebt

$$de \quad a \quad b \quad c \quad f \quad 1 \quad df \quad ff \quad dgh.$$

In dieser Reihe streicht man die Zahl 1 überall da, wo sie vor-

kommt, und ausserdem diejenigen Glieder, wie *ff*, welche bloss aus Produkten oder Potenzen der übrigen Glieder bestehen. Wenn sich auf diese Weise nicht wenigstens Ein Glied aus der neuen Reihe streichen lässt, ist die vorgenommene Operation unvortheilhaft, weil sich alsdann dadurch die Anzahl der Glieder um 1 vermehren wird. Im vorstehenden Falle bleibt

$$de \quad a \quad b \quad c \quad f \quad df \quad dgh.$$

Sondert man jetzt den gemeinschaftlichen Faktor d ab und streicht eines der beiden übrig bleibenden f, so erhält man

$$d \quad e \quad a \quad b \quad c \quad f \quad gh.$$

Jetzt, wo entweder je zwei Glieder dieser Reihe relative Primzahlen geworden sind, oder wo eine fernere Absonderung gemeinschaftlicher Faktoren die Gliederzahl nur vermehren würde, bricht man die Operation ab, und nimmt die erhaltenen Grössen für $\alpha, \beta, \gamma \ldots$

Hätte man z. B. in Zahlen für $B, C, D \ldots$

$$2 \; 6 \; 4 \; 7 \; 15 \; 10,$$

so würde man nach Streichung der 4 durch Absonderung des mehreren Gliedern gemeinschaftlichen Faktors 2 erhalten:

$$2 \; 1 \; 3 \quad 7 \; 15 \; 5,$$

worin jetzt 1 und 15 zu streichen ist, wodurch man für $\alpha, \beta, \gamma \ldots$

$$2 \; 3 \; 7 \; 5$$

erhält.

Hätte man für $B, C, \ldots$ die beiden Zahlen 6, 10; so würde man dieselben für $\alpha, \beta, \ldots$ nehmen müssen, da eine Absonderung des Faktors 2 zwar kleinere Werthe, aber einen mehr, ergeben würde, nämlich 2, 3, 5, was der Rechnung nur zum Nachtheile gereichen würde.

In dieser Weise bestimmt man $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots$ aus $B_1, C_1, D_1 \ldots$ ferner $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \ldots$ aus $B_2, C_2, D_2 \ldots$ u. s. w., und nachdem dies geschehen, untersucht man in der vorhin beschriebenen Weise, ob es noch rathsam sei, alle oder einige der Wurzelgrössen mit verschiedenen Exponenten auf einerlei Wurzelbenennung zu bringen oder nicht.

Diese Vorbereitung ist sowohl von Wichtigkeit, wenn man bloss den Nenner eines Bruches, als auch wenn man eine ganze Gleichung rational machen will. Angenommen, eine solche Gleichung, worin bereits alle Wurzelgrössen in die Zähler geschafft sind, was jederzeit leicht geschehen kann, sei

$$a' + b'B' + c'C' + d'D' + \ldots = 0.$$

Da diese Gleichung, wie man weiter unten sehen wird, mehrmals potenzirt werden muss; so würde man sich, selbst wenn ihre Gliederzahl in der gegebenen Form noch unvollständig sein sollte, auf das Erscheinen aller vorhin genannten Glieder von der Zahl $m_1^{n_1} m_2^{n_2} m_3^{n_3} \ldots$ gefasst machen müssen, insofern man die Gleichung bei diesen Potenzirungen in der vorstehenden annullirten Form beibehalten wollte. Diese Gliederzahl kann, obgleich sie meistens sehr viel kleiner ist, als m^n, doch häufig noch sehr gross ausfallen. Es gereicht daher zur bedeutenden Abkürzung der Rechnung, wenn man die Wurzelgrössen B', C', D'.... auf beiden Seiten der Gleichung so vertheilt:

1) dass kein Wurzelexponent gleichzeitig auf beiden Seiten erscheint,
2) dass die Summe aller Glieder der vollständig gedachten Funktionen auf beiden Seiten der Gleichung die kleinstmögliche sei.

Durch diese Trennung der Glieder entstehe, wenn man sich vorläufig auch das rationale Glied getheilt denkt, die Gleichung:

$$a'+b'B'+c'C'+d'D'+\ldots = a''+b''B''+c''C''+d''D''+\ldots$$

Bezeichnet man diejenigen der Grössen $m_1^{n_1}$, $m_2^{n_2}$, $m_3^{n_3}$,..... welche sich auf die linke Seite dieser Gleichung beziehen, mit p_1, p_2, p_3..., und diejenigen, welche sich auf die rechte beziehen, mit q_1, q_2, q_3....; so wird die Anzahl aller Glieder bei einer noch so weit fortgesetzten Potenzirung dieser Gleichung niemals den Werth

$$(p_1 p_2 p_3 \ldots) + (q_1 q_2 q_3 \ldots)$$

übersteigen können, welcher noch bedeutend kleiner ist, als

$$(p_1 p_2 p_3 \ldots)(q_1 q_2 q_3 \ldots) = m_1^{n_1} m_2^{n_2} m_3^{n_3} \ldots$$

Damit aber jener erstere Werth ein Minimum werde, ordne man alle Grössen p_1, p_2, p_3...q_1, q_2, q_3..., wovon auch mehrere einander gleich sein können, nach ihrem Werthe, so dass die grösste die erste und die kleinste die letzte ist. Wenn nun diese Reihe so beginnt: p_1, q_1, q_2, p_2..., so schreibt man die erste Grösse p_1 links, die zweite q_1 rechts und die dritte q_2 wieder rechts, wodurch man links p_1 und rechts das Produkt $q_1 q_2$ erhält. Wenn mehr als diese drei Grössen vorhanden sind, so verfährt man mit den übrigen in der Weise, dass man jede nächstfolgende auf diejenige Seite setzt, wo sich eben das kleinere Produkt befindet. Wären einmal die Produkte auf beiden Seiten gleich, so würde es gleichgültig sein, welchem von beiden man die nächste Grösse zufügen wollte.

Hätte man z. B. für $m_1^{n_1}$, $m_2^{n_2}$,... resp. die Werthe $2^4=16$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $6^1=6$; so würde die geordnete Reihe dieser Zahlen

$$\underset{25}{\overset{1}{\smile}}\quad \underset{16}{\overset{2}{\smile}}\quad \underset{16}{\overset{3}{\smile}}\quad \underset{9}{\overset{4}{\smile}}\quad \underset{6}{\overset{5}{\smile}}$$

sein, welche folgendermaassen zu trennen wäre:

$$\overset{1}{25}.\overset{4}{9}.\overset{5}{6} \qquad \overset{2}{16}.\overset{3}{16},$$

so dass alle Wurzelgrössen vom 5ten. 3ten und 6ten Grade auf die linke und die vom 2ten und 4ten Grade auf die rechte Seite zu stehen kämen.

Wären ausser der vorstehenden noch Wurzelgrössen vom 7ten Grade mit 2 einfachen Radikanden vorhanden, so dass zu jener Reihe noch die Zahl $7^2 = 49$ käme, so würde man wie folgt zu trennen haben:

$$\overset{1}{49}.\overset{4}{16}.\overset{6}{6} \qquad \overset{2}{25}.\overset{3}{16}.\overset{5}{9},$$

so dass nun die Wurzelgrössen vom 7ten, 4ten und 6ten Grade links und die vom 5ten, 2ten und 3ten Grade rechts ihren Platz fänden.

Wenn die Trennung nach dieser Regel dadurch unmöglich wird, dass mehrere Wurzelgrössen von verschiedenen Graden mit einander multiplizirt in der gegebenen Gleichung vorkommen, so hat man gleich von vorn herein die durch Multiplikation verknüpften Wurzelgrössen wie untrennbare zu behandeln, indem man das betreffende Produkt der darauf bezüglichen Grössen $m_1^{n_1}$, $m_2^{n_2}$... z. B. $m_1^{n_1} m_2^{n_2}$ wie eine einzige Zahl ansieht.

Wären z. B. in dem letzteren Beispiele die Wurzeln vom 3ten und 6ten Grade durch Multiplikation an einander gefesselt, so hätte man statt der beiden einzelnen Zahlen 3^2 und 6^1 die einzige $3^2.6^1 = 9.6 = 54$, also die Reihe

$$\overset{1}{54} \quad \overset{2}{49} \quad \overset{3}{16} \quad \overset{4}{16}\ldots,$$

woraus sich folgende Trennung:

$$\overset{1}{54}.\overset{4}{16} \qquad \overset{2}{49}.\overset{3}{16}$$

ergeben würde. Hiernach müssten nun die Wurzeln vom 3ten, 6ten und 4ten Grade auf die linke und die vom 7ten und 2ten Grade auf die rechte Seite geschafft werden.

Das rationale Glied ist im Vorstehenden nur wegen der Symmetrie der Formeln getrennt. Man wird dasselbe ungetrennt auf diejenige Seite schreiben, wo sich die kleinste Menge Glieder der unvollständigen Gleichung vorfinden.

Berücksichtigt man den Einfluss dieses rationalen Gliedes auf die Anzahl der Glieder, welche sich durch mehrmalige Potenzirung der in vorstehender Weise getrennten Gleichung ergeben können; so leuchtet ein, dass ausser einem rationalen Gliede höchstens $(p_1 p_2 p_3 \ldots) + (q_1 q_2 q_3 \ldots) - 2$ Glieder mit verschiedenen

irrationalen Faktoren entstehen können. Diese Anzahl wollen wir mit r bezeichnen.

Erhebt man nun die in Rede stehende Gleichung zum 1sten, 2ten, 3ten, 4ten...$(r+1)$sten Grade, so erhält man zwischen den ebengenannten r Irrationalgrössen $(r+1)$ Gleichungen, welche in Beziehung zu jenen Grössen sämmtlich vom ersten Grade sind. Eliminirt man hierauf zwischen diesen Gleichungen sämmtliche Irrationalgrössen, so bleibt die gesuchte rationale Gleichung zurück.

Die Anzahl r der Irrationalen nach der obigen Bestimmung ist die grösste, welche sich in dem komplizirtesten Falle nur einstellen kann. Man wird aber darauf bedacht sein, aus der besonderen Form der gegebenen Gleichung jeden möglichen Vortheil zu ziehen, welcher die in der Regel sehr umständliche Rechnung abkürzen, und namentlich die Menge der zu eliminirenden Irrationalen vermindern kann. Zu diesem Ende wird man, wenn es thunlich ist, nach jeder einzelnen Potenzirung *gleich* jede sich als zweckmässig erweisende Elimination einiger Irrationalen vornehmen, oder das rationale Glied bald auf die linke, bald auf die rechte Seite stellen, oder auch einige Potenzen ganz überspringen, oder statt eine neue Potenz zu bilden, zwei der vorhergehenden Gleichungen mit einander multipliziren, und endlich nach Herstellung jeder neuen Gleichung prüfen, ob man nicht für alle bis dahin aufgetretenen Irrationalen schon Gleichungen genug besitze.

Wäre z. B. die Gleichung

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt[3]{z}-1=0$$

rational zu machen; so würde man, wenn man die Wurzelgrössen immer zusammen auf einer Seite stehen lassen und zugleich ein- und dieselbe Wurzelbenennung herstellen wollte, da hier

$$m_1,\ n_1,\ m_2,\ n_2 \text{ resp. } =2,\ 2,\ 3,\ 1$$

ist und bei gleicher Wurzelbenennung m, n resp. $=6$, 3 werden würde, $6^3-1=215$ verschiedene Irrationalen zu gewärtigen haben, womit sich durchaus nicht rechnen lässt.

Wollte man ohne die gleiche Wurzelbenennung herzustellen, alle Wurzelgrössen stets auf einer Seite behalten, so würde man sich auf $2^2.3^1-1=11$ Irrationalen gefasst machen müssen, was ebenfalls noch eine mühsame Rechnung ergeben würde.

Trennt man dagegen die Wurzelgrössen, indem man die vom zweiten Grade allein auf der linken Seite stehen lässt, und die Kubikwurzel mit dem rationalen Gliede auf die rechte Seite schafft; so können links nur $2^2-1=3$ und rechts nur $3^1-1=2$, im Ganzen also nur 5 Irrationalen auftreten, zu deren Elimination

man die ersten 6 Potenzen zu bilden hätte. Dies gibt, wenn man der Kürze wegen

$$\sqrt{x}=X,\ \sqrt{y}=Y,\ \sqrt[3]{z}=Z$$

setzt, folgende 6 Gleichungen:

1) $X+Y=1+Z,$

2) $x+y+2XY=1+2Z+Z^2,$

3) $(x+3y)X+(y+3x)Y=1+z+3Z+3Z^2,$

4) $x^2+6xy+y^2+(4x+4y)XY=1+4z+(4+z)Z+6Z^2,$

5) $(x^2+10xy+5y^2)X+(y^2+10xy+5x^2)Y$
$$=1+10z+(5+5z)Z+(10+z)Z^2,$$

6) $x^3+15x^2y+15xy^2+y^3+(6x^2+20xy+6y^2)XY$
$$=1+20z+z^2+(6+15z)Z+(15+6z)Z^2;$$

zwischen welchen die 5 Irrationalen X, Y, XY, Z, Z^2 zu eliminiren sind.

Obgleich durch die letzte Trennung der Wurzelgrössen die Anzahl der Irrationalen bedeutend beschränkt ist, so würde die an sich leichte Elimination derselben aus den vorstehenden 6 Gleichungen doch noch zu einer umständlichen und zeitraubenden Arbeit führen, bei welcher sich Rechnenfehler nur zu leicht einschleichen. Man würde daher im vorliegenden Falle noch einfacher folgendermaassen verfahren:

Man transponirt in der Gleichung 2) alle rationalen Glieder auf die rechte Seite und quadrirt die entstehende Gleichung. Hierdurch müssen alle aus X und Y gebildeten Irrationalen ein für alle Mal verschwinden, und man erhält:

$$4xy=(1-x-y)^2+4z+[4(1-x-y)+z]Z+2(3-x-y)Z^2,$$

oder

$$4xy-(1-x-y)^2-4z=[4(1-x-y)+z]Z+2(3-x-y)Z^2.$$

Man hat es jetzt nur noch mit den 2 Irrationalen Z und Z^2 zu thun, welche man mit geringeren Umständen aus der 1sten, 2ten und 3ten Potenz der letzten Gleichung würde eliminiren können. Man findet jedoch, dass zu diesem Zwecke schon die 1ste und 3te Potenz genügt Denn da diese 3te Potenz in die Form

$$[4xy-(1-x-y)^2-4z]^3$$
$$=[4(1-x-y)+z]^3z+8(3-x-y)^3z^2$$
$$+6[4(1-x-y)+z](3-x-y)z\{[4(1-x-y)+z]Z+2(3-x-y)Z^2\}$$

gebracht werden kann; so lassen sich aus dieser und der vorhergehenden Gleichung die beiden Grössen Z und Z^2 auf ein Mal eliminiren. Dies gibt die gesuchte rationale Gleichung:

$$[4xy-(1-x-y)^2-4z]^3$$
$$=[4(1-x-y)+z]^3z+8(3-x-y)^3z^2$$
$$+6[4xy-(1-x-y)^2-4z][4(1-x-y)+z](3-x-y)z.$$

XL.

Methode um die Länge eines Kreisbogens annähernd durch Construction einer Geraden zu finden.

Von

Herrn J. J. Åstrand,

Privatlehrer der Mathematik zu Gothenburg in Schweden.

Der Umstand, dass das Problem, einen gegebenen Kreisbogen auf geometrische Art annähernd zu rektifiziren, nicht in einem einzigen der mir bekannten geometrischen Lehrbücher und Aufgaben-Sammlungen zu finden ist, ungeachtet dieses Problem im praktischen Leben vorkommen kann und somit nicht ohne Nutzen ist, veranlasste mich folgende Auflösung herzuleiten.

Da, nach der analytischen Trigonometrie:

$$x\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{n}\right)=\frac{3x}{2}-\frac{x^3}{4n^2}+\frac{x^5}{48n^4}-\ldots..$$

und

$$\frac{3n}{2}\sin\frac{x}{n}=\frac{3x}{2}-\frac{x^3}{4n^2}+\frac{x^5}{80n^4}-\ldots$$

so ist:

$$x\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{n}\right)-\frac{x^5}{120n^4}=\frac{3n}{2}\sin\frac{x}{n},$$

sehr nahe, oder

$$x=\frac{\frac{3n}{2}\sin\frac{x}{n}}{1+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{n}-\frac{x^4}{120n^4}}=\frac{\frac{3n}{2}\sin\frac{x}{n}}{1+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{n}}+\frac{x^4}{80n^3}\cdot\frac{\sin\frac{x}{n}}{1+\cos\frac{x}{n}},$$

ebenfalls sehr nahe.

Wenn man in diesem Werthe des Kreisbogens x den zweiten Term $\frac{x^4}{80n^3}\cdot\frac{\sin\frac{x}{n}}{1+\cos\frac{x}{n}}$, seiner Unbedeutendheit wegen, weglässt und den Radius einsetzt, so hat man, annähernd, folgende Analogie:

$$\text{Rad}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{n}:n\sin\frac{x}{n}=\frac{3}{2}\text{Rad}:x,$$

welche, construirt, die gesuchte Gerade giebt.

Aus der Form des weggelassenen Termes erhellt, dass, je grösser n angenommen wird, desto genauer man die Länge des Kreisbogens x erhält, so dass, wie gross dieser auch ist, n jederzeit von solcher Grösse gewählt werden kann, dass die gewünschte Genauigkeit erlangt wird; doch immer, wegen der Möglichkeit und Theilung des Kreisbogens, $n=2^m$, wenn m eine ganze Zahl bedeutet.

Setzt man $n=2$, so wird:

$$\text{Rad}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}:2\sin\frac{x}{2}=\frac{3}{2}\text{Rad}:x,$$

oder

$$\text{Rad}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}:\text{chord}\,x=\frac{3}{2}\text{Rad}:x,$$

welche Analogie auf folgende Weise leicht construirt wird:

Ist in Taf. V. Fig. 4. AB der gegebene Kreisbogen, so sucht man seinen Mittelpunkt C und zieht den Radius CE senkrecht gegen die Chorde AB; CD wird halbirt in F und DE in G; DC wird verlängert bis H, so dass $FH = CE$; durch G zieht man JK parallel mit AB. Dann verbindet man H mit A und B und verlängert HA und HB bis J und K, so ist JK beinahe gleich dem Kreisbogen AB.

Anmerk. Der Fehler in der gefundenen Bogenlänge beträgt, wenn z. B.:

$x = 25^0$ und $n = 2$, weniger als 0,0000062 oder $< 1\frac{1}{3}''$,
$x = 45^0$ „ $n = 4$, „ 0,0000082 „ $< 1\frac{3}{4}''$.

XLI.

Ueber die Ausdrücke, welche für Wurzeln höherer Grade mit $(B + A\sqrt{\alpha})$ $(B - A\sqrt{\alpha})$ analog sind.

Von dem

Herrn Dr. E. W. Grebe,

Gymnasiallehrer zu Cassel.

Die ausgebreitete Wichtigkeit des Satzes von dem Produkte der Summe und Differenz zur Beseitigung irrationaler Quadratwurzeln ist hinreichend bekannt, und veranlasst leicht die Frage nach der näheren Beschaffenheit der Formeln, welche für höhere Wurzeln ähnliche Dienste leisten. Da sich dasjenige, was wir in Beziehung auf eine Wurzel sagen werden, leicht auf andere übertragen und die allgemeine Gesetzlichkeit genügend erkennen

lassen wird; so beginnen wir mit der Erörterung von Ausdrücken eines bestimmten Grades. Fragen wir dem gemäss nach einem Factor, der mit

$$E+D\sqrt[5]{\alpha}+C\sqrt[5]{\alpha^2}+B\sqrt[5]{\alpha^3}+A\sqrt[5]{\alpha^4}$$

verbunden ein rationales Product liefert; so leuchtet ein, dass wenn wir denselben

$$1+x\sqrt[5]{\alpha}+y\sqrt[5]{\alpha^2}+z\sqrt[5]{\alpha^3}+v\sqrt[5]{\alpha^4}$$

setzen, die Unbekannten x, y, z und v sich werden bestimmen lassen. Durch Ausführung der Multiplication erhalten wir nämlich

$$\begin{array}{lllll}
E & +\;D\sqrt[5]{\alpha} & +\;C\sqrt[5]{\alpha^2} & +\;B\sqrt[5]{\alpha^3} & +\;A\sqrt[5]{\alpha^4} \\
+A\alpha x & +Ex\sqrt[5]{\alpha} & +\;Dx\sqrt[5]{\alpha^2} & +\;Cx\sqrt[5]{\alpha^3} & +\;Bx\sqrt[5]{\alpha^4} \\
+B\alpha y & +A\alpha y\sqrt[5]{\alpha} & +\;Ey\sqrt[5]{\alpha^2} & +\;Dy\sqrt[5]{\alpha^3} & +\;Cy\sqrt[5]{\alpha^4} \\
+C\alpha z & +B\alpha z\sqrt[5]{\alpha} & +\;A\alpha z\sqrt[5]{\alpha^2} & +\;Ez\sqrt[5]{\alpha^3} & +\;Dz\sqrt[5]{\alpha^4} \\
+D\alpha v & +C\alpha v\sqrt[5]{\alpha} & +\;B\alpha v\sqrt[5]{\alpha^2} & +\;A\alpha v\sqrt[5]{\alpha^3} & +\;Ev\sqrt[5]{\alpha^4}.
\end{array}$$

Befriedigen wir nun, was ohne Schwierigkeit möglich ist, die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A+Bx+Cy+Dz+Ev&=0,\\
B+Cx+Dy+Ez+A\alpha v&=0,\\
C+Dx+Ey+A\alpha z+B\alpha v&=0,\\
D+Ex+A\alpha y+B\alpha z+C\alpha v&=0;
\end{aligned}$$

so ist das Verlangte geschehen. Aus der Lehre von den Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten weiss man, dass die Werthe von x, y, z und v sämmtlich Quotienten von gemeinschaftlichem Nenner sind, und dass sowohl dieser Nenner als die einzelnen Zähler Aggregate sind, deren einzelne Glieder keine anderen Factoren haben als A, B, C, D, E und α. Wir überzeugen uns leicht, dass wir die Factoren α auch erst am Schlusse der Rechnung in der erforderlichen Anzahl beifügen, und mithin dieselben bis dahin zur Erleichterung des Rechnens übergehen können. Zu dem Ende denken wir uns in dem Ausdrucke

$$E+D\sqrt[5]{\alpha}+C\sqrt[5]{\alpha^2}+B\sqrt[5]{\alpha^3}+A\sqrt[5]{\alpha^4}$$

alle Glieder als von derselben Dimension, und zwar von der fünften, indem wir $\sqrt[5]{\alpha}$ als die Dimensionseinheit wählen. Von den Buchstaben A, B, C, D und E hat alsdann ein jeder eine seiner Stelle im Alphabet entsprechende Dimension. Ebenso denken wir uns bei

$$1 + x\sqrt[5]{\alpha} + y\sqrt[5]{\alpha^2} + z\sqrt[5]{\alpha^3} + v\sqrt[5]{\alpha^4}$$

alle Glieder von der nullten Dimension, wodurch die Unbekannten x, y, z und v der Reihe nach die Dimensionswerthe -1, -2, -3 und -4 erhalten. Jedes Glied des Zählers sowohl als des Nenners in den Ausdrücken, die für x, y u. s. w. gefunden werden, muss alsdann den Factor α so oft erhalten, als ihm die Dimension fünf, die diesem Factor zukommt, noch fehlt, wenn man es mit den übrigen Gliedern, die mit ihm von gleich hoher Dimension sein müssen, vergleicht. Zugleich muss die Dimension des Nenners die des Zählers bei dem Ausdrucke für x um 1, bei dem für y um 2 u. s. w. übertreffen. Hiernach haben wir nun bloss die Gleichungen

$$A + Bx + Cy + Dz + Ev = 0,$$
$$B + Cx + Dy + Ez + Av = 0,$$
$$C + Dx + Ey + Az + Bv = 0,$$
$$D + Ex + Ay + Bz + Cv = 0$$

aufzulösen: und stellen wir diese, um die allgemeinen Auflösungsformeln desto besser anwenden zu können, durch

$$a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z + e_1 v = 0,$$
$$a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z + e_2 v = 0,$$
$$a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 z + e_3 v = 0,$$
$$a_4 + b_4 x + c_4 y + d_4 z + e_4 v = 0$$

dar; so entsteht die Tabelle, deren einfaches Gesetz sogleich in die Augen springt:

$$A = a_1 = e_2 = d_3 = c_4,$$
$$B = b_1 = a_2 = e_3 = d_4,$$
$$C = c_1 = b_2 = a_3 = e_4,$$
$$D = d_1 = c_2 = b_3 = a_4,$$
$$E = e_1 = d_2 = c_3 = b_4.$$

Da x, y, z und v einen gemeinschaftlichen Nenner haben müssen, den wir N nennen wollen; so kann man auch, um alle Brüche zu vermeiden,

$$N+Nx\sqrt[5]{\alpha}+Ny\sqrt[5]{\alpha^2}+Nz\sqrt[5]{\alpha^3}+Nv\sqrt[5]{\alpha}$$

als den Ausdruck annehmen, mit welchem man

$$E+D\sqrt[5]{\alpha}+C\sqrt[5]{\alpha^2}+B\sqrt[5]{\alpha^3}+A\sqrt[5]{\alpha^4}$$

zu multipliciren hat, um ein rationales Product zu gewinnen. Der Werth von N ergibt sich nach der Methode der positiven und negativen Permutationen durch nachstehende Rechnung:

$+b_1c_2d_3e_4$	$BDAC$	$+d_1b_2c_3e_4$	$DCEC$
$-b_1c_2e_3d_4$	$BDBB$	$-d_1b_2e_3c_4$	$DCBA$
$-b_1d_2c_3e_4$	$BEEC$	$-d_1c_2b_3e_4$	$DDDC$
$+b_1d_2e_3c_4$	$BEBA$	$+d_1c_2e_3b_4$	$DDBE$
$+b_1e_2c_3d_4$	$BAEB$	$+d_1e_2b_3c_4$	$DADA$
$-b_1e_2d_3c_4$	$BAAA$	$-d_1e_2c_3b_4$	$DAEE$
$-c_1b_2d_3e_4$	$CCAC$	$-e_1b_2c_3d_4$	$ECEB$
$+c_1b_2e_3d_4$	$CCBB$	$+e_1b_2d_3c_4$	$ECAA$
$+c_1d_2b_3e_4$	$CEDC$	$+e_1c_2b_3d_4$	$EDDB$
$-c_1d_2e_3b_4$	$CEBE$	$-e_1c_2d_3b_4$	$EDAE$
$-c_1e_2b_3d_4$	$CADB$	$-e_1d_2b_3c_4$	$EEDA$
$+c_1e_2d_3b_4$	$CAAE$	$+e_1d_2c_3b_4$	$EEEE$;

und es ist mithin

$$N=E^4-3E^2DA-3E^2CB+2ED^2B+2EDC^2+2ECA^2+2EB^2A$$
$$-D^3C-C^3A-B^3D-A^3B+D^2A^2+C^2B^2-DCBA.$$

Erwägen wir, dass unser rationales Product auch eben so gut durch die Multiplication der Factoren

$$A\alpha+E\sqrt[5]{\alpha}+D\sqrt[5]{\alpha^2}+C\sqrt[5]{\alpha^3}+B\sqrt[5]{\alpha^4}$$

und

$$Nx+Ny\sqrt[5]{\alpha}+Nz\sqrt[5]{\alpha^2}+Nv\sqrt[5]{\alpha^3}+\frac{1}{\alpha}N\sqrt[5]{\alpha^4}$$

entstehen konnte, und dass es uns dermalen auf die Factoren α noch nicht ankommt; so werden wir durch einfache Verschiebung der Buchstaben aus dem Werth von N sofort den Werth von Nx ableiten können. Wir erhalten

$$Nx = A^4 - 3A^2EB - 3A^2DC + 2AE^2C + 2AED^2 + 2ADB^2 + 2AC^2B - E^3D - D^3B - C^3E - B^3C + E^2B^2 + D^2C^2 - EDCB.$$

Ganz auf dieselbe Weise ergibt sich:

$$Ny = B^4 - 3B^2AC - 3B^2ED + 2BA^2D + 2BAE^2 + 2BEC^2 + 2BD^2C - A^3E - E^3C - D^3A - C^3D + A^2C^2 + E^2D^2 - AEDC,$$

$$Nz = C^4 - 3C^2BD - 3C^2AE + 2CB^2E + 2CBA^2 + 2CAD^2 + 2CE^2D - B^3A - A^3D - E^3B - D^3E + B^2D^2 + A^2E^2 - BAED,$$

$$Nv = D^4 - 3D^2CE - 3D^2BA + 2DC^2A + 2DCB^2 + 2DBE^2 + 2DA^2E - C^3B - B^3E - A^3C - E^3A + C^2E^2 + B^2A^2 - CBAE.$$

Der Werth von N und die aus diesem abgeleiteten Werthe von Nx, Ny, Nz und Nv stehen nun freilich noch nicht auch in so fern fest, dass die Möglichkeit ausgeschlossen wäre, auch alle Glieder solcher Werthe mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen. Für N kann man ein für alle Mal die Anordnung der Vorzeichen festsetzen, nach welcher das Glied E^4 positiv ist; es fragt sich alsdann nur, ob die dem E^4 in den übrigen Werthen entsprechenden Glieder A^4, B^4, C^4 und D^4 auch alle gleichzeitig positiv sein müssen. Um diese Frage zu beantworten bedenken wir, dass wir den Zähler von x, d. h. Nx auch unmittelbar dadurch hätten berechnen können, dass wir in der obigen Tabelle von Permutationen statt eines jeden b ein a gesetzt und dann alle Glieder mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen hätten. Da nun A^4 nur aus der Permutation $a_1 e_2 d_3 c_4$ entstehen kann, diese aber, so lange sie noch $b_1 e_2 d_3 c_4$ lautete, als eine ungerade Anzahl von Variationen enthaltend, negativ war, und also nach verändertem Zeichen positiv werden muss; so ist A^4 und mithin auch B^4, C^4 und D^4 positiv. Man übersieht bald, dass ähnliche Umstände sich bei jeder Wurzel von ungeradem Grade einstellen müssen, dass aber bei Wurzeln von geradem Grade die Sache anders ist. Vergleichen wir nämlich die beiden Permutationen $qp \dots dcb$ und $bqp \dots dc$, so stellt sich sogleich heraus, dass dieselben von ungleichen Vorzeichen sein müssen, wenn die Zahl der Elemente eine gerade ist, und von gleichem Vorzeichen, wenn die Zahl der Elemente eine ungerade ist. Daher werden wir z. B. bei einer Wurzel des sechsten Grades, wenn wir das vorkommende F^5 positiv setzen, A^5 negativ, B^5 positiv, C^5 negativ, D^5 positiv und E^5 negativ nehmen müssen.

Ermitteln wir die Werthe von N auch für andere Wurzeln als die fünfte und fügen den jedesmaligen Grad der Wurzel dem N als Index bei; so ergibt sich die nachfolgende Zusammenstellung der Ausdrücke von N_2 bis N_6:

$$N_2 = B,$$
$$N_3 = C^2 - AB,$$
$$N_4 = D^3 - DB^2 - 2DCA + C^2B + BA^2,$$

$$N_5 = E^4 - 3E^2DA - 3E^2CB + 2ED^2B + 2EDC^2 + 2ECA^2 + 2EB^2A - D^3C - C^3A - B^3D - A^3B + D^2A^2 + C^2B^2 - DCBA,$$

$$N_6 = F^5 - 4F^3EA - 4F^3DB - 2F^3C^2 + 3F^2E^2B + 3F^2DA^2 + 6F^2EDC + 6F^2CBA + F^2D^3 + F^2B^3 - 2FE^3C - 2FA^3C - 3FE^2D^2 + 3FE^2A^2 + 3FD^2B^2 - 3FB^2A^2 - 6FD^2CA - 6FECB^2 + FEDCB - FDC^2B + FC^4 + DE^4 - BD^4 - DB^4 + BA^4 + D^3C^2 + B^3C^2 - 2A^3DE - 2E^3AB + 2B^3AE - 2C^3AB - 2C^3DE + 2D^3AE + 3A^2C^2D + 3E^2C^2B.$$

Bei jedem folgenden Grad der Wurzel werden diese Ausdrücke beziehlicher Weise umfangreicher, so dass es gerathen scheint, mit N_6 zu schliessen. Ueber den innern Bau der Ausdrücke, dieselben sowohl einzeln als in ihrem gegenseitigen Verhältniss betrachtet, könnte ich noch mehrere Bemerkungen beifügen; jedoch ist die Ausbeute dessen, was sich mir bis jetzt in dieser Beziehung ergeben hat, im Ganzen noch so gering, dass es mir besser scheint, alles hierauf Bezügliche vorerst noch zu unterdrücken. Ich gebe daher zum Schluss nur noch eine Probe über das Hinzufügen der bisher ausgelassenen Factoren α:

$$N_4 = D^3 - DB^2\alpha - 2DCA\alpha + C^2B\alpha + BA^2\alpha^2,$$

$$N_4x = -A^3\alpha^2 + AC^2\alpha + 2ADB\alpha - D^2C - CB^2\alpha,$$

$$N_4y = B^3\alpha - BD^2 - 2BAC\alpha + A^2D\alpha + DC^2,$$

$$N_4z = -C^3 + CA^2\alpha + 2CBD - B^2A\alpha - AD^2.$$

XLII.

Findung der Hauptaxen aus zwei conjugirten Durchmessern.

Vom
Herrn M. H. Meyer,
Lehrer an der mechanischen Baugewerkenschule zu Freiberg.

Die Darstellung der Ellipsen erfolgt entweder durch Bestimmung einzelner Punkte oder mit Hilfe von Kreisbögen. Beachtet man die Menge kleiner Fehler, die beim Bestimmen einer grossen Anzahl einzelner Punkte unvermeidlich sind, so wird die letztere Methode, man möge nun Krümmungskreise oder eine gute annähernde Construction benutzen, gewiss schönere und richtigere Ellipsen geben. Allein fast alle Verfahren der letztern Art setzen voraus, dass die Hauptaxen bekannt seien; kann man auch durch conjugirte Axen Krümmungskreise angeben, so sind die Endpunkte der Hauptaxen doch von wesentlichem Einflusse, und man wird, wenn diese nicht gegeben sind, selbst wenn man noch einzelne Punkte bestimmt und durch diese Krümmungskreise legt, keine so genauen und schönen Ellipsen erhalten. Sind die Hauptaxen auf leichte Weise zu finden, so ist es immer am genauesten und einfachsten, diese erst zu bestimmen und dann mit Hilfe derselben die Ellipsen zu vollenden. Alle bis jetzt bekannten Constructionen, um aus zwei conjugirten Durchmessern die Hauptaxen zu finden, sind aber mehr oder weniger complicirt, und es dürfte daher folgendes einfache Verfahren, namentlich für die descriptive Geometrie, wo in den meisten Fällen conjugirte Durchmesser weit leichter als die Hauptaxen erhalten werden, von nicht ganz unbedeutendem Vortheile sein. AB und CD (Taf. VII. Fig. 3.) seien die gegebenen zusammengehörigen Durchmesser. Um die Grösse der grossen und kleinen Axe zu bestimmen, errichte man auf AB die Normale ME, mache dieselbe $= AM$ und ziehe CE

und *ED*. $\frac{CE+ED}{2}$ wird dann die halbe grosse, $\frac{ED-CE}{2}$ die halbe kleine Axe sein; trägt man daher *EC* von *E* aus auf *ED* auf, so ist $\frac{DF}{2} = DG = GF$ die halbe kleine und *GE* die halbe grosse Axe.

Die Lage der grossen Axe wird durch die Verbindungslinie des Mittelpunktes *M* mit dem Halbirungspunkte *G* angegeben. Weichen die zusammen gehörigen Durchmesser nur wenig von den Hauptaxen ab, so wird die Entfernung *MG* klein und daher die Lage durch diese Punkte nicht mehr hinlänglich genau bestimmt. Besser nimmt man dann die Verbindungslinie der Punkte *F* und *C*, welche der grossen Axe parallel geht, (da $\frac{KG}{DG} = \frac{CM}{MD} = 1$), als Richtungslinie für die grosse Axe an.

Die Richtigkeit dieser Construction ergiebt sich folgend:

Bezeichnen *a* und *b* die halbe grosse und kleine Axe der Ellipse, und l, l_1 die beiden conjugirten Halbmesser *AM*, *MD*, welche den Winkel $AMD = z$ einschliessen, so ist:

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{l^2 + l^2_1 + 2ll_1 \sin z} \pm \sqrt{l^2 + l^2_1 - 2ll_1 \sin z}}{2},$$

und, wird für z $90^0 - \alpha$ substituirt:

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{l^2 + l^2_1 + 2ll_1 \cos\alpha} \pm \sqrt{l^2 + l^2_1 - 2ll_1 \cos\alpha}}{2},$$

d. i. da der Complementwinkel $\alpha = EMC$:

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = \frac{ED \pm CE}{2}.$$

Der Winkel γ, den die grosse Axe mit dem einen der conjugirten Durchmesser, l, einschliesst, muss sein:

$$\sin\gamma^2 = \frac{b^2(a^2 - l^2)}{l^2(a^2 - b^2)}.$$

Es ist aber $\sin.\overline{AMG}^2 = \frac{b^2(a^2 - l^2)}{l^2(a^2 - b^2)}$, folglich *HJ* die Lage der grossen Axe. Dass $\sin.\overline{AMG}^2 = \frac{b^2(a^2 - l^2)}{l^2(a^2 - b^2)}$ ist, folgt aus dem Dreieck *DEM*, wo $DM = l_1$, $ME = l$, $EG = a$, $GD = b$ und Winkel $AMD = z$ ist; denn es ist $\text{tg}.AMG = \text{tg}(z - GMD)$, oder, wenn *GMD* durch λ bezeichnet wird,

$$=\operatorname{tg}(z-\lambda)=\frac{\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}\lambda}{1+\operatorname{tg}z.\operatorname{tg}\lambda},$$

d. i., da

$$\operatorname{tg}\lambda=\frac{b.\sin.GDM}{l_1-b.\cos.GDM}=\frac{b\sin\varrho}{l_1-b\cos\varrho}$$

ist,

$$\operatorname{tg}.AMG=\frac{\operatorname{tg}z-\frac{b.\sin\varrho}{l_1-b\cos\varrho}}{1+\operatorname{tg}z\cdot\frac{b\sin\varrho}{l_1-b\cos\varrho}}=\frac{\operatorname{tg}z(l_1-b\cos\varrho)-b\sin\varrho}{l_1-b\cos\varrho+\operatorname{tg}z.b\sin\varrho},$$

und werden für $\sin\varrho$ und $\cos\varrho$ die gleichen Werthe

$$\sin\varrho=\frac{l.\cos z}{a+b}$$

und

$$\cos\varrho=\sqrt{1-\left(\frac{l.\cos z}{a+b}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab-l^2\cos z^2}}{a+b}$$

$$=\frac{\sqrt{l^2+l^2_1+2ll_1\sin z-l^2\cos z^2}}{a+b}$$

$$=\frac{l\sin z+l_1}{a+b}$$

substituirt,

$$\operatorname{tg}.AMG=\frac{\frac{\operatorname{tg}z(al_1-bl\sin z)}{a+b}-\frac{b.l\cos z}{a+b}}{\frac{al_1-bl\sin z}{a+b}+\frac{\operatorname{tg}z.bl\cos z}{a+b}}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}z(al_1-bl\sin z)-bl\cos z}{al_1},$$

$$\text{tg}.AMG = \frac{\sin z \,.\, al_1 - bl\sin z^2 - bl\cos z^2}{al_1 \cos z}$$

$$= \frac{\sin z . al_1 - bl}{al_1 \cos z} = \frac{\frac{ab}{ll_1} . al_1 - bl}{\frac{al_1 \sqrt{\overline{ll_1}^2 - \overline{ab}^2}}{ll_1}}$$

$$= \frac{a^2 b - bl^2}{a\sqrt{\overline{ll}^2{}_1 - \overline{ab}^2}},$$

$$\text{tg}.\overline{AMG}^2 = \frac{b^2(a^2 - l^2)^2}{a^2(l^2(a^2 + b^2 - l^2) - a^2 b^2)}$$

$$= \frac{b^2(a^2 - l^2)^2}{a^2(a^2 l^2 + b^2 l^2 - l^4 - a^2 b^2)}$$

$$= \frac{b^2(a^2 - l^2)}{a^2(l^2 - b^2)},$$

$$\sin.\overline{AMG}^2 = \frac{b^2(a^2 - l^2)}{l^2(a^2 - b^2)}.$$

XLIII.

Mémoire sur la théorie des formes quadratiques.

Par

Monsieur F. Arndt,

Docteur en Philosophie à Stralsund.

Le problème dont nous allons nous occuper dans ce mémoire est celui qu'on trouve dans l'article 236. des „Disquisitiones Arithmeticae“, savoir: „Etant donné deux formes quadratiques, dont les déterminantes sont en raison de nombres carrés, on se propose de trouver une troisième forme composée par celles-ci.“

La solution de ce problème, le plus important dans la théorie de la composition des formes, donnée par M. Gauss, est aussi ingenieuse que difficile, parceque l'auteur a supprimé tout-à-fait l'analyse, par laquelle il y est parvenu et qui exige des considérations très délicates. Les recherches que je fis dans cette vue me firent trouver une solution fondée sur des considérations très simples, qui sera peut-être agréable à ceux qui aiment la théorie des nombres.

Je commence par résoudre le problème suivant, sur le quel nous aurons à nous appuyer dans la suite.

„Les six nombres P, Q, R, S, T, U étant donnés, on se propose de trouver huit autres nombres p, p', p'', p'''; q, q', q'', q''' tels qu'ils satisfont aux équations suivantes $pq'-qp'=P$, $pq''-qp''=Q$, $pq'''-qp'''=R$, $p'q''-q'p''=S$, $p'q'''-q'p'''=T$, $p''q'''-q''p'''=U$, que nous désignérons par Ω.“

Il y a plusieurs cas à distinguer.

1°. Lorsque les trois nombres P, Q, R ne s'évanouissent simultanément, il suit des trois premières équations Ω, que les nombres p, q ne peuvent être nuls tous deux, et qu'il en existe par conséquent un plus grand diviseur commun λ qui mesure les nombres P, Q, R simultanément. Maintenant si nous désignons par φ, ψ des valeurs tellement choisies qu'elles satisfont à l'équation $p\varphi - q\psi = \lambda$, toutes les valeurs des nombres p', q'; p'', q''; p''', q''', satisfaisantes aux trois premières équations Ω, seront comprises dans les formules suivantes:

$$\begin{array}{l|l} q' = \varphi\frac{P}{\lambda} + f\frac{q}{\lambda} & p' = \psi\frac{P}{\lambda} + f\frac{p}{\lambda}, \\ q'' = \varphi\frac{Q}{\lambda} + f'\frac{q}{\lambda} & p'' = \psi\frac{Q}{\lambda} + f'\frac{p}{\lambda}, \\ q''' = \varphi\frac{R}{\lambda} + f''\frac{q}{\lambda} & p''' = \psi\frac{R}{\lambda} + f''\frac{p}{\lambda}; \end{array}$$

f, f', f'' représentant des nombres entiers quelconques. Ces valeurs étant substituées dans les trois dernières équations Ω, celles-ci seront remplacées par les suivantes:

$$S = f\frac{Q}{\lambda} - f'\frac{P}{\lambda}, \quad T = -f''\frac{P}{\lambda} + f\frac{R}{\lambda}, \quad U = f'\frac{R}{\lambda} - f''\frac{Q}{\lambda};$$

desquelles il est évident que les nombres S, T, U sont divisibles par le plus grand diviseur commun de $\frac{P}{\lambda}$, $\frac{Q}{\lambda}$, $\frac{R}{\lambda}$, que nous désignerons par μ. Ce nombre μ sera donc facteur des six nombres P, Q, R, S, T, U, par conséquent de leur plus grand diviseur commun k. De plus si nous désignons le plus grand diviseur commun des trois nombres P, Q, R par e, nous aurons $e = \lambda\mu$. Imaginez vous maintenant qu'on ait déterminé les nombres $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ de sorte que $\mathfrak{p}P + \mathfrak{q}Q + \mathfrak{r}R = e$, ce qui peut se faire d'une infinité de manières, vous aurez à l'aide des valeurs de S, T, U, que nous venons d'établir,

$$\mu f = \mathfrak{q}S + \mathfrak{r}T + \omega\frac{P}{\lambda},$$

$$\mu f' = \mathfrak{r}U - \mathfrak{p}S + \omega\frac{Q}{\lambda},$$

$$\mu f'' = -\mathfrak{p}T - \mathfrak{q}U + \omega\frac{R}{\lambda};$$

ω étant égal à $\mathfrak{p}f + \mathfrak{q}f' + \mathfrak{r}f''$. Substituez enfin ces valeurs de f, f', f'' dans les expressions de p', q'; p'', q''; p''', q''', vous aurez

$$\begin{array}{l|l} eq' = P(\mu\varphi + \omega\frac{q}{\lambda}) + \mathfrak{q}qS + \mathfrak{r}qT & ep' = P(\mu\psi + \omega\frac{p}{\lambda}) + \mathfrak{q}pS + \mathfrak{r}pT, \\ eq'' = Q(\mu\varphi + \omega\frac{q}{\lambda}) + \mathfrak{r}qU - \mathfrak{p}qS & ep'' = Q(\mu\psi + \omega\frac{p}{\lambda}) + \mathfrak{r}pU - \mathfrak{p}pS, \\ eq''' = R(\mu\varphi + \omega\frac{q}{\lambda}) - \mathfrak{p}qT - \mathfrak{q}qU & ep''' = R(\mu\psi + \omega\frac{p}{\lambda}) - \mathfrak{p}pT - \mathfrak{q}pU; \end{array}$$

où il importe de remarquer, que les nombres $\mu\varphi + \omega\frac{q}{\lambda}$, $\mu\psi + \omega\frac{p}{\lambda}$ satisfont à l'équation $px - qy = e$. Remarquons en dernier lieu que les équations Ω ne peuvent être vérifiées, à moins que l'équation $PU + RS - QT = 0$ ne soit remplie.

C'est par cette analyse qu'on est conduit à la

Solution. Soit e le plus grand diviseur commun des nombres P, Q, R, k celui des nombres P, Q, R, S, T, U, μ diviseur quelconque de k. Cela posé, le nombre e sera divisible par k, en conséquence par μ, d'où $\frac{e}{\mu}$ sera un entier, que nous désignons par λ. Maintenant si l'on prend des nombres p, q, dont λ est le plus grand diviseur commun, qu'on détermine cinq nombres $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, φ, ψ de sorte qu'on a $\mathfrak{p}P + \mathfrak{q}Q + \mathfrak{r}R = e$, $p\varphi - q\psi = e$, et qu'on fasse

$$\begin{array}{l|l} eq' = \varphi P + \mathfrak{q}qS + \mathfrak{r}qT & ep' = \psi P + \mathfrak{q}pS + \mathfrak{r}pT, \\ eq'' = \varphi Q + \mathfrak{r}qU - \mathfrak{p}qS & ep'' = \psi Q + \mathfrak{r}pU - \mathfrak{p}pS, \\ eq''' = \varphi R - \mathfrak{p}qT - \mathfrak{q}qU & ep''' = \psi R - \mathfrak{p}pT - \mathfrak{q}pU, \end{array}$$

les nombres p, p', p'', p'''; q, q', q'', q''' seront entiers et vérifieront les équations Ω, pourvu que l'équation $PU + RS - QT = 0$ ait lieu.

Démonstration. I. Les nombres p, q sont entiers par l'hypothèse; les nombres p', p'', p'''; q', q'', q''' déterminés à l'aide des équations ci-dessus, le seront aussi, parceque les nombres P, Q, R sont divisibles par e, les nombres p, q par λ, enfin les nombres S, T, U par k, dès-lors par μ.

II. En substituant les valeurs des q', q'', q'''; p', p'', p''' dans les expressions $pq' - qp'$, $pq'' - qp''$, $pq''' - qp'''$, etc., en ayant égard aux équations $\mathfrak{p}P + \mathfrak{q}Q + \mathfrak{r}R = e$, $p\varphi - q\psi = e$, $PU + RS - QT = 0$, on verra, que les équations Ω sont vérifiés.

2°. Passons au cas où les nombres P, Q, R sont nuls. Alors des équations $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ on déduira aisément celles-ci: $qS = 0$, $qT = 0$, $qU = 0$; $pS = 0$, $pT = 0$, $pU = 0$; donc en supposant que les nombres S, T ne s'évanouissent simultanément, il faut avoir $q = 0$, $p = 0$. Maintenant si l'on détermine les

nombres φ, ψ de sorte qu'ils satisfont à l'équation $p'\varphi-q'\psi=\lambda$, λ étant le plus grand diviseur commun des nombres p', q', pour satisfaire aux équations $p'q''-q'p''=S$, $p'q'''-q'p'''=T$, on fera

$$q''=\varphi\frac{S}{\lambda}+f\frac{q'}{\lambda} \quad\Big|\quad p''=\psi\frac{S}{\lambda}+f\frac{p'}{\lambda},$$
$$q'''=\varphi\frac{T}{\lambda}+f'\frac{q'}{\lambda} \quad\Big|\quad p'''=\psi\frac{T}{\lambda}+f'\frac{p'}{\lambda};$$

f, f' désignant des entiers quelconques. Ces valeurs étant substituées dans la dernière équation $p''q'''-q''p'''=U$, celle-ci sera rémplacée par la suivante $f\frac{T}{\lambda}-f'\frac{S}{\lambda}=U$, de laquelle il est évident que U est divisible par le plus grand diviseur commun de $\frac{S}{\lambda}$, $\frac{T}{\lambda}$, que nous désignons par μ. Ce nombre μ sera donc facteur des trois nombres S, T, U, en conséquence de leur plus grand diviseur commun k. Nous aurons en outre $e=\lambda\mu$, e étant le plus grand diviseur commun des deux nombres S, T. Imaginez vous maintenant qu'on aît déterminé les nombres s, t de sorte que $sS+tT=e$, vous aurez

$$\mu f= \;\; tU+\omega\frac{S}{\lambda},$$
$$\mu f'=-sU+\omega\frac{T}{\lambda};$$

ω étant égal à $sf+tf'$. De là

$$eq''=S(\mu\varphi+\omega\frac{q'}{\lambda})+tq'U \quad\Big|\quad ep''=S(\mu\psi+\omega\frac{p'}{\lambda})+tp'U,$$
$$eq'''=T(\mu\varphi+\omega\frac{q'}{\lambda})-sq'U \quad\Big|\quad ep'''=T(\mu\psi+\omega\frac{p'}{\lambda})-sp'U;$$

où il importe de remarquer que les nombres $\mu\varphi+\omega\frac{q'}{\lambda}$, $\mu\psi+\omega\frac{p'}{\lambda}$ satisfont à l'équation $p'x-q'y=e$. Ainsi nous sommes parvenus à cette

Solution. Supposé que les nombres P, Q, R soient nuls, mais S, T ne s'évanouissent tous deux, soit e le plus grand diviseur commun de S, T, k celui de S, T, U, μ diviseur quelconque de k. Cela étant, e sera divisible par k, en concéquence par μ, d'où $\frac{e}{\mu}$ sera un entier que nous désignons par λ. Prenez deux nombres p', q', dont λ est le plus grand diviseur commun, faites

en sorte que s, t, φ, ψ satisfassent aux équations $sS+tT=e$, $p'\varphi-q'\psi=e$, et posez

$$\begin{array}{l|l} q=0 & p=0, \\ eq''=\varphi S+tq'U & ep''=\psi S+tp'U, \\ eq'''=\varphi T-sq'U & ep'''=\psi T-sp'U: \end{array}$$

les nombres q, q', q'', etc. seront entiers et vérifieront les équations Ω.

La démonstration est tout-à-fait semblable à la précédente.

3°. Lorsque les cinq nombres P, Q, R, S, T sont nuls, mais U n'est pas nul, on aura non seulement $q=0$, $p=0$, comme dans le num. 2°, mais aussi $q'=0$, $p'=0$ *). Supposé donc $p=0$, $q=0$, $p'=0$, $q'=0$, les cinq premières équations Ω ont lieu et il ne reste de satisfaire qu'à la dernière $p''q'''-q''p'''=U$. C'est ce qui s'effectue en prenant deux nombres p'', q'', dont λ est le plus grand diviseur commun, et faisant

$$q'''=\varphi\frac{U}{\lambda}+f\frac{q''}{\lambda},\quad p'''=\psi\frac{U}{\lambda}+f\frac{p''}{\lambda},$$

λ étant diviseur quelconque de U; φ, ψ des racines quelconques de l'équation $p''\varphi-q''\psi=\lambda$, f un nombre arbitraire.

4°. Enfin le cas où les six nombres P, Q, R, S, T, U s'évanouissent, est si simple qu'il ne faut pas s'y arrêter long-temps.

Nous allons maintenant appliquer ces résultats au problème mentionné ci-dessus.

Soient $f\ldots(a,\ b,\ c)$, $f'\ldots(a',\ b',\ c')$ les formes données, dont les déterminantes sont en raison de nombres carrés et de même signe, soit en outre m le plus grand diviseur commun de a, $2b$, c; m' celui de a', $2b'$, c'; D celui de $dm'm'$, $d'mm$ et de même signe que d, d'. Cela posé, les racines $\sqrt{\frac{d}{D}}$, $\sqrt{\frac{d'}{D}}$ seront des nombres rationels, positifs ou négatifs, que nous disignerons par n, n'; mn', $m'n$ des nombres entiers, premiers entre eux; enfin an', $a'n$, $b'n+bn'$, $b'n-bn'$, $c'n$, cn' des nombres entiers, que nous nommons P, Q, R, S, T, U. C'est ce qu'on trouve démontré dans l'article 236. des „Disq. Arithm." Je dis de plus que les nombres P, Q, R, S, T, U seront premiers entre eux. En effet, en faisant $\mathfrak{A}a+2\mathfrak{B}b+\mathfrak{C}c=m$, $\mathfrak{A}'a'+2\mathfrak{B}'b'+\mathfrak{C}'c'=m'$ (Disq. Arithm. art. 40.), il vient $\mathfrak{A}P+\mathfrak{B}(R-S)+\mathfrak{C}U=mn'$,

*) Des équations $p'q''-q'p''=0$, $p'q'''-q'p'''=0$ on tire $q'U=0$, $p'U=0$.

$\mathfrak{A}'Q+\mathfrak{B}'(R+S)+\mathfrak{C}'T=m'n$, d'où l'on voit que les nombres P, Q, R, S, T, U n'ont d'autre facteur commun, que tel qui mesure simultanément les nombres mn', $m'n$, supposés premiers entre eux.

Maintenant en s'imaginant que la forme cherchée $F...(A, B, C)$ est transformable dans le produit ff' au moyen de la substitution p, p', p'', p'''; q, q', q'', q''', d'après les principes établis par M. Gauss il ne s'agit que de déterminer ces huit nombres de telle sorte qu'ils satisfont aux équations $pq'-qp'=P$, $pq''-qp''=Q$, $pq'''-qp'''=R$, $p'q''-q'p''=S$, $p'q'''-q'p'''=T$, $p''q'''-q''p'''=U$, et qu'ils rendent entières les valeurs de A, B, C, déterminées à l'aide des équations $Ann'=q'q''-qq'''$, $2Bnn'=p'q'''+q'p'''-p'q''-q'p''$, $Cnn'=p'p''-pp'''$.

Or d'après ce que nous avons trouvé plus haut, pour satisfaire à la première condition, on a

1°. Lorsque les nombres P, Q, R ne sont pas nuls simultanément:

$$\begin{array}{l|l} \lambda q'=\varphi P+\mathfrak{q}qS+\mathfrak{r}qT & \lambda p'=\psi P+\mathfrak{q}pS+\mathfrak{r}pT, \\ \lambda q''=\varphi Q+\mathfrak{r}qU-\mathfrak{p}qS & \lambda p''=\psi Q+\mathfrak{r}pU-\mathfrak{p}pS, \\ \lambda q'''=\varphi R-\mathfrak{p}qT-\mathfrak{q}qU & \lambda p'''=\psi R-\mathfrak{p}pS-\mathfrak{q}pU; \end{array}$$

où λ est le plus grand diviseur commun des nombres P, Q, R; p et q deux nombres quelconques dont λ est le plus grand diviseur commun, $\mathfrak{p}P+\mathfrak{q}Q+\mathfrak{r}R=\lambda$, $p\varphi-q\psi=\lambda$. Je fais remarquer que l'équation $PU+RS-QT=0$ a lieu, car on a $an'.cn'+(b'n+bn')(b'n-bn')-a'n.c'n=(b'b'-a'c')nn-(bb-ac)n'n'=d'nn-dn'n'=0$.

Je dis maintenant que les nombres p, p', p'', p'''; q, q', q'', q''', ainsi déterminés, rendent entières les valeurs

$$\frac{q'q''-qq'''}{nn'},\quad \frac{pq'''+qp'''-p'q''-q'p''}{2nn'},\quad \frac{p'p''-pp'''}{nn'}.$$

Pour faire voir cela je développe les quantités $\lambda\lambda(q'q''-qq''')=\lambda q'.\lambda q''-\lambda q.\lambda q'''$, $\lambda\lambda(pq'''+qp'''-p'q''-q'p'')=\lambda p.\lambda q'''+\lambda q.\lambda p'''-\lambda p'.\lambda q''-\lambda q'.\lambda p''$, $\lambda\lambda(p'p''-pp''')=\lambda p'.\lambda p''-\lambda p.\lambda p'''$, en mettant pour les produits $\lambda q'$, $\lambda q''$, $\lambda q'''$; $\lambda p'$, $\lambda p''$, $\lambda p'''$ leurs valeurs, et prenant $q(\mathfrak{p}P+\mathfrak{q}Q+\mathfrak{r}R)$, $p(\mathfrak{p}P+\mathfrak{q}Q+\mathfrak{r}R)$ au lieu de λq, λp. Alors on aura

$$\begin{aligned} &\lambda\lambda(q'q''-qq''') \\ =\ &\varphi\varphi PQ-\mathfrak{p}\varphi qP(R+S)-\mathfrak{q}\varphi qQ(R-S)-\mathfrak{r}\varphi q(RR-PU-QT) \\ &+\mathfrak{p}\mathfrak{p}qqPT+\mathfrak{q}\mathfrak{q}qqQU+\mathfrak{r}\mathfrak{r}qqTU \\ &+\mathfrak{p}\mathfrak{r}qqT(R-S)+\mathfrak{q}\mathfrak{r}qqU(R+S)+\mathfrak{p}\mathfrak{q}qq(PU+RT-SS), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lambda\lambda(pq'''+qp'''-p'q''-q'p'')\\
=&-2\varphi\psi PQ+\mathfrak{p}(p\varphi+q\psi)P(R+S)+\mathfrak{q}(p\varphi+q\psi)Q(R-S)\\
&+\mathfrak{r}(p\varphi+q\psi)(RR-PU-QT)\\
&-2\mathfrak{p}\mathfrak{p}pqPT-2\mathfrak{q}\mathfrak{q}pqQU-2\mathfrak{r}\mathfrak{r}pqTU\\
&-2\mathfrak{p}\mathfrak{r}pqT(R-S)-2\mathfrak{q}\mathfrak{r}pqU(R+S)-2\mathfrak{p}\mathfrak{q}pq(PU+QT-SS).\end{aligned}$$

La valeur de $\lambda\lambda(p'p''-pp''')$ est entièrement semblable à celle de $\lambda\lambda(q'q''-qq''')$, de laquelle elle sort en mettant ψ, p à la place de φ, q.

En substituant pour P, Q, R, S, T, U leurs valeurs, on verra que tous les termes de la première expression contiennent le facteur nn', et ceux de la seconde le facteur $2nn'$, attendu que

$$RR-PU-QT=2bb'nn'+dn'n'+d'nn,$$

$$PU+QT-SS=2bb'nn'-dn'n'-d'nn,$$

$$\frac{dn'n'}{nn'}=\frac{d'nn}{nn'}=\sqrt{dd'},$$

ou la quantité $\sqrt{dd'}$ est un nombre entier, que nous désignons par Δ. De là il vient

$$\begin{aligned}[1]\ \ldots\ldots\ &\frac{\lambda\lambda}{nn'}(q'q''-qq''')\\
&=\varphi\varphi aa'-2ab'\mathfrak{p}\varphi q-2ba'\mathfrak{q}\varphi q-2(bb'+\Delta)\mathfrak{r}\varphi q\\
&+ac'\mathfrak{p}\mathfrak{p}qq+ca'\mathfrak{q}\mathfrak{q}qq+cc'\mathfrak{r}\mathfrak{r}qq+2bc'\mathfrak{p}\mathfrak{r}qq\\
&+2cb'\mathfrak{q}\mathfrak{r}qq+2(bb'-\Delta)\mathfrak{p}\mathfrak{q}qq,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[2]\ \ldots\ldots\ &\frac{\lambda\lambda}{2nn'}(pq'''+qp'''-p'q''-q'p'')\\
=&-\varphi\psi aa'+ab'\mathfrak{p}(p\varphi+q\psi)+ba'\mathfrak{q}(p\varphi+q\psi)+(bb'+\Delta)\mathfrak{r}(p\varphi+q\psi)\\
&-ac'\mathfrak{p}\mathfrak{p}pq-ca'\mathfrak{q}\mathfrak{q}pq-cc'\mathfrak{r}\mathfrak{r}pq-2bc'\mathfrak{p}\mathfrak{r}pq\\
&-2cb'\mathfrak{q}\mathfrak{r}pq-2(bb'-\Delta)\mathfrak{p}\mathfrak{q}pq,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[3]\ \ldots\ldots\ &\frac{\lambda\lambda}{nn'}(p'p''-pp''')\\
&=\psi\psi aa'-2ab'\mathfrak{p}\psi p-2ba'\mathfrak{q}\psi p-2(bb'+\Delta)\mathfrak{r}\psi p\\
&+ac'\mathfrak{p}\mathfrak{p}pp+ca'\mathfrak{q}\mathfrak{q}pp+cc'\mathfrak{r}\mathfrak{r}pp+2bc'\mathfrak{p}\mathfrak{r}pp\\
&+2cb'\mathfrak{q}\mathfrak{r}pp+2(bb'-\Delta)\mathfrak{p}\mathfrak{q}pp.\end{aligned}$$

Nous démontrerons actuellement que aa' est divisible par $\lambda\lambda$, ab', ba', $bb'+\Delta$ par λ.

En effet il résulte des congruences

$$an' \equiv 0 \pmod{\lambda},\quad a'n \equiv 0 \pmod{\lambda},\quad b'n + bn' \equiv 0 \pmod{\lambda}$$

$ab'n' \equiv 0$, $ab'n \equiv 0$, d'où $ab'.mn' \equiv 0$, $ab'.m'n \equiv 0$ (mod. λ); or, le plus grand diviseur commun des produits $ab'.mn'$, $ab'.m'n$, c'est à dire ab', sera divisible par λ de même que chacun de ces produits.

D'une manière semblable on démontre que ba' est divisible par λ.

En troisième lieu on a

$$n(bb' + \Delta) = bb'n + dn' = b(b'n + bn') - acn',$$
$$n'(bb' + \Delta) = bb'n' + d'n = b'(b'n + bn') - a'c'n;$$

par suite $(bb' + \Delta).mn' \equiv 0$, $(bb' + \Delta).m'n \equiv 0$ (mod. λ), d'où comme précédemment $bb' + \Delta \equiv 0$ (mod. λ).

On a enfin $aa'.mn' \equiv 0$, $aa'.m'n \equiv 0$ (mod. λ), d'où $aa' \equiv 0$. (mod. λ). Maintenant d'après ce qu'on vient de démontrer, il suit

$$\left.\begin{array}{l} aa'.an' \equiv 0 \\ aa'.a'n \equiv 0 \\ aa'.(b'n + bn') = ab'.a'n + ba'.an' \equiv 0 \\ aa'.(b'n - bn') = ab'.a'n - ba'.an' \equiv 0 \\ aa'.c'n = ab'(b'n + bn') - an'(bb' + \Delta) \equiv 0 \\ aa'.cn' = ba'(b'n + bn') - a'n(bb' + \Delta) \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{\lambda\lambda},$$

donc le plus grand diviseur commun des produits à gauche, c'est à dire aa', sera divisible par $\lambda\lambda$ de même que chacun de ces produits.

En réunissant ces résultats on voit que le premier membre dans chacune des équations [1], [2], [3] est divisible par $\lambda\lambda$, ce qu'il s'agissait de démonter.

2°. Si les nombres P, Q, R s'évanouissent, où $an' = 0$, $a'n = 0$, $b'n + bn' = 0$, il vient $a = 0$, $a' = 0$, les quantités n, n' n'étant pas nulles*). De plus le nombre S ne s'évanouira pas, d'ailleurs on aurait $b = 0$, $b' = 0$, par conséquent $d = bb - ac = 0$, $d' = b'b' - a'c' = 0$, contre l'hypothèse. Donc, en désignant par λ le plus grand diviseur commun de S, T; par p', q' deux nombres quelconques, dont λ est le plus grand diviseur commun, faisant ensuite $\mathfrak{s}S + \mathfrak{t}T = \lambda$, $p'\varphi - q'\psi = \lambda$, il faut avoir

$$\begin{array}{l|l} q = 0 & p = 0 \\ \lambda q'' = \varphi S + \mathfrak{t}q'U & \lambda p'' = \psi S + \mathfrak{t}p'U \\ \lambda q''' = \varphi T - \mathfrak{s}q'U & \lambda p''' = \psi T - \mathfrak{s}p'U. \end{array}$$

---

*) Si on avait $n = 0$, $n' = 0$, il résulterait en conséquence des équations $d = Dnn$, $d' = Dn'n'$, $d = 0$, $d' = 0$; or, ce cas est exclu.

Les nombres p, p', p'' etc. étant ainsi déterminés, on démontre par une méthode entièrement semblable à celle que nous avons employée dans le premier cas, que les nombres

$$\frac{q'q''-qq'''}{nn'},\quad \frac{pq'''+qp'''-p'q''-q'p''}{2nn'},\quad \frac{p'p''-pp'''}{nn'}$$

sont entiers. En effet il vient

$$\frac{\lambda\lambda}{nn'}(q'q''-qq''')$$
$$=-4bb's\varphi q'-2bc't\varphi q'+2b'cstq'q'+cc'ttq'q',$$

$$\frac{\lambda\lambda}{2nn'}(pq'''+qp'''-p'q''-q'p'')$$
$$=2bb's(p'\varphi+q'\psi)+bc't(p'\varphi+q'\psi)-2b'cstp'q'-cc'ttp'q',$$

$$\frac{\lambda\lambda}{nn'}(p'p''-pp''')$$
$$=-4bb's\psi p'-2bc't\psi p'+2b'cstp'p'+cc'ttp'p',$$

d'où l'on voit qu'il ne reste qu'à démontrer que les nombres $2bb'$, bc' renferment le facteur λ. Il suit des congruences $bn'-b'n\equiv 0$, $c'n\equiv 0$ (mod. λ), $bc'.mn'\equiv 0$, $bc'.m'n\equiv 0$ (mod. λ), d'où $bc'\equiv 0$ (mod. λ). En outre $2bn'\equiv 0$, $2b'n\equiv 0$, par conséquent $2bb'.mn'\equiv 0$ $2bb'.m'n\equiv 0$, donc $2bb'\equiv 0$ (mod. λ).

XLIV.

Geometrische Näherungsmethode zur Rektifikation und Quadratur des Kreises.

Von
Herrn H. Scheffler,
Bauconducteur bei den Herzoglich Braunschweigischen Eisenbahnen.

Eine bequeme geometrische Konstruktion, welche näherungsweise die Länge des Kreisumfanges und den Flächeninhalt des Kreises liefert, ist zuweilen eben so erwünscht, als eine auf die Berechnung dieser Grössen, namentlich der Zahl π, abzielende Formel. In wissenschaftlicher Beziehung ist aber eine solche Konstruktion von noch grösserem Interesse, besonders wenn dieselbe jeden Grad von Annäherung gestattet. Ich glaube, dass die nachstehende Methode zu den einfachsten gehört, welche nur gefunden werden können.

1.) Rektifikation des Kreises.

Wenn AB (Taf. VII. Fig. 4.) der mit dem Halbmesser OA beschriebene Kreis ist; so werde AM perpendikular auf dem Durchmesser AB errichtet. Man halbire durch AC den Winkel MAB, durch AD den Winkel MAC, durch AE den Winkel MAD, durch AF den Winkel MAE u. s. f., ziehe darauf in B auf AB das Perpendikel BC bis zum Durchschnitte C mit AC, dann in C auf AC das Perpendikel CD bis zum Durchschnitte D mit AD, dann in D auf AD das Perpendikel DE bis zum Durchschnitte E mit AE u. s. f.

Jetzt sind AB, AC, AD, AE, AF..... Linien, welche der Länge des Halbkreises, also dem Werthe von π, wenn der Halbmesser OA gleich der Längeneinheit ist, bis zu jedem beliebigen Grade von Approximation näher kommen. Die Annäherung geht übrigens mit raschen Schritten vor sich, und es sind nur wenig Winkelhalbirungen erforderlich, um mit ziemlicher Genauigkeit den Punkt M in der Linie AM zu erkennen, welcher streng genommen erst nach unendlich vielmal wiederholter Operation erreicht werden würde, um in der Linie AM die wahre Länge des Halbkreises darzustellen.

Der Beweis zu diesem Verfahren kann ganz elementar geführt werden. Man braucht nur die Linien CB, DC, ED, FE... bis zu ihren Durchschnitten B, B_1, B_2, B_3... mit der Linie AB zu verlängern, und um diese Durchschnittspunkte sich Kreise resp. mit den Halbmessern BA, B_1A, B_2A, B_3A.... beschrieben zu denken. Der Kreis

vom Halbmesser $OA = 1.\overline{OA}$ enthält alsdann die beiden Punkte A und B,

vom Halbmesser $BA = 2.\overline{OA}$ „ „ „ „ „ A und C,

vom Halbmesser $B_1A = 4.\overline{OA}$ „ „ „ „ „ A und D,

vom Halbmesser $B_2A = 8.\overline{OA}$ „ „ „ „ „ A und E,

vom Halbmesser $B_3A = 16.\overline{OA}$ „ „ „ „ „ A und F

u. s. w.,

so dass AB, AC, AD, AE, AF.... Sehnen sind, denen in diesen Kreisen die Zentrumswinkel π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{16}$.... entsprechen, deren zugehörige Peripheriestücke genau gleich der Länge des Halbkreises AB sind. Es sind also bei der obigen Methode nur die betreffenden Sehnen für die zugehörigen Bögen gesetzt, was der Wahrheit um so näher kommen muss, je grösser der Halbmesser des betreffenden Kreises, je flacher also der zu einer solchen Sehne gehörige Bogen geworden ist.

Durch diese Konstruktion, welche ich bereits in einer Schrift über die imaginären Zahlen mitgetheilt habe, hier aber noch etwas weiter auszudehnen beabsichtige, findet sich auch auf ganz einfachem elementaren Wege die bekannte Formel

$$\pi = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cos\frac{\pi}{2^4}\ldots\cos\frac{\pi}{2^n}},$$

welche bequem dazu dienen kann, den Grad der Annäherung der obigen Werthe von AB, AC, AD... zu ermitteln. Man hat hier nämlich, wenn man den Halbmesser $OA = 1$ setzt,

$$AB = 2,$$

$$AC = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} \qquad = 3,82813,$$

$$AD = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}} \qquad = 3,06147,$$

$$AE = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}} \qquad = 3,12145,$$

$$AF = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}} \qquad = 3,13655,$$

$$AG = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{64}} \qquad = 3,14033,$$

$$AH = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{64}\cos\frac{\pi}{128}} = 3,14128.$$

Da $\pi = 3,14159\ldots$ ist; so folgt, dass schon bei vier Winkelhalbirungen der Näherungswerth AF nur um $\frac{1}{500}$ zu klein ist.

Man kann sich übrigens auch durch einfache Zeichnung ein Urtheil über den Grad der Genauigkeit eines jeden solchen Näherungswerthes AF verschaffen. AF, wie jeder andere der vorstehenden Näherungswerthe, ist nämlich zu klein. Verlängert man aber die Linie EF bis zum Durchschnitte N mit AM, so ist AN zu gross; denn man hat

$$AN = \frac{AF}{\cos\frac{\pi}{32}} = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\cdot\cos\frac{\pi}{32}}$$

und da

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi}{32}} > \frac{1}{\cos\frac{\pi}{64}\cos\frac{\pi}{128}\ldots\cos\frac{\pi}{2^\infty}}$$

ist; so ergibt sich nach dem vorstehenden Ausdrucke für π $AN > \pi$.

Der Werth von π liegt also zwischen AM und AN, kann also bald zwischen ungemein enge Gränzen eingeschlossen werden.

Die vorstehende Methode hat vor vielen anderen noch den Vorzug, dass sie sich mit derselben Leichtigkeit auf die Rektifikation jedes beliebigen **Kreisbogens**, derselbe mag kleiner oder grösser sein, als der Halbkreis, in Anwendung bringen lässt.

Wäre in Taf. VII. Fig. 5. der Bogen AB zu rektifiziren; so zieht man den Halbmesser OA, ferner die Sehne AB und legt AM perpendikular auf OA. Darauf halbirt man durch AC den Winkel MAB, dann durch AD den Winkel MAB, dann durch AE den Winkel MAC, dann durch AE den Winkel MAD, dann durch AF den Winkel MAE u. s. f. (Wäre ein Bogen wie ABB', welcher grösser ist als der Halbkreis, zu rektifiziren; so würde man ebenso durch AC erst den Winkel MAB' zu halbiren haben u. s. f.) Errichtet man nun in B auf AB das Perpendikel BC, dann in C auf AC das Perpendikel CD, dann in D auf AD das Perpendikel DE, dann in E auf AE das Perpendikel EF u. s. f.; so sind die geraden Linien AB, AC, AD, AE, AF u. s. f. die gesuchten Näherungswerthe für den Bogen AB. Die vollständige Rektifikation würde nach unendlich vielmal wiederholter Operation eine in AM fallende Linie ergeben, deren Endpunkt M sich mit aller derjenigen Genauigkeit bestimmen lässt, die überhaupt bei der Konstruktion von Kurven mittelst einzelner Punkte erreichbar ist, besonders wenn man unterhalb der Linie AM eine der obigen symmetrische Figur entwirft, wodurch der Punkt M zwischen zwei immer näher zusammenrückende Punkte F zu liegen kommt.

Der Beweis ist dem früheren durchaus ähnlich.

Wenn der Halbmesser OA gleich der Längeneinheit genommen und der Bogen $AB = \alpha$ gesetzt wird; so ist die

$$\text{Sehne } AB = 2\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\text{,,} \quad AC = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{4}},$$

$$\text{,,} \quad AD = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}},$$

$$\text{,,} \quad AE = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cos\frac{\alpha}{16}},$$

u. s. f.

und es findet sich für den Bogen $AB = \alpha$ die Formel

$$\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2^2}\cos\frac{\alpha}{2^3}\cos\frac{\alpha}{2^4}\dots\cos\frac{\alpha}{2^n}}.$$

Auch hier sind die Näherungswerthe, wie z. B. *A F*, sämmtlich zu klein. Verlängert man aber *EF* bis zum Durchschnitte *N* mit *AM*; so ist *AN* zu gross, und man erkennt, zwischen welche enge Grenzen man bald den wahren Werth des fraglichen Kreisbogens einschliessen kann.

2. Quadratur des Kreises.

Da in Taf. VII. Fig. 4. *AM* gleich der Länge des Halbkreises und in Taf. VII. Fig. 5. *AB* gleich der Länge des Bogens *AB* ist; so muss, wenn man die Linie *OM* zieht, das Dreieck *AOM* in Taf. VII. Fig. 4. gleich der Fläche des Halbkreises und in Taf. VII. Fig. 5. gleich der Fläche des Kreisausschnittes *AOB* sein.

Ueberträgt man nun irgend Eine der Näherungslinien *AB*, *AC*, *AD*... auf *AM*, sodass z. B. $AM = AD$ gemacht wird; so stellt das Dreieck *AOM* einen Näherungswerth resp. für den Halbkreis in Taf. VII. Fig. 4. oder für den Kreisausschnitt in Taf. VII. Fig. 5. mit demselben Grade von Genauigkeit dar, welchen die Länge *AD* als Näherungswerth für den Bogen *AB* besitzt.

Auch die Dreiecke *AOC*, *AOD*, *AOE*, *AOF*... würden Näherungswerthe für die genannte Fläche sein. Dieselben entfernen sich jedoch etwas weiter von der Wahrheit, als die eben beschriebenen.

Legt man in Taf. VII. Fig. 5. durch *B* die Linie *Bm* parallel zu *OA* und zieht *mO*; so findet man, da nun das Dreieck *AOm* = dem Dreiecke *AOB* ist, in dem Dreiecke *mOM* unmittelbar einen Näherungswerth für den Kreisabschnitt *AB*.

Sind *c*, *d*, *e*, *f*... die Durchschnitte der Linie *Bm* resp. mit den Linien *AC*, *AD*, *AE*, *AF*...; so können auch die Dreiecke *cOC*, *dOD*, *eOE*, *fOF*... als Näherungswerthe für den fraglichen Kreisabschnitt angesehen werden, welche jedoch nicht ganz so genau sind, als der Werth des Dreiecks *mOM*, worin *AM* resp. = *AC*, *AD*, *AE*, *AF*.... gedacht wird.

Durch den Punkt *m* wird die Länge *AM* des Kreisbogens *AB* in zwei Stücke von folgender Beschaffenheit zerlegt:

dem Stücke *Am*, als Kreisbogen, entspricht ein Kreisausschnitt, welcher dem Dreiecke *AOB* gleich ist;

dem Stücke *mM*, als Kreisbogen, entspricht ein Kreisausschnitt, welcher dem Kreisabschnitte *AB* gleich ist.

XLV.

Ueber die Bewegung eines galvanischen Drahtes unter dem Einfluss des Erdmagnetismus. — Reduktion einiger Integrale auf elliptische Funktionen.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

---

§. I.

Vom Punkte P (Taf. V. Fig. 5.) herunter hängt ein Draht PQ, der von einem galvanischen Strom durchlaufen wird. Dieser Draht ist um P beweglich, kann aber um O, das senkrecht unter P liegt, bloss einen Kreis vom Halbmesser r beschreiben. Im Punkte S (unter dem Kreis) wirkt auf ihn ein magnetischer Südpol (Nordpol der Erde); welches ist seine Bewegung in dem Kegel, dessen Axe $OP=h$ ist?

(Wie die Bewegung möglich sein kann, kann man aus der daneben stehenden Figur ersehen, wo das Ende des Drahtes, das durch Kork gesteckt ist, auf Quecksilber schwimmt).

Man wähle die Axen Ox, Oy in der Ebene des Kreises, so dass S in der Ebene xz liegt; die positive Seite der z sei nach oben gerichtet. Sei die Länge $OS=k$, und δ der Winkel, den OS mit der Axe der z macht; alsdann sind die Koordinaten von S: $k\sin\delta$, 0, $k\cos\delta$. Am Ende der Zeit t befinde sich der Draht in PQ und sei der Winkel $xOQ=\alpha$, so sind die Koordinaten von Q: $r\cos\alpha$, $r\sin\alpha$, 0. Sei D ein Punkt in PQ, $QD=s$, $PQ=l$, ∂s das Element von l, dessen Mitte D ist; endlich γ der Winkel PQO, so dass $\operatorname{tg}\gamma=\frac{h}{r}$ ist.

Man lege nun zuerst eine Ebene durch S, P, Q, so ist die Gleichung derselben:

$$-rk\sin\delta\sin\alpha(Z+h)$$
$$+[r\cos\alpha(h+k\cos\delta)-hk\sin\delta]\,Y-r\sin\alpha(h+k\cos\delta)\,X=0. \qquad (1)$$

Die Kraft, welche S auf das Element ∂s ausübt, wirkt nur in D nach der Senkrechten auf dieser Ebene.

Die Gleichungen der Linie PQ sind:

$$\left.\begin{aligned} X-r\cos\alpha &= -\frac{r\cos\alpha}{h}Z, \\ Y-r\sin\alpha &= -\frac{r\sin\alpha}{h}Z. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Fällt man von S auf diese Länge eine Senkrechte, so ist deren Länge:

$$\frac{1}{l}\sqrt{[r\cos\alpha(h+k\cos\delta)-hk\sin\delta]^2+r^2\sin^2\alpha(h+k\cos\delta)^2+r^2k^2\sin^2\delta\sin^2\alpha}.$$

Heisst also ω der Winkel der Linien DQ und SD, so ist

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{[r\cos\alpha(h + k\cos\delta) - hk\sin\delta]^2 + r^2\sin^2\alpha(h + k\cos\delta)^2 + r^2k^2\sin^2\delta\sin^2\alpha}}{l\sqrt{(s.\sin\gamma + k\cos\delta)^2 + (r\cos\alpha - s.\cos\gamma\cos\alpha - k\sin\delta)^2 + (r\sin\alpha - s.\cos\gamma\sin\alpha)^2}}. \qquad (3)$$

Ist ϱ eine Konstante und setzt man die Kraft in der Einheit des Abstandes und bei senkrechter Einwirkung $= k^2\varrho$, so ist die in D auf ∂s wirkende Kraft:

$$\frac{k^2\,\varrho\,\partial s}{l}\cdot\frac{\sin\omega}{SD^2} = \frac{k^2\,\varrho\,\partial s}{l}\cdot\frac{\sqrt{(r\cos\alpha(h + k\cos\delta) - hk\sin\delta)^2 + r^2\sin^2\alpha(h + k\cos\delta)^2 + r^2k^2\sin^2\delta\sin^2\alpha}}{[(s.\sin\gamma + k\cos\delta)^2 + (r\cos\alpha - s.\cos\gamma\cos\alpha - k\sin\delta)^2 + (r\sin\alpha - s.\cos\gamma\sin\alpha)^2]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (4)$$

Die Gleichung einer Ebene durch O, P, Q ist:

$$-\cos\alpha . Y + \sin\alpha . X = 0. \quad (5)$$

Ist ε der Winkel dieser Ebene und (1), so ist:

$$\cos\varepsilon \quad (6)$$

$$= \frac{hk\sin\delta\cos\alpha - r(h + k\cos\delta)}{\sqrt{[r\cos\alpha(h+k\cos\delta) - hk\sin\delta]^2 + r^2\sin^2\alpha(h+k\cos\delta)^2 + r^2k^2\sin^2\delta\sin^2\alpha}}.$$

Man zerlege nun die in D wirkende Kraft in zwei andere, wovon die eine senkrecht auf der Ebene (5) steht, die andere in dieser Ebene liegt; alsdann überzeugt man sich leicht, dass die letztere Kraft keinerlei Einfluss auf die Umdrehung des Drahtes um PQ ausübt. Die erste Kraft ergiebt sich aus der Multiplikation von (6) und (4); d. h. sie ist:

$$\frac{k^2\varrho\partial s}{l} \cdot \frac{hk\sin\delta\cos\alpha - r(h + k\cos\delta)}{\left[\begin{array}{c}(s.\sin\gamma + k\cos\delta)^2 + (r\cos\alpha - s.\cos\gamma\cos\alpha - k\sin\delta)^2 \\ + (r.\sin\alpha - s.\cos\gamma\sin\alpha)^2\end{array}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Da die Entfernung des Punktes D von OP gleich $r - s.\cos\gamma$ ist, so ist das Moment der Drehung:

$$\pm \frac{k^2\varrho\partial s}{l} \cdot \frac{[hk\sin\delta\cos\alpha - r(h + k\cos\delta)](r - s.\cos\gamma)}{\left[\begin{array}{c}(s.\sin\gamma + k\cos\delta)^2 + (r\cos\alpha - s.\cos\gamma\cos\alpha - k\sin\delta)^2 \\ + (r\sin\alpha - s.\cos\gamma\sin\alpha)^2\end{array}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Ist S ein magnetischer Erdpol, so ist k unendlich gross, und dieses Moment wird:

$$\pm \frac{\varrho\partial s}{l}(h\sin\delta\cos\alpha - r\cos\delta)(r - s.\cos\gamma);$$

dehnt man es auf die ganze Drahtlänge aus, so erhält man:

$$\pm \frac{\varrho l^2}{l}\cos\gamma(\sin\gamma\sin\delta\cos\alpha - \cos\gamma\cos\delta).$$

Für $\gamma = 0$ ist diese Grösse negativ, wenn man das obere Zeichen wählt; da aber die Kraft rechtläufig (in der Richtung der Zeiger einer Uhr) zu drehen strebt, so ist das Moment:

$$\frac{\varrho l^2}{2}\cos\gamma(\cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta\cos\alpha).$$

Bezeichnet μ eine Konstante, die sich auf den Widerstand, den das Quecksilber der Bewegung leistet, bezieht, und setzt man diesen Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional, so ist die Gleichung der Bewegung:

$$p\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}+\mu r^2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2=\frac{\varrho l^2}{2}\cos\gamma(\cos\gamma\cos\delta-\sin\gamma\sin\delta\cos\alpha), \qquad (7)$$

wenn p das Trägheitsmoment des Drahtes in Bezug auf OP ist. Man setze hier $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2=y$, so ergiebt sich:

$$\frac{p}{2}\frac{\partial y}{\partial\alpha}+\mu r^2.y=\frac{\varrho l^2}{2}\cos\gamma(\cos\gamma\cos\delta-\sin\gamma\sin\delta\cos\alpha).$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$y=C.e^{-\frac{2\mu r^2}{p}\alpha} \qquad (8)$$

$$+\frac{\varrho l^2}{2\mu r^2}\cos^2\gamma\cos\delta-\frac{\varrho l^2}{2\mu r^2}\sin\gamma\cos\gamma\sin\delta\frac{\cos\alpha+\frac{p}{2\mu r^2}\sin\alpha}{1+\frac{p^2}{4\mu^2 r^4}}=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2.$$

Ist $\frac{\partial\alpha}{\partial t}=0$ für $\alpha=0$, so ist C leicht zu bestimmen. Da aber, namentlich wenn $\frac{2\mu r^2}{p}$ ziemlich gross ist, $e^{\frac{-2\mu r^2\alpha}{p}}$ bald unmerklich sein wird, so kann man nach kurzer Zeit setzen:

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2=\frac{\varrho l^2}{2\mu r^2}\cos^2\gamma\cos\delta-\frac{\varrho l^2}{2\mu r^2}\frac{\cos\alpha+\frac{p}{2\mu r^2}\sin\alpha}{1+\frac{p^2}{4\mu^2 r^4}}\sin\gamma\cos\gamma\sin\delta. \quad (9)$$

Ist λ das Gewicht des Drahtes, so ist ungefähr

$$p=\lambda\int_0^l(r-s.\cos\gamma)^2\partial s=\frac{\lambda l r^2}{3},$$

also $\frac{p}{2\mu r^2}=\frac{\lambda l}{6\mu}$. Kann man nun λ im Verhältniss zu 6μ vernachlässigen, so ergiebt sich, für einige Zeit nach Anfang der Bewegung:

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2\frac{\varrho}{2\mu}(\cos\delta-\mathrm{tg}\gamma\sin\delta\cos\alpha), \qquad (10)$$

durch welche Gleichung die Winkelgeschwindigkeit für jedes α bestimmt wird. Hieraus folgt:

$$\sqrt{\frac{\varrho\cos\delta}{2\mu}}.\partial t = \frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{tg}\gamma.\mathrm{tg}\delta.\cos\alpha}},$$

$$\sqrt{\frac{\varrho\cos\delta}{2\mu}}.t = \int_0^\alpha \frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\delta\cos\alpha}}; \qquad (11)$$

wenn man die Zeit (nachdem die Bewegung schon gedauert), von $\alpha = 0$ an zu zählen anfängt. Da immer $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 > 0$, so folgt aus (10), dass

I. wenn $\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta \leqq 1$, α von 0 bis 2π gehen kann;

II. „ $\mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\delta > 1$, α nur von β bis $2\pi-\beta$ gehen kann, wo $\cos\beta = \frac{1}{\mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\delta}$ ist.

Nur im ersten Falle hat eine vollständige Rotation statt, während im zweiten Falle ein Hin- und Herschwanken vor sich geht. Im ersten Falle ist $\delta < OPQ$, d. h. die Neigung des Drahtes gegen die Senkrechte ist grösser als die Neigung der Richtung der erdmagnetischen Kraft gegen dieselbe. Im ersten Falle giebt (11), wie wir sogleich zeigen wollen:

$$\sqrt{\left(\frac{\varrho\cos\delta}{2\mu}\right)}.\,t \qquad (12)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta}}\left\{F\left[\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta}{1+\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta}}\right]-F\left(\frac{\pi-\alpha}{2},\sqrt{\frac{2\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta}{1+\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta}}\right)\right\}$$

und für die Dauer einer ganzen Umdrehung ist die Zeit:

$$\sqrt{\left(\frac{2\mu}{\varrho}\right)}.\frac{4}{\sqrt{\cos\delta+\mathrm{tg}\gamma\sin\delta}}\,F\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta}{1+\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta}}\right). \qquad (13)$$

Das Qudrat dieser Grösse, unter sonst gleichen Umständen, ist also der Stärke des Erdmagnetismus proportional. Für $\gamma = 0$ wird (13):

$$2\pi.\sqrt{\left(\frac{2\mu}{\varrho}\right)}. \qquad (14)$$

Im zweiten Fall ist die Dauer eines Hingangs:

$$\sqrt{\left(\frac{2\mu}{\varrho\cos\delta}\right)}.\int_\beta^{2\pi-\beta}\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta\cos\alpha}} \qquad (15)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\mu}{\varrho\cos\delta}\right)}.\int_{-(\pi+\beta)}^{\pi-\beta}\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\delta\cos\alpha}},$$

welche Grösse man leicht durch elliptische Funktionen ausdrücken kann.

Nachdem wir diese Aufgabe gelöst haben, wollen wir nun die so eben angeführten Integrationsformeln beweisen, und dabei Gelegenheit nehmen, einige ähnliche beizufügen.

§. 2.

Seien a und b positiv, wie in Allem, was folgt, und sei zunächst $a > b$, so ist

$$\int_0^\alpha \frac{\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}} = 2\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(a-b\cos 2\varphi)^{\frac{1}{2}}} = 2\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(a+b-2b\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a+b}}\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\left(1-\frac{2b}{a+b}\cos^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a+b}}\int_\psi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\psi}{\left(1-\frac{2b}{a+b}\sin^2\psi\right)^{\frac{1}{2}}},$$

wenn zunächst $\alpha = 2\phi$, $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ oder $\psi = \frac{\pi-\alpha}{2}$. Hieraus folgt:

$$\int_0^\alpha \frac{\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a+b}}\left[F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right) - F\left(\frac{\pi-\alpha}{2}, \sqrt{\frac{ab}{a+b}}\right)\right]. \quad (1)$$

Aus (1) ergiebt sich nun:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a+b}}\left[F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right)\right]. \quad (2)$$

Unter denselben Bedingungen, wie so eben, ist:

$$\int_0^\alpha \frac{\cos\alpha\,\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}} = 2\int_0^\varphi \frac{\cos 2\varphi\,\partial\varphi}{(a+b-2b\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}}\int_0^\varphi \frac{(1-2\sin^2\varphi)\,\partial\varphi}{\left(1-\frac{2b}{a+b}\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}}\int_\psi^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-2\cos^2\psi)\,\partial\psi}{\left(1-\frac{2b}{a+b}\sin^2\psi\right)^{\frac{3}{2}}},$$

d. h.

(3)

$$\int_0^\alpha \frac{\cos\alpha\,\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}}\Big[F\Big(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big) - F\Big(\frac{\pi-\alpha}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big) - \frac{a+b}{b}\Big\{E\Big(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big) - E\Big(\frac{\pi-\alpha}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big)\Big\}$$
$$+\frac{a-b}{b}\Big\{F\Big(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big) - F\Big(\frac{\pi-\alpha}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big)\Big\}\Big]$$
$$= \frac{2}{b\sqrt{a+b}}\Big[a\Big\{F\Big(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big) - F\Big(\frac{\pi-\alpha}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big)\Big\} - (a+b)\Big\{E\Big(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big) - E\Big(\frac{\pi-\alpha}{2},\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\Big)\Big\}\Big].$$

Sei nun b willkührlich, so ist:

$$\int_0^\alpha \frac{\partial\alpha}{(a+b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}} = 2\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(a+b\cos2\varphi)^{\frac{1}{2}}} = 2\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(a+b-2b\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a+b}}\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\left(1-\frac{2b}{a+b}\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}},$$

d. h.

$$\int_0^\alpha \frac{\partial\alpha}{(a+b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}} F\left(\frac{\alpha}{2}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right). \tag{4}$$

Eben so findet man:

$$\int_0^\alpha \frac{\cos\alpha\,\partial\alpha}{(a+b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2}{b\sqrt{a+b}}\left[(a+b)\,E\left(\frac{\alpha}{2}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right) - aF\left(\frac{\alpha}{2}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right)\right]. \tag{5}$$

Unter den Bedingungen von (1) folgt hieraus:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\alpha}{(a+b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{a+b}} F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right). \tag{6}$$

Eben so:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha\,\partial\alpha}{(a-b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{4}{b\sqrt{a+b}}\left[aF\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right) - (a+b)\,E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right)\right]. \tag{7}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial\alpha}{(a+b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right)], \qquad (8)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha\,\partial\alpha}{(a+b\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}} \qquad (9)$$

$$= \frac{4}{b\sqrt{a+b}}\left[(a+b)E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right) - aF\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right)\right].$$

(8), (9): $b < a$.

Da die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial\alpha}{(a \pm b\cos\alpha)^{\frac{n}{2}}}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha\partial\alpha}{(a \pm b\cos\alpha)^{\frac{n}{2}}}, \quad b < a$$

sich auf die obigen zurückführen lassen, so können sie ebenfalls bestimmt werden. So ist z. B.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial\alpha}{(a+b\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\sqrt{a+b}}{a^2-b^2} E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right).$$

XLVI.

Ueber Sternpolygone und Sternpolyeder, nach Poinsot.

(Frei aus den Nouvelles Annales von Terquem. Février et Avril 1849.)

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

---

1. Es seien die Zahlen 1, 2, 3,..... n in der natürlichen Ordnung auf den Umfang eines Kreises geschrieben; man gehe nun vom Punkte 1 zum Punkte p, von da zu $p+p-1$, von da zu $p+2(p-1)$ u. s. f., so soll zunächst bestimmt werden, wie viele Punkte man zu durchlaufen habe, bis man zu 1 zurückkehrt, und wie viele Male man den Umfang des Kreises durchlaufen hat.

Gesetzt man gehe durch $x+1$ Punkte, den ersten mit eingerechnet, und durchlaufe dabei $y$mal den Umfang des Kreises, so ist

$$p+x(p-1)=ny+1, \text{ oder } (p-1)(x+1)=ny, \qquad (1)$$

wie man leicht einsehen wird. Sei nun m der grösste gemeinschaftliche Theiler zwischen n und $p-1$, zugleich

$$\frac{p-1}{m}=a, \quad \frac{n}{m}=b; \qquad (2)$$

so ist auch

$$a(x+1)=by. \qquad (3)$$

Es ist klar, dass es sich nur um die kleinsten Zahlen x und y handeln kann, welche diese Gleichung befriedigen, da es klar ist, dass, wenn α und β die kleinsten Werthe von y und $x+1$

sind, 2α, 2β ebenfalls der Gleichung (3) genügen u. s. f. Zugleich ist klar, dass die Werthe

$$x = b - 1,\ y = a \qquad (4)$$

der Gleichung (3) genügen. Aber ich behaupte, dass y nicht $< a$ sein kann; denn aus (3) folgt

$$x + 1 = \frac{b.y}{a},$$

und da $y < a$, b aber theilerfremd zu a ist, so könnte by kein Vielfaches von a sein. Ebenso kann nicht $x + 1 < b$ sein. Die Werthe (4) sind also die kleinsten, welche der Gleichung (3) genügen, d. h. man durchläuft b Punkte, den ersten eingerechnet, bis man zu ihm zurückkehrt, und beschreibt dabei $a$mal den Umfang des Kreises.

Sind $p-1$ und n theilerfremd, so ist $m=1$, also $a=p-1$, $b=n$; d. h. in diesem Falle durchläuft man alle n Punkte, ehe man zum ersten zurückkehrt und bewegt sich dabei $(p-1)$mal durch den Umfang des Kreises.

Im allgemeinen Falle trifft man nach einander auf folgende Punkte:

$$1,\ p,\ 2p-1,\ 3p-2,\ 4p-3,\ \ldots\ldots\ldots,\ (b-1)p-(b-2),\ 1;$$

in dem besondern:

$$1,\ p,\ 2p-1,\ 3p-2,\ 4p-3,\ \ldots\ldots\ldots\ (n-1)p-(n-2),\ 1.$$

Denkt man sich im letzteren Falle, der Punkt 1 bewege sich durch alle diese Punkte, so ist also seine letzte Stelle, ehe er auf seine ursprüngliche Lage zurückkehrt:

$$(n-1)p-(n-2) = np-n-p+2 = (p-1)n+2-p.$$

Dieser Punkt ist also der Punkt $n+2-p$, was übrigens natürlich ist, da er vom Punkte $n+1$ (d. h. 1) um $p-1$ zurückliegt.

Daraus folgt auch, dass man dieselben Punkte durchlaufen wird, wenn man von 1 zu $n+2-p$ geht und sodann immer um $p-1$ weiter, also die Punkte von p zu p nimmt; nur wird man da die entgegengesetzte Richtung einschlagen.

2. Theilt man also den Kreisumfang in n gleiche Theile, bezeichnet die Theilpunkte mit 1, 2, ……. n, und verbindet, wenn $p-1$ zu n theilerfremd ist, den Punkt 1 mit p, diesen mit $2p-1$, den letztern mit $3p-2$ u. s. f., so wird man, nachdem man $(p-1)$mal den Kreisumfang durchlaufen hat, ein geschlossenes Vieleck von n Seiten erhalten, welches lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel hat.

Sind die Theile des Kreisumfangs nicht gleich gewesen, so sind auch die Seiten und Winkel des Vielecks nicht gleich.

Wenn $p=2$ ist, so erhält man die gewöhnlichen Vielecke; für $p>2$ aber die **Sternpolygone**. Diese sind **regelmässig**, wenn die Theile des Kreisumfangs gleich waren.

Es giebt demgemäss so viele Vielecke von n Seiten, beschrieben in einer oder der entgegengesetzten Richtung, als es Zahlen, kleiner als n, giebt, die mit n theilerfremd sind, und also eigentlich bloss die Hälfte dieser Anzahl, wenn man nur die Vielecke, die nach einer Richtung beschrieben werden, aufzählt, indem die andern mit diesen zusammenfallen. Ob man nämlich von 1 zu p, oder von 1 zu $n+2-p$ geht, erhält man dasselbe Vieleck. Ist aber $p-1$ zu n theilerfremd, so ist es auch $(n+2-p)-1 = n-(p-1)$, und dies ist zugleich $<n$, so dass diese zwei Vielecke nur für eines zu rechnen sind, wenn sie gleich in entgegengesetzter Richtung beschrieben sind.

Da die Anzahl aller zu n theilerfremden Zahlen gerade ist, so kann man immer die Hälfte dieser Anzahl bestimmen.

Das Vieleck von n Seiten, das man erhält, wenn man von 1 zu p geht ($p-1$ Abtheilungen des Kreisumfangs überspringt), heisse von der Ordnung $p-1$. Also

n	Anzahl der Vielecke.		
‖			
3	 1,		
4	 1,		
5	 2,	näml. von 1 zu 2, u. 1 zu 3; also	1te u. 2te Ordnung.
6	 1,		
7	 3,	„ „ 1 „ 2, 1 zu 3, 1 zu 4,	1„, 2„, 3„, „
8	 2,	„ „ 1 „ 2, 1 „ 4,	1„, 3„, „
9	 3,	„ „ 1 „ 2, 1 „ 3, 1 „ 5	1„, 2„, 4„, „
10	 2,	„ „ 1 „ 2, 1 „ 4,	1„, 3„, „

Unter **Winkel** eines solchen Vielecks verstehen wir den Winkel, welchen zwei auf einander folgende Seiten desselben bilden; es ist der Winkel, welcher den Mittelpunkt enthält.

3. Die Summe der Winkel eines Vielecks von n Seiten und der $(p-1)$ten Ordnung ist $\pi[n-2(p-1)]$, vorausgesetzt, dass $p-1$ theilerfremd zu n ist.

Denken wir uns nämlich vom Mittelpunkte des Kreises (allgemein von einem Punkte im Innern des Vielecks) gerade Linien auf die Ecken des Vielecks gezogen, so erhält man n Dreiecke, deren Winkelsumme $n\pi$ ist. Davon gehen die Winkel am Mittelpunkte ab, wenn man bloss die Winkel des Vielecks berechnen will. Da aber der Kreisumfang $(p-1)$ mal durchlaufen ist, so ist die Summe der Winkel am Mittelpunkte $2(p-1)\pi$; also bleibt für die Summe der Winkel im Vieleck $\pi[n-2(p-1)]$.

Wenn $p=2$, so ist diese Summe $\pi(n-2)$, wie bekannt. Wenn $n=2(p-1)+1=2p-1$, so ist die Summe aller Winkel des

Vielecks $=\pi$. Ist also $n=2q+1$, und man geht von 1 zu $q+1$, so erhält man ein Vieleck, in dem alle Winkel zusammen zwei rechte betragen. Wenn $n=2(p-1)+2=2p$, so ist die Summe der Winkel $=2\pi$. Ist also $n=2q$ und man geht von 1 zu q. so erhält man ein Vieleck, in dem die Winkel zusammen vier rechte ausmachen.

Ist das Vieleck regelmässig, so ist jeder Winkel

$$=\frac{\pi}{n}[n-2(p-1)]=\pi-2\pi\left(\frac{p-1}{n}\right).$$

Es wurde bis jetzt vorausgesetzt, dass die n Punkte auf einem Kreisumfang liegen; aber es ist einleuchtend, dass die angeführten Sätze ebenfalls bestehen, wenn dieselben beliebig auf einer Ebene vertheilt sind. Nur kann in diesem Falle es sich ereignen, dass einspringende Winkel vorkommen.

4. Da der Punkt 1, wenn man denselben sich bewegend denkt, den Kreisumfang $(p-1)$mal durchläuft, so kann eine Gerade von demselben $2(p-1)$mal getroffen werden; demnach kann eine Gerade die Seiten eines Vielecks von n Seiten und der $(p-1)$ten Ordnung (immer $p-1$ theilerfremd zu n) in $2(p-1)$ Punkten treffen.

5. Die Zahl $\frac{q(q+1)}{2}$ ist theilerfremd mit $2q+1$. Denn sei r der grösste gemeinschaftliche Theiler und

$$\frac{q(q+1)}{2r}=n,\ \frac{2q+1}{r}=m,$$

wo also n und m theilerfremd sind und jedenfalls m nicht $=2$ ist, so sind auch $2n$ und m theilerfremd. Da aber

$$q(q+1)=2nr,\ 2q+1=mr;$$

so hatten also auch $q(q+1)$ und $2q+1$ denselben grössten gemeinschaftlichen Theiler r. Da aber q und $q+1$ keinen gemeinschaftlichen Theiler, ausser 1, haben, eben so aber auch nicht q und $2q+1$, so wie $q+1$ und $2q+1$, da sonst immer auch $2q+1-q=q+1$, $2q+1-(q+1)=q$ denselben Theiler hätten, so folgt daraus, dass $r=1$ sein muss, was die Behauptung beweist.

6. Wenn r zu $2q+1$ theilerfremd ist, so geben die $2q+1$ ersten Glieder der arithmetischen Reihe, deren erstes Glied r, und deren Unterschied $\frac{q(q+1)}{2}$ ist, wenn man sie mit $2q+1$ dividirt, die Reste $1, 2, \ldots (2q+1)$ in beliebiger Ordnung, und der $(2q+2)$te Rest ist r, wo natürlich $r<2q+1$ angenommen ist.

Damit nämlich der Rest r wieder erscheine, muss für x und y ganze Zahlen:

$$r+\frac{xq(q+1)}{2}=(2q+1)y+r,$$

$$x.\frac{q(q+1)}{2}=(2q+1)y$$

sein, woraus wie in 1. folgt, dass die kleinsten Werthe von x und y $2q+1$ und $\frac{q(q+1)}{2}$ sind, d. h. r erscheint nicht wieder als Rest, als beim $(2q+2)$ten Gliede. So lange ferner $x<2q+1$ ist, sind alle Reste verschieden. Denn seien k und k' kleiner als $2q+1$, so müsste für $k>k'$:

$$\left.\begin{aligned} r+\frac{kq(q+1)}{2}&=(2q+1)n+s \\ r+\frac{k'q(q+1)}{2}&=(2q+1)m+s \end{aligned}\right| \text{ also } (k-k')\frac{q(q+1)}{2}=(n-m)(2q+1),$$

d. h., da $\frac{q(q+1)}{2}$ zu $2q+1$ theilerfremd ist, es müsste $k-k'$ durch $2q+1$ theilbar sein, was unmöglich ist. Es giebt somit $2q+1$ verschiedene Reste, die demnach die Zahlen $1, 2, \ldots 2q+1$, unter denen auch r vorkommt, wenn auch in beliebiger Ordnung, umfassen.

7. Es seien $2q+1$ Punkte im Raume angenommen und die Aufgabe gestellt, in einem einzigen Zuge die $q(2q+1)$ Geraden zu beschreiben, die zwischen diesen Punkten möglich sind, ohne dieselbe Gerade zweimal zu beschreiben.

Man bilde die Reihen:

$$2,\quad 4,\quad 7,\quad 11,\ \ldots\ldots\ldots,\ \frac{q(q+1)}{2}+1;$$

$$2+\frac{q(q+1)}{2},\quad 4+\frac{q(q+1)}{2},\quad 7+\frac{q(q+1)}{2},\quad 11+\frac{q(q+1)}{2},\quad \ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{q(q+1)}{2}+1+\frac{q(q+1)}{2};$$

$$2+2.\frac{q(q+1)}{2},\quad 4+2.\frac{q(q+1)}{2},\quad 7+2.\frac{q(q+1)}{2},\quad \ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{q(q+1)}{2}+1+2.\frac{q(q+1)}{2};$$

$$\vdots$$

$$2+2q.\frac{q(q+1)}{2},\quad 4+2q.\frac{q(q+1)}{2},\quad 7+2q.\frac{q(q+1)}{2},\quad \ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{q(q+1)}{2}+1+2q.\frac{q(q+1)}{2}.$$

Jede dieser $2q+1$ Reihen enthält q Glieder; die erste wird gefunden, wenn man in dem Ausdrucke $\frac{n(n+1)}{2}+1$ für n setzt: $1, 2, 3, \ldots q$; die zweite ergiebt sich aus der ersten, indem man $\frac{q(q+1)}{2}$ zu den Gliedern der ersten Reihe hinzuzählt, u. s. f. Man durchlaufe nun, vom Punkte 1 ausgehend, alle Punkte, die durch die erste Reihe bezeichnet sind; von dem letzten dieser Reihe, der durch $\frac{q(q+1)}{2}+1$ bezeichnet ist, gehe man zum ersten der zweiten Reihe und durchlaufe eben so die Punkte der zweiten Reihe; von diesen gehe man zu denen der dritten Reihe über u. s. f., so erhält man $q(2q+1)$ Linien, die alle von einander verschieden sind.

Betrachtet man die q Vertikalreihen, so folgt nach 6. leicht, dass in jeder die Punkte $1, 2, \ldots (2q+1)$ vorkommen, so dass jeder Punkt q mal vorkommt, wie dies nothwendig ist. Wenn ferner n, $n' < q$, k, k' nicht $> 2q$, so kann man je zwei auf einander folgende Punkte, die durch eine Linie verbunden werden, durch

$$\frac{n(n+1)}{2}+1+k\,\frac{q(q+1)}{2} \quad \text{und} \quad \frac{(n+1)(n+2)}{2}+1+k\,\frac{q(q+1)}{2},$$

$$\frac{n'(n'+1)}{2}+1+k'\,\frac{q(q+1)}{2} \quad \text{und} \quad \frac{(n'+1)(n'+2)}{2}+1+k'\,\frac{q(q+1)}{2}$$

bezeichnen. Sind nun m, m' ganze Zahlen, so werden keine zwei der $q(2q+1)$ Linien dieselben sein, wenn nicht zugleich

$$\begin{cases} \frac{n(n+1)}{2}+1+k\frac{q(q+1)}{2}=\frac{n'(n'+1)}{2}+1+k'\frac{q(q+1)}{2}+m(2q+1), \\ \frac{(n+1)(n+2)}{2}+1+k\frac{q(q+1)}{2}=\frac{(n'+1)(n'+2)}{2}+1+k'\frac{q(q+1)}{2}+m'(2q+1) \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} \frac{n(n+1)}{2}+1+k\frac{q(q+1)}{2}=\frac{(n'+1)(n'+2)}{2}+1+k'\frac{q(q+1)}{2}+m(2q+1), \\ \frac{(n+1)(n+2)}{2}+1+k\frac{q(q+1)}{2}=\frac{n'(n'+1)}{2}+1+k'\frac{q(q+1)}{2}+m'(2q+1) \end{cases}$$

sein kann. Aus den ersten zwei Gleichungen folgt durch Subtraktion:

$$n+1=n'+1=(m'-m)(2q+1),$$

d. i.

$$n-n'=(m'-m)(2q+1).$$

Da nun nicht zugleich $n=n'$, $k=k'$ sein darf, so ist diese Gleichung unmöglich, indem n und $n'<q$ sind. Sie wäre nur möglich für $n=n'$, also $m=m'$, woraus aber $k=k'$ folgen würde, was unstatthaft ist, da sonst die oben angegebenen Punkte statt zweier Paare nur ein einziges sein würden.

Aus den andern zwei Gleichungen würde eben so folgen:

$$n+1=-(n'+1)+(m'-m)(2q+1),$$
$$n+n'+2=(m'-m)(2q+1).$$

Da aber n und n' kleiner als q, so ist $n+n'+2<2q+1$, so dass diese Gleichung ebenfalls unmöglich ist. Woraus denn die Behauptung folgt.

Würde man die $(2q+2)$te Reihe bilden, so würden die Punkte derselben mit denen der ersten Reihe zusammenfallen u. s. f. Der letzte Punkt der $(2q+1)$ten Reihe fällt mit dem ersten zusammen.

Man kann also ohne Verdoppelung einen Faden über die Seiten und Diagonalen eines Vielecks von ungerader Seitenanzahl, so wie über die Kanten und Diagonalen eines Polyeders von ungerader Eckenzahl wickeln.

8. Wenn die Anzahl der Punkte gerade ist, so ist die Aufgabe unmöglich. Denn seien $1, 2, \ldots 2q$ die Punkte, so müsste man, wenn die Aufgabe möglich wäre, in einer Linie fort alle $q(2q-1)$ Verbindungen zu zwei schreiben können, so dass die Anfangszahl jeder Verbindung die Endzahl der vorangehenden wäre, und zugleich am Anfang und Ende der Linie dieselbe Zahl stünde. Ein jeder Punkt, z. B. 1, würde also eine gerade Anzahl mal vorkommen, d. h. es würden von jedem Punkte eine gerade Anzahl Linien ausgehen, was falsch ist.

So ist es z. B. unmöglich, durch einen einzigen Zug die vier Seiten und die zwei Diagonalen eines Vierecks zu beschreiben.

9. Man habe ein ebenes Vieleck von n Seiten und der Ordnung $p-1$; man nehme einen Punkt O ausserhalb der Ebene dieses Vielecks an und lege durch ihn und jede Seite des Vielecks Ebenen, so erhält man in O eine körperliche Ecke von n Seiten und der Ordnung $p-1$. Eine Gerade kann seine Seiten also in $2(p-1)$ Punkten schneiden (4.). Denkt man sich um O eine Kugel, so bilden die Durchschnitte der genannten Ebenen mit der Kugelfläche ein Kugelvieleck von n Seiten und der Ordnung $p-1$. Im Folgenden sollen jedoch bloss Kugelvielecke der ersten Ordnung betrachtet werden.

10. Man habe ein regelmässiges Kugelvieleck von n Seiten, von dem jeder Winkel $=a$ Rechte ist, so ist, wenn f solcher Vielecke g mal den Flächeninhalt der Kugel bedecken, offenbar

$$f(na-2n+4)=8g.$$

Wir wollen nun annehmen, diese f Vielecke wären so gelegt, dass sie einerseits g mal die Kugel bedecken, anderseits jeweils q Winkel in einem Punkte zusammengelegt sind und dort, durch die den Seiten entsprechenden Sehnen, eine körperliche Ecke der Ordnung $p-1$ bilden. Für diesen Fall ist offenbar (1.):

$$qa=4(p-1);$$

so dass also zu gleicher Zeit folgende Gleichungen bestehen müssen:

$$f(na-2n+4)=8g, \quad qa=4(p-1),$$

worin f, n, g, q, p ganze, positive Zahlen, $p-1$ theilerfremd zu q ist, und n und q nicht unter 3 sind.

Sei nun zunächst

$$g=1, \quad p=2$$

und

α) $n=3$, $q=3$, so ist $a=\frac{4}{3}$, $f=4$, d. h. man hat das regelmässige Tetraeder;

β) $n=3$, $q=4$, so ist $a=1$, $f=8$, d. h. man hat das regelmässige Oktaeder;

γ) $n=3$, $q=5$, so ist $a=\frac{4}{5}$, $f=20$, d. h. man hat das regelmässige Ikosaeder.

Für $n=3$, kann nicht $q \geqq 6$ sein.

δ) $n=4$, $q=3$, so ist $a=\frac{4}{3}$, $f=6$, d. h. man hat das regelmässige Hexaeder;

ε) $n=5$, $q=3$, so ist $a=\frac{4}{3}$, $f=12$, d. h. man hat das regelmässige Dodekaeder.

Höher als $n=5$ kann man nicht mehr gehen.

$$p=3.$$

Das Fünfeck bietet zuerst ein Vieleck der 2ten Ordnung dar (2.). Sei also $q=5$ und

α) $n=3$, also $a=\frac{8}{5}$, $f=\frac{20g}{7}$,

woraus in den kleinsten Zahlen:

$$g=7, \quad f=20.$$

Wenn dieser Körper also besteht, so hat er 20 dreieckige Seitenflächen und bedeckt die Kugel 7mal. Man bildet ihn vermittelst des regelmässigen Ikosaeders. Von jeder Ecke des letztern gehen sechs Diagonalen aus, von denen fünf gleich sind und die Kanten einer fünffachen körperlichen Ecke der zweiten Ordnung bilden. Die zwölf derartigen Ecken bilden 20 gleichseitige Dreiecke, gleich geneigt auf einander, so dass dadurch der Stern-Ikosaeder hervorgebracht wird.

β) $n=5$, also $a=\frac{8}{5}$ und $f=4g$. Da die körperlichen Ecken von der zweiten Ordnung sind, so ist $g \geqq 2$. Sei also $g=3$, und daher $f=12$, so erhält man einen Körper, der ebenfalls besteht. Man erhält ihn aus dem regelmässigen Ikosaeder. Von jeder Ecke des letztern gehen 5 Kanten aus, deren Enden ein regelmässiges Fünfeck bilden. Die zwölf Fünfecke machen den Stern-Dodekaeder aus.

11. Wenn man in dem letzten Körper, der die Kugel 3mal bedeckt, die Seiten der Flächen zu je zwei verlängert, bis sie sich treffen, so erhält man 12 regelmässige Fünfecke der zweiten Ordnung, die sich zu 3 um 20 Ecken vereinigen und einen neuen Stern-Dodekaeder bilden, der von Fünfecken der zweiten Ordnung gebildet ist. Er hat 20 dreifache Ecken, 30 Kanten, und bedeckt die Kugel 5mal, während die körperliche Ecke von der 4ten Ordnung ist.

Verlängert man eben so im gewöhnlichen regelmässigen Dodekaeder die Seiten der 12 Fünfecke, so erhält man einen neuen Stern-Dodekaeder, gebildet von Fünfecken der zweiten Ordnung. Diese vereinigen sich zu fünf an jeder Ecke und die Oberfläche des Polyeders bedeckt die Kugel nur zweimal.

Diese vier Körper sind die einzigen regelmässigen Sternpolyeder, deren Bestand nachgewiesen ist.

XLVII.

Miscellen.

Ueber den Inhalt einer gewissen Art von Körpern, die vielleicht bei der näherungsweisen Bestimmung der Schiffsräume von Nutzen sein können.

Von dem Herausgeber.

In Taf. VII. Fig. 6. sei $ABCDEF$ ein Körper von folgender Beschaffenheit. Die eine begränzende Ebene $ABCD$ desselben sei ein Trapezium mit den parallelen Seiten AB und CD, welche auf der ihre Mittelpunkte G und H mit einander verbindenden geraden Linie GH senkrecht stehen. Die beiden auf der Ebene $ABCD$, und also nach dem Vorhergehenden auch auf der Linie GH senkrecht stehenden begränzenden Ebenen AEB und CFD unsers Körpers seien Parabelsegmente, deren Axen die auf den Linien AB und CD in deren Mittelpunkten G und H, und also auch auf der Ebene $ABCD$ und der Linie GH senkrecht stehenden Linien EG und FH sind. Die Scheitel dieser Parabelsegmente sind E und F. Endlich sei die unsern Körper begränzende krumme Fläche $ABCDEF$ so beschaffen, dass jeder auf GH senkrecht stehende Queerschnitt des Körpers ein Parabelsegment ist, dessen Axe in der auf der Ebene $ABCD$ senkrecht stehenden Ebene $EFGH$, und dessen Scheitel in der die Scheitel E und F der Parabelsegmente AEB und CFD mit einander verbindenden geraden Linie EF liegt.

Um das Volumen V dieses Körpers zu bestimmen, setze man der Kürze wegen $AB=x_1$, $CD=x_2$; $EG=y_1$, $FH=y_2$; und bezeichne die Abstände der Punkte G und H von einem in

der Linie GH oder deren Verlängerungen beliebig angenommenen Punkte respective durch u_1 und u_2, wobei wir jedoch annehmen wollen, dass u_1 kleiner als u_2 sei, was offenbar immer verstattet sein wird. Bezeichnen wir indess zuerst die Linien AB und EG überhaupt respective durch x und y, und den Abstand des Punktes G von dem in der Linie GH oder deren Verlängerungen angenommenen Punkte überhaupt durch u, so ist das Parabelsegment $AEB=\frac{2}{3}xy$; sind aber ferner $\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}au+\frac{1}{2}b$ oder $x=au+b$ und $y=\alpha u+\beta$ die Gleichungen der Linien AC oder BD und EF, so ist das Parabelsegment

$$AEB=\frac{2}{3}(au+b)(\alpha u+\beta),$$

und folglich offenbar der gesuchte körperliche Inhalt

$$V=\frac{2}{3}\int_{u_1}^{u_2}(au+b)(\alpha u+\beta)\partial u,$$

oder

$$V=\frac{2}{3}\int_{u_1}^{u_2}\{a\alpha u^2+(a\beta+\alpha b)u+b\beta\}\partial u,$$

d. i.

$$V=\frac{2}{3}\{\frac{1}{3}a\alpha(u_2^3-u_1^3)+\frac{1}{2}(a\beta+\alpha b)(u_2^2-u_1^2)+b\beta(u_2-u_1)\}$$

oder

$$V=\frac{2}{3}(u_2-u_1)\{\frac{1}{3}a\alpha(u_2^2+u_2u_1+u_1^2)+\frac{1}{2}(a\beta+\alpha b)(u_2+u_1)+b\beta\}.$$

Es ist aber

$$x_1=au_1+b,\quad y_1=\alpha u_1+\beta;$$

$$x_2=au_2+b,\quad y_2=\alpha u_2+\beta;$$

also

$$a=\frac{x_2-x_1}{u_2-u_1},\quad b=\frac{x_1u_2-x_2u_1}{u_2-u_1};$$

$$\alpha=\frac{y_2-y_1}{u_2-u_1},\quad \beta=\frac{y_1u_2-y_2u_1}{u_2-u_1};$$

folglich, wie man leicht findet:

$$V=\frac{2}{3(u_2-u_1)}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}(x_2-x_1)(y_2-y_1)(u_2^2+u_2u_1+u_1^2)\\+\frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_1u_2-y_2u_1)+(y_2-y_1)(x_1u_2-x_2u_1)](u_2+u_1)\\+(x_1u_2-x_2u_1)(y_1u_2-y_2u_1)\end{array}\right\}.$$

Nach gehöriger Entwickelung der eingeklammerten Grösse findet man leicht, dass in derselben die Grössen x_1y_1 und x_2y_2 beide in $\frac{1}{3}(u_2-u_1)^2$, die Grössen x_1y_2 und x_2y_1 beide in $\frac{1}{6}(u_2-u_1)^2$ multiplicirt sind; also ist

$$V=\frac{2}{9}(u_2-u_1)\{x_1y_1+x_2y_2+\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_1)\},$$

oder

$$V=\frac{1}{9}(u_2-u_1)\{2(x_1y_1+x_2y_2)+x_1y_2+x_2y_1\};$$

oder, wenn wir $u_2-u_1=w$ setzen:

$$V=\frac{1}{9}w\{2(x_1y_1+x_2y_2)+x_1y_2+x_2y_1\},$$

oder

$$V=\frac{1}{9}w\{x_1(2y_1+y_2)+x_2(2y_2+y_1)\},$$

oder

$$V=\frac{1}{9}w\{y_1(2x_1+x_2)+y_2(2x_2+x_1)\}.$$

In Bezug auf die Figur ist

$$V=\frac{1}{9}GH.\{AB.(2EG+FH)+CD.(2FH+EG)\}$$

oder

$$V=\frac{1}{9}GH.\{EG.(2AB+CD)+FH.(2CD+AB)\}.$$

Dass die Linien GH, AB, CD, EG, FH bei Körpern wie der vorliegende immer sehr leicht gemessen werden können, sieht man sogleich ein, und auch die Rechnung nach den obigen For-

meln bietet keine Schwierigkeit dar, weshalb man also diese Formeln wohl zur näherungsweisen Berechnung der Schiffsräume in der Praxis sollte gebrauchen können, wenn man nur die Queerschnitte des Schiffs mit hinreichender Annäherung als Parabelsegmente betrachten kann, was übrigens schon öfter in Vorschlag gebracht worden ist.

Zerlegt man ein Schiff in mehrere solche Körper wie der vorher betrachtete von der gemeinschaftlichen oder gleichen Höhe w, so ist in leicht durch sich selbst verständlicher Bezeichnung, wenn n die Anzahl der Theile ist:

$$V=\frac{1}{9}w\left\{\begin{array}{l} x_1(2y_1+y_2)+x_2(2y_2+y_1) \\ +x_2(2y_2+y_3)+x_3(2y_3+y_2) \\ +x_3(2y_3+y_4)+x_4(2y_4+y_3) \\ +x_4(2y_4+y_5)+x_5(2y_5+y_4) \\ \text{u. s. w.} \\ +x_n(2y_n+y_{n+1})+x_{n+1}(2y_{n+1}+y_n) \end{array}\right\};$$

oder, wenn L die ganze Länge des Schiffs bezeichnet:

$$V=\frac{L}{9n}\left\{\begin{array}{l} x_1(2y_1+y_2) \\ +x_2(4y_2+y_1+y_3) \\ +x_3(4y_3+y_2+y_4) \\ +x_4(4y_4+y_3+y_5) \\ \text{u. s. w.} \\ +x_n(4y_n+y_{n-1}+y_{n+1}) \\ +x_{n+1}(2y_{n+1}+y_n) \end{array}\right\};$$

oder

$$V=\frac{L}{9n}\left\{\begin{array}{l} 2(x_1y_1+2x_2y_2+2x_3y_3+\ldots+2x_ny_n+x_{n+1}y_{n+1}) \\ +x_1y_2+x_2(y_1+y_3)+x_3(y_2+y_4)+\ldots+x_n(y_{n-1}+y_{n+1})+x_{n+1}y_n \end{array}\right\}.$$

Für $n=2$ ist z. B.

$$V=\frac{L}{18}\{2(x_1y_1+2x_2y_2+x_3y_3)+x_1y_2+x_2(y_1+y_3)+x_3y_2\}$$

oder

$$V=\frac{L}{18}\{x_1(2y_1+y_2)+x_2(4y_2+y_1+y_3)+x_3(2y_3+y_2)\}.$$

Diesen Gegenstand noch weiter auszuführen, ist jetzt nicht meine Absicht.

Schreiben des Herrn Franz Dietzel, Lehrer an der Königlichen Baugewerkenschule zu Zittau, an den Herausgeber.

Ich erlaube mir Ihnen eine, in den letzten Tagen von mir gefundene Formel für die Bestimmung des Kubikinhaltes der abgekürzten Pyramide mitzutheilen. Dieselbe ist zwar für die Wissenschaft nicht von Bedeutung, für den elementaren Unterricht und die Praxis aber nicht ganz ohne Wichtigkeit. Wenigstens haben mir das Letztere einige Baumeister, denen ich sie mittheilte, versichert.

Bezeichnet man (Taf. VII. Fig. 7.) den Flächeninhalt der untern Grundfläche ABC.... der abgekürzten Pyramide ABC.... mit F, den der obern $abcd$... mit f, den Abstand beider mit h, sowie den Abstand der obern Grundfläche abc... von der fingirten Spitze S mit h'; seien ferner ab und AB zwei beliebige, aber in derselben Seitenfläche liegende Seiten der Grundflächen und werde ab mit l, AB mit L bezeichnet; so ist

$$Sa:SA=l:L=h':h+h'$$

oder

$$l:L-l=h':h.$$

woraus folgt

$$1)\qquad h'=\frac{h.l}{L-l};$$

ferner ist

$$f:F=l^2:L^2,$$

folglich

$$2)\qquad f=\frac{l^2}{L^2}F,$$

$$3)\qquad F=\frac{L^2}{l^2}f.$$

Nun ist der Inhalt J der abgekürzten Pyramide gleich der ganzen Pyramide, weniger dem abgeschnittenen Stück, also

$$J=\frac{1}{3}\cdot F(h+h')-\frac{1}{3}fh'=\frac{1}{3}\{Fh+h'(F-f)\}$$

und wenn man 1) substituirt:

$$\text{I.}\quad J=\frac{1}{3}h\left(\frac{FL-fl}{L-l}\right),$$

oder wenn man 2) und 3) substituirt:

$$\text{II.}\quad J=\frac{1}{3}hf\left\{1+\frac{L}{l}+\frac{L^2}{l^2}\right\}$$

$$\text{III.}\quad J=\frac{1}{3}hF\left[1+\frac{l}{L}+\frac{l^2}{L^2}\right]$$

Zus. Wird $l=L$, werden also beide Grundflächen einander gleich, so erhält man ein Prisma, u. s. w.

Die Formel I. wird man anwenden, wenn beide Grundflächen F und f leicht zu bestimmen sind; II., wenn die untere Grundfläche nicht, sondern nur eine Seite L derselben, und III., wenn die obere Grundfläche nicht leicht zu bestimmen, sondern nur eine Seite l derselben.

Es liessen sich daraus noch Folgerungen ziehen, z. B. für das Verfahren, welches man bei schief abgeschnittenen Pyramiden einzuschlagen hat, wo man nur durch den tiefsten Punkt eine Parallele zur Grundfläche zu ziehen hat u. s. w., was ich aber, um nicht weitläufig zu werden, nicht weiter ausführen will.

Zittau d. 12. Febr. 1849.

Deutsche Maasse, Münzen und Gewichte.

V.

Ueber deutsches Münz-, Maass-, und Gewichts-Wesen.

Von dem
Herrn Professor Dr. Gerling
an der Universität zu Marburg.

Der Aufforderung der Redaction des Archivs für Mathematik und Physik, Beiträge zu dem in der Ueberschrift angegebenen Gegenstand zu liefern, glaube ich entsprechen zu müssen, weil ich über diese Verhältnisse seit einer langen Reihe von Jahren nicht nur zu sammeln, sondern auch mich amtlich und ausseramtlich darüber zu äussern wiederholt Veranlassung hatte.

Als ersten Grundsatz, den man bei Vorschlägen dieser Art festhalten muss, habe ich mir aus meinen deshalbigen Studien und Erfahrungen den entnommen, dass man ja nicht bloss mit mathematischen Anschauungen auszureichen glauben soll, sondern sich stets bewusst bleiben muss, dass es Dinge des täglichen practischen Lebens sind, bei welchen man die Hindernisse zu beseitigen hat. Denn was hilft ein noch so gelehrt ausgedachtes mathematisch richtiges System, wenn dasselbe bei seiner Einführung entweder besondere neue Kenntnisse erfordert, welche nicht schon aus dem ersten Schulunterricht jedermann bekannt sind, oder wenn es unerschwingliche Kosten veranlasst, deren nur zu viel schon bei dergleichen Aenderungen den Leuten ohnehin zugemuthet sind. Es soll ja die Neuerung eine Wohlthat und keine Landplage werden.

Demnach scheint mir das allein richtige Verfahren zu sein, sich so einfach als möglich an etwas Vorhandenes, Fertiges und Bekanntes anzuschliessen, und einen leichten Uebergang von dem bisherigen Zustand in den neuen zu vermitteln.

Münzwesen.

Hier ist ein System vorzuschlagen, wodurch die bisherigen in dem Volksverkehr geläufigen Münzen nicht gleich abgethan zu werden brauchen, und wobei zugleich eine allgemeine Umprägung nicht sofort nöthig wird, sondern nach und nach je nach Bedürfniss vorgenommen werden kann.

Dazu ist sich zuerst zu erinnern, dass die Einheit eines neuen Münzsystems durchaus willkührlich ist, indem der Zusammenhang mit dem Maass- und Gewichts-System bei allem wissenschaftlichen Interesse doch für das gemeine Leben von gar zu geringer Bedeutung ist, um practische Interessen dafür hintenanzusetzen.

Sodann aber ist auch nicht zu übersehen, dass die Gewohnheit, die Münzen alle auf eine höhere Einheit zu beziehen (in Deutschland auf die Mark Cöllnisch fein Silber) eine Willkühr enthält, die man ohne irgend practischen Nachtheil verlassen kann. Im Gegentheil man kann eben so gut einen aliquoten Theil der Münz-Einheit zum Grunde legen.

In unserm besondern Fall haben wir aber schon einen solchen aliquoten Theil, der, wie sich gleich zeigen wird, uns in Deutschland, mit einem verhältnissmässig sehr geringen Opfer zu einem gemeinsamen System verhelfen kann.

Dieses Opfer ist nach meiner Ansicht von dem preussischen Staate zu verlangen, welcher vor ungefähr 80 Jahren durch Annahme des s. g. Graumannischen oder 21 Guldenfusses den bisher unerhörten Factor 7 in das Münzwesen einführte und dadurch das Zustandekommen eines allgemeinen deutschen Systems sehr erschwerte.

Preussen ist es dagegen wieder gewesen, welches in den letzten etwa 25 oder 30 Jahren, dadurch dass es auf ein offenes ehrliches Münzwesen überall hinwirkte, die jetzt zu thuenden Schritte wesentlich vorbereitete. Namentlich hat die Münz-Convention der Zollvereins-Staaten vom 30. Juli 1838., indem sie Vereinsmünzen schuf, den heimlich fortschleichenden sogenannten Kronthaler-Unfug aus dem Wege räumte, und den festen Satz 4 Thaler (14 T.-Fuss) = 7 Gulden (24½ Fl.-Fuss) einführte, ausserordentlich nützlich vorgearbeitet.

Mit Zugrundlegung dieser Münz-Convention von 1838 gelangt man aber sehr leicht zu einem Theil, der in sehr vielen Staaten Deutschlands schon wirklich (freilich für jetzt nur als Scheidemünze) vorhanden und dabei so klein ist, dass Bruchtheile davon im gemeinen Leben schon jetzt vernachlässigt werden, und welcher dann auch sehr leicht zu einer angemessenen Einheit führt.

Dieser Theil ist der in ganz Süddeutschland bekannte Heller, also $1/_{240}$ des Guldens ($24^1/_2$ Fl.-Fuss) oder $1/_{420}$ des Thalers (14 T.-Fuss) d. h. $1/_4$ Kreutzer oder $1/_{14}$ Silbergroschen.

Preussen braucht also nur das geringe Opfer zu bringen, dass es seinem Silbergroschen statt der bisherigen 12 Pfennige (oder meinetwegen auch zunächst nur neben denselben) 14 Heller giebt, so haben wir von Memel bis Basel wenigstens einen Theil, den jedes Kind kennt, die böse Zahl 7 ist der Vereinigung nicht mehr im Wege, die unausstehlichen Umrechnungen auf der langgedehnten Gränze des 14 Thlr.- und $24^1/_2$ Fl.-Fusses sind zu Ende, und wir können nun hiervon zu der neuen Einheit fortschreiten.

Diese Einheit würde bequem zu hundert Theilen angenommen, und wäre also = 25 Kreutzer rheinisch. Der Einwurf, dass in 100 der Factor 3 fehle, wird jetzt wohl nicht mehr zur Sprache kommen oder doch nicht hierbei zu fürchten sein, da im grossen Verkehr doch nicht nach Hellern gerechnet wird, im kleinen Verkehr aber Niemand daran denkt, über Bruchtheile eines Hellers streiten zu wollen.

Die Einheit wäre also zuerst gesetzlich zu definiren. Dazu müsste meines Erachtens die Münz-Convention von 1838 vollständig zum Grunde gelegt werden. Demnach würde die Definition also lauten: Die cöllnische Mark fein Silber (zu 233,8555 Grammen nach der Convention von 1838 angenommen) wird ausgeprägt zu 58,80 Einheiten oder 5880 Theilen (Hellern).

Was die Benennung und Schreibweise betrifft, so würde ich rathen die Namen wenigstens vorerst so beizubehalten wie sie entstanden sind, und es dem Volkswitz zu überlassen, ob etwa eine andere ihm mehr zusagende erfunden werden wolle, es sei denn, dass man der Anschaulichkeit wegen für Theil gleich von Anfang das alte Wort Heller im Gesetz beibehalten wolle. Für die Art des Schreibens aber rathe ich die einfachste der mir bekannten Methoden, die der practischen Amerikaner nachzuahmen und also zu schreiben

1 Mark cölln = *E* 58.80 *).

---

*) Das *E* ist natürlich hier nur beispielsweise gesetzt und könnte eben so gut ein *M* (Münze) *D* (deutsche Münzeinheit) *R* (Reichsmünze) gewählt werden.

Die vorgeschlagene Einheit empfiehlt sich unter andern dadurch, dass die bisherigen gangbarsten Münzen sich genau darin ausdrücken lassen:

1 Thaler (14 Th.-Fuss) = *E* 4.20,
1 Gulden ($24\frac{1}{2}$ Fl.-Fuss) = *E* 2.40

mit allen ihren Unterabtheilungen. Aehnlich wäre demnach

1 Zwanziger (Kopfstück) = *E* 0,96.

Eben so ist es meines Wissens mit allen den Münzen, welche im gemeinen Leben einen Gebrauchswerth angenommen haben. So z. B. rechnet man in Hamburg, wo das eigentliche Courantgeld im täglichen Verkehr nur noch selten vorkommt: 5 Mark Courant zu 2 Thaler (14 Th.-Fuss) und hat demnach den Satz 1 Mark Ct. = *E* 1.68. So rechnet man ferner im gemeinen Leben 3 Fünffrankenstücke zu 4 Thalern (14 Th.-Fuss), demnach wäre das Fünffrankenstück = *E* 5.60. So wird ferner der Kronthaler (Brabänter) je nach der Verschiedenheit der Staaten meines Wissens mindestens zu 2 fl. 42 kr. (= *E* 6.48) und höchstens zu 1 Thlr. $16\frac{1}{2}$ Sgr. (= *E* 6.50) im gemeinen Leben ausgebracht. Derselbe wird sich also sehr bald zu *E* = 6.50 im gemeinen Leben feststellen, ohne Anspruch freilich in den Reichskassen zugelassen zu werden.

Umgekehrt stellt sich die Einheit des vorgeschlagenen Systems leicht in den vorhandenen Münzen und den nach dem Gebrauchswerth gangbaren dar:

E 1.00 = $7\frac{1}{7}$ Sgr. (hoffentlich demnächst 7 Sgr. 2 Heller)

d. h. *E* 21.00 = 5 Thaler (14 T.-Fuss),
E 1.00 = 25 Kreutzer,

d. h. *E* 12.00 = 5 Gulden ($24\frac{1}{2}$ Fl.-Fuss),

und in ähnlicher Weise nach obigen Angaben:

E 13.00 = 2 Kronthaler,
E 28.00 = 5 Fünffrankenstücke,
E 42.00 = 25 Mark Hamb. Ct.,
E 72.00 = 25 Gulden Conv.-M.

Ein Hauptvortheil des vorgeschlagenen Systems würde darin bestehen, dass mit äusserst geringen Opfern sofort zu ihm übergegangen werden könnte. Man brauchte sich nämlich nicht dar-

auf zu beschränken, mit der Ausgabe der neuen Münzen zugleich die Vergleichung der vorhandenen öffentlich bekannt zu machen, sondern man könnte auch den Uebergang und die Einbürgerung sehr erleichtern dadurch, dass man den vorhandenen guten Münzen, so wie sie die betreffenden Staatskassen wieder durchlaufen, mit grossen deutlichen Ziffern den Werth im neuen System unmittelbar aufprägte, ein Vorschlag, -dessen Ausführbarkeit von bewährten Technikern mir bezeugt ist.*) Es verstände sich dabei von selbst, dass das vorhandene Gepräge in soweit dabei erhalten bleiben könnte und müsste, dass derjenige Staat, welcher seine bisherige Landesmünze durch diese Aufprägung zur Reichsmünze erklärte, erkennbar und für die Güte des Geldes verantwortlich bliebe. Bei dem neu auszuprägenden Reichsgelde bedürfte es dagegen, ausser einer Bezeichnung der Münzstätte, nur der Darstellung des Reichsadlers auf der einen und der Ziffer auf der andern Seite.

Eine solche Aufprägung dürfte auch für die bisherigen Scheidemünzen den einzelnen Staaten (als Uebergangsmaassregel) nachzulassen sein, und würde dann wahrscheinlich für die Einbürgerung des neuen Geldes, so wie zur Beseitigung der noch immer stattfindenden Störungen auf den Gränzen der beiden jetzigen Systeme nützlich wirken. Nur bedürfte es hier allerdings des besondern Vorbehalts, dass die Staatskassen desjenigen Staates, der seine Scheidemünze so bezeichnet hat, verpflichtet blieben, ihre eigene Scheidemünze in ungemessener Menge von den Reichskassen zurück zu nehmen, während letztere nur gehalten wären sie zur Ausgleichung von Zahlungen anzunehmen, welche sich in Stücken über *E*0.50 nicht leisten lassen:

Demnach könnte ein Reichsmünzgesetz vielleicht sich ganz einfach nach folgenden Grundzügen aufstellen lassen.

1.) Die Grundsätze der Convention von 1838 werden ausdrücklich für alle gröberen Münzen in Silber angenommen, und deren Ausführung wird auf die obige Weise geregelt.

2.) Hinsichtlich der Scheidemünzen wird eine gewisse Festsetzung auch gleich mit angenommen.

Not. Diese Festsetzung ist im Grunde ziemlich willkührlich, da ein schädlicher Uebergriff der Scheidemünze sich durch das im Gesetz anzugebende Maximum der Ausgabe im Verkehr und in den Kassen vermeiden lässt. Am zweckmässigsten würde es wohl sein das System der Silbergroschen oder der Sechskreuzerstücke geradezu anzunehmen.

3.) Alle Rechnungen und Zahlungen des Reichs werden gleich nach dem neuen System eingerichtet.

---

*) Eine ähnliche Aufprägung fand in England im Anfang dieses Jahrhunderts statt, als Spanische Thaler in grosser Menge gekapert waren.

4.) Alle neuen Münzen sind nach diesem System zu schlagen und zwar gleich Anfangs eine gehörige Anzahl von Stücken zu *E*5.00; *E*3.00; *E*1.00 und *E*0.50.

5.) Auch die Scheidemünzen in Silber und Kupfer werden nach Maassgabe dieses Gesetzes dem neuen System angeschlossen und gleich Anfangs in der gehörigen Anzahl geschlagen, z. B. in Silber *E*0.40; *E*0,30; *E*0,20; *E*0.10; *E*0.05; in Kupfer *E*0.04; *E*0.01.

6.) Denjenigen Staaten, welche ihre Zahlungen an die Reichskassen nicht gleich Anfangs in der neuen Münze leisten können, bleiben obige Uebergangsmaassregeln vorbehalten.

Wegen der Goldmünzen wage ich nicht schon jetzt bestimmte Vorschläge zu thun. Ueber das Bedürfniss derselben wird sich die Handelswelt erst dann aussprechen können und müssen, wenn sich der Preis des Goldes gegen das dem deutschen System zum Grunde liegende Silber mehr festgesetzt hat, als dies gerade jetzt der Fall zu sein scheint. — Vor der Hand wird es genügen festzusetzen, dass von Zeit zu Zeit, vielleicht von 10 zu 10 Jahren oder von 20 zu 20 Jahren der Werth, wornach Goldmünzen bei den Reichskassen angenommen und ausgegeben werden sollen, bestimmt und bekannt gemacht werde. So z. B. also für jetzt nach dem Gebrauch des gemeinen Lebens:

1 Friedrichsdor = *E* 23.80,

1 holländ. 10 Guldenstück = *E* 24.00.

Demnächst wird man je nach Bedürfniss und mit Vorbehalt von Zeit zu Zeit den Werth in Silber je nach dem wechselnden Werthverhältniss des Goldes neu zu bestimmen, auch Reichsmünzen in Gold etwa zu *E* 50.00 und *E* 25.00 prägen lassen können.

Die Einführung einer allgemeinen Gesetzgebung hat bei dem Münzwesen nach meiner Ueberzeugung bei weitem geringere Schwierigkeiten als bei dem Maass- und Gewichtswesen. Bei ersterem wird nämlich der Einzelne von der Veränderung verhältnissmässig nur wenig gewahr, die Opfer, welche zu bringen sind, treffen zunächst die Staatskassen und also nur in sehr entfernten Wirkungen den einzelnen Haushalt. So z. B. war durch den s. g. Kronthalerunfug $^1/_{40}$ des Silbervermögens der betreffenden Länder stillschweigend nach und nach in die Staatskassen gewandert, ohne dass im Volk etwas davon bemerkt worden war, wie man deutlich daran erkennt, dass es kenntnissreiche und erfahrne Männer genug giebt, die sich nicht klar bewusst sind, weshalb ihr bekannter 24 Guldenfuss 1838 die neue Benennung $24^1/_2$ Guldenfuss erhalten habe. Eben so ist mir ein deutscher Staat bekannt, wo im Laufe von etwa 50 Jahren durch

Scheidemünzoperationen $1/_{11}$ des Silbervermögens unbemerkt in die Staatskasse gewandert war, und wo letztere demnächst veranlasst wurde die Hälfte davon wieder zurück zu erstatten. Letzteres ging eben so unbemerkt vor, mit der einzigen Ausnahme, dass die kleinen Geldwechsler an den Gränzen, welche schlau genug gewesen waren diese Verhältnisse zu benutzen, über den ihnen entgehenden Gewinn höchlich erzürnt wurden. Nur eine neue Abtheilung der Münzen ist es, welche im gemeinen Leben Anfangs Unbequemlichkeiten mit sich führt, (ich erinnere z. B. an die Einführung der Silbergroschen statt der sonstigen guten Groschen u. s. w.). Da bringt der kleine Hausverkauf, die Umrechnung der Brod- und Fleischtaxen u. s. w. dann Anfangs allerhand Irrthümer und Zänkereien mit sich. Diese verlieren sich aber schon im Lauf des ersten Jahrs und werden gewiss in unserm besonderen Fall durch die oben vorgeschlagenen Uebergangsmaassregeln auf ein Kleinstes gebracht.

Ganz anders aber verhält es sich mit den Veränderungen von Maassen und Gewichten. Hier ist die Einführung der neuen Abtheilung das Geringste. Dagegen muss die veränderte Sache (welche beim Gelde von selbst in jedes Haus kommt) von jedem Haushalt besonders und mit besondern Kosten angeschafft werden. Welche Schwierigkeiten da entstehen, wenn jede Hausfrau bis zu einem gewissen Termin eine neue Elle und neue Gewichtssteine angeschafft haben soll, der Gebrauch der altgewohnten mit Strafe bedroht ist u. s. w. das erfährt man am besten durch Nachfragen bei den Bauern und s. g. kleinen Bürgern derjenigen Staaten, in welchen solche Veränderungen durchgeführt sind.

Diesemnach würde es nicht räthlich sein und noch weniger billig gegen die Bewohner derjenigen deutschen Länder, in welchen erst in neuerer Zeit Maass- und Gewichtsreformen statt gefunden haben, jetzt ein neues allgemeines System, was ihnen also neue Unkosten und Beschwerden veranlasste, bis in jeden einzelnen Haushalt hinein durchführen zu wollen.

Dazu scheint aber auch keine Nothwendigkeit, sondern es genügt wohl ein System anzunehmen, welches bei allen von Reichswegen vorzunehmenden Bestimmungen zum Grunde zu legen ist und sodann gesetzlich zu bestimmen, dass eine Aenderung in den einzelnen Staaten nicht anders vorgehen darf als durch Annahme dieses Reichssystems.

Maasse.

Ein ausgezeichneter Practiker und Schriftsteller, Hr. G. Hagen, hat neuerdings über die Grundlage eines solchen Systems seine Meinung in einem mir freundlich übersandten Schriftchen (Druck von Krebs-Schmitt in Frankfurt a. M.) geäussert; ich halte mich also verbunden anzuführen, worin meine Ansicht übereinstimmt und abweicht.

Einverstanden bin ich darin, dass es durchaus unpractisch sein würde das Meter als ein Naturmaass zum Grunde zu legen, dagegen aber glaube ich, dass das reine metrische System, als ein vorhandenes und schon in einem grossen Theil von Deutschland bei den neueren Gesetzgebungen zum Grunde liegendes, auch für die Reichsgesetzgebung angenommen werden muss. Es käme dann einestheils nur darauf an, die gesetzliche Definition des Grundmaasses so zu fassen, dass kein Zweifel über die wahre Länge bestehen kann, anderntheils die Einführung ins practische Leben so zu ordnen, dass es sich in möglichst kurzer Zeit auch darin einbürgere, wie es sich für wissenschaftliche Arbeiten schon eingebürgert hat.

Einverstanden bin ich ferner damit, dass es nicht genügt bloss zu definiren: Das Grundmaass soll sein $=443',296$ pariser Linien der Toise von Peru, und dass es viel zweckmässiger sein würde, die schon vorhandene vortreffliche deutsche Arbeit des unvergesslichen Bessel hiebei zum Grunde zu legen und also zu definiren $=443',296$ solcher Linien, dergleichen nach der preussischen Gesetzgebung $139',13$ auf einen preussischen Fuss gehen. — Es sind übrigens, so weit meine Kenntniss reicht, auch die Verschiedenheiten zwischen den von Paris entlehnten Maassstäben, dergleichen bei den verschiedenen neueren deutschen Bestimmungen zur Grundlage dienten, keineswegs so gross, dass eine im practischen Leben irgend merkliche Benachtheiligung daraus erwachsen könnte, im Gegentheil zeigen sie im Allgemeinen eine sehr gute Uebereinstimmung für diesen Zweck.*) Es dürfte deshalb, wenn man jene Bessel'sche Arbeit nicht gerade hätte, auch vollkommen genügen, einen von jenen zu Maassregulirungen schon gebrauchten Stäben auszuwählen und als Grundmaass anzunehmen.

Jedenfalls bedarf es also meines Erachtens keiner neuen Darstellung des Grundmaasses, sondern man kann gleich zu

*) Zwei Beispiele von solcher Uebereinstimmung, wovon die eine sogar an das Fabelhafte gränzt, sind angeführt in meinen Beiträgen S. 225.

den s. g. Copien schreiten, deren besonders in Süddeutschland wahrscheinlich schon eine hinlängliche Anzahl vorhanden sind. Diese Copien wären in Form von eisernen Maassstäben in den Gegenden, wo sie noch fehlen, so viele auf Reichskosten zu vertheilen, dass doch etwa auf jede 50 Quadratmeilen eine käme.

Anlangend die Einführung des Grundmaasses in das practische Leben, so kommt es dabei vorzüglich auf zwei Umstände an, zuvörderst, dass man die Anschauung desselben so viel als möglich erleichtere, sodann dass man schickliche deutsche Namen für dasselbe und seine Abtheilungen gesetzlich feststelle. Was das erste betrifft, so sollte man, meine ich, unter öffentlicher Aufsicht Copien zweiten Rangs in Holz anfertigen lassen und alle Gemeinden so wie alle öffentlichen Schulen gesetzlich verpflichten, eine solche anzuschaffen. Solche hölzerne Meter-Stäbe, mit ihrer Eintheilung in 100 Theile versehen und übrig genau genug für alle Bedürfnisse des gemeinen Lebens, kosten, wenn sie in grösserer Menge angefertigt werden, das Stück höchstens 5 Silbergroschen; es liegt also hierin keine unbillige Zumuthung. — Für die Benennung des Grundmaasses (Meters) schlage ich den Namen Stab vor, der schon deshalb leicht sich dem Lebensgebrauch anbequemen wird, weil die Bauhandwerker Stäbe von ungefähr gleicher Länge führen. Die Unterabtheilung könnte man vielleicht (eben so wie beim Gelde) gleich in 100 Theile machen, und jedem Theil dann weiter 10 Striche (Millimeter) oder 100 Punkte zuschreiben. Ob es zweckmässig ist je zehn Theile zusammen (das Decimeter) noch mit einem gesetzlich vorgeschriebenen Namen zu versehen, oder ob man hiebei dem Volkswitz seinen Spielraum lassen will, mag dahingestellt bleiben. Entscheidet man sich für das Erste, so würde sich wohl die Benennung Hand (Handbreit) dafür empfehlen, so wie man den Theil (das Centimetre) dann Nagel (Nagelbreit) nennen könnte. Vor allem aber wird man sich vor zwei Umständen zu hüten haben, dass man nicht die philologischen Pedantereien nachahme, die dem französischen Gesetz ankleben (woran die Akademie bekanntlich unschuldig ist) und dass man die alten bestehenden Namen Fuss, Zoll u. s. w. nicht auf das neue Maass übertrage. Diese Namen müssen vielmehr den bleibenden Landesmaassen allein vorbehalten bleiben, und sind ohnehin schon bei den meisten neueren Maassbestimmungen z. B. in Baden, Hessen-Darmstadt u. s. w. auf das Grundmaass (Meter) in bequemen Verhältnissen zurückgeführt.

Gewichte.

Hier stimmen meine Ansichten mit denen des oben erwähnten verehrten Freundes in allem Wesentlichen durchaus überein, nur gehe ich darin noch etwas weiter, indem ich glaube, es bedürfe dazu gar keiner neuen Festsetzung, sondern nur einer An-

erkennung der schon bestehenden. Wir haben nämlich schon in dem grössten Theil von Deutschland das Zollgewicht auf das Kilogramm gegründet, wir haben auch als Grundlage der Münzconvention von 1838 schon das Grammengewicht. Es kommt also nur darauf an, wie Hagen richtig will, sich unabhängig zu machen von der für das Leben doch illusorischen Gelehrsamkeit, welche der französischen Definition zur Grundlage dient, und dann einfache deutsche Benennungen einzuführen. Da nun überdies eine Beziehung auf das Längenmaass in den Gränzen des practischen Bedürfnisses ohnehin schon längst erreicht ist, so genügt es meines Erachtens vollkommen, wenn man ein bestimmtes in einer deutschen Münzstätte oder sonstigen öffentlichen Anstalt befindliches gutes Gewichtsstück (von einem Kilogramm) zur Gewichtseinheit erklärt (ähnlich wie der Bessel'sche Maassstab bei der Definition der Längenmaasse dienen soll) und nur in den Gegenden, wo noch Mangel an Copien sich findet, für Herbeischaffung derselben sorgt.

Marburg, den 23. April 1849.

XLIX.
Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Sammlung von Integraltafeln zum Gebrauch für den Unterricht an der Königl. Allgemeinen Bauschule und dem Königl. Gewerbe-Institut. Im Auftrage des Ministeriums für Handel, Gewerbe und öffentliche Arbeiten bearbeitet von F. Minding, Doctor der Philosophie und Professor der Mathematik an der Universität zu Dorpat. Berlin 1849. kl. 4. 1 Thlr. 5 Sgr.

Wir beeilen uns das Erscheinen eines Werkes anzuzeigen, durch welches einem wahren Bedürfnisse sowohl bei dem Unterrichte in der Integralrechnung und der höheren Mathematik überhaupt, als auch bei den vielfachen Anwendungen, welche sich von derselben machen lassen, abgeholfen wird. Es ist bekannt, dass schon Leibniz vielfach auf die grosse Wichtigkeit analytischer Tafeln hingewiesen hat; für keinen Theil der Analysis sind solche Tafeln aber wichtiger als für die Integralrechnung. Die ersten Integraltafeln lieferte der um das Studium der Mathematik vielfach verdiente Meyer Hirsch im Jahre 1810, und man kann wohl sagen, dass diese Tafeln den Hauptinhalt der damals die Integralrechnung in ihrer Gesammtheit repräsentirenden Werke von Euler und Lacroix darstellten, und deshalb allen billigen Ansprüchen entsprachen, da sie jedenfalls auch für den praktischen Gebrauch im Ganzen zweckmässig eingerichtet waren. Diese Tafeln von Meyer Hirsch sind nun aber sehr lange vergriffen und im Buchhandel nicht mehr zu haben, was wohl jeder Lehrer der höheren Analysis und mancher Praktiker schon oft unangenehm empfunden hat. Wir erinnern uns schon einigemal Ankün-

digungen neuer Integraltafeln gelesen zu haben; aber kein solches projectirtes Unternehmen scheint zur Ausführung gekommen zu sein, was namentlich rücksichtlich der Tafeln zu bedauern ist, die, so viel uns noch erinnerlich ist — da uns in diesem Augenblicke nicht die nöthige Zeit zu genauern literarischen Nachsuchungen zu Gebote steht — vor einigen Jahren der sehr verdiente und geschickte Herr Professor Moth in Linz in den Astronomischen Nachrichten ankündigte, da diese Ankündigung zu sehr schönen Hoffnungen berechtigte. Als eine neue Ausgabe der völlig vergriffenen Tafeln von Meyer Hirsch ist nun das vorliegende, wohl auch in demselben, nur an einen andern Besitzer übergegangenen Verlage erschienene Werk in gewisser Rücksicht zu betrachten, wenn auch die Gerechtigkeit gegen den jetzigen Herrn Verfasser erfordert, gleich hier zu bemerken, dass sein Werk eigentlich eine ganz selbstständige Arbeit ist und in vielen Punkten, die wir nun etwas näher bezeichnen wollen, von seinem Vorgänger wesentlich abweicht.

Zuerst billigen wir es ganz, dass der Herr Verfasser die Methoden und Formeln zur Zerlegung der gebrochenen Functionen in Partialbrüche, mit denen Meyer Hirsch seine Tafeln beginnt, ganz weggelassen hat, weil diese jedenfalls nur in die Lehrbücher der Integralrechnung gehören, und aus denselben erlernt werden müssen. Nicht ganz einerlei Meinung können wir mit dem Herrn Verfasser darin sein, dass auch die Reductionsformeln, von denen in der Integralrechnung so häufiger Gebrauch gemacht wird, und für welche Meyer Hirsch daher auch eine ziemlich vollständige Tafel geliefert hat, ganz weggelassen worden sind; denn wenn allerdings diese Formeln eigentlich zu den Integrationsmethoden, und deshalb streng genommen in eine Sammlung von Integralformeln nicht gehören, so ist es jedoch jedenfalls sehr angenehm, sie in den ältern Tafeln von Meyer Hirsch ihres häufigen Gebrauchs wegen an einem Orte beisammen zu finden. Indess können auch in diesem Punkte die Lehrbücher, welche die Reductionsformeln nothwendig enthalten müssen, leicht zur Ergänzung der Tafeln dienen, und wir wünschen daher aus unserer vorhergehenden Bemerkung keineswegs einen bestimmten Tadel der vorliegenden neuen, gewiss sehr verdienstlichen Tafeln entnommen zu sehen, da dem Herrn Verfasser wohl auch der auf dem Titel angegebene specielle Zweck derselben gewisse Schranken vorzeichnete. Rücksichtlich der anderen Abweichungen von den älteren Tafeln von Meyer Hirsch wollen wir nun den jetzigen Herrn Herausgeber selbst reden lassen:

„Bei Ausarbeitung dieser neuen Tafeln ist der im Unterrichte bewährte, auf stufenweisen Fortschritt vom Einfacheren zum Zusammengesetzteren gegründete Plan der früheren Tafeln im Ganzen beibehalten worden, jedoch mit wesentlichen Abänderungen, nämlich:

1. Das den Tafeln zu Grunde liegende System von allgemeinen Formeln ist in seinen einzelnen Gliedern mehr entwickelt und in das Ganze verwebt worden, indem theils jeder Tafel die ihr entsprechende allgemeine Formel, nach Umständen in mehrern

Gestalten, vorangestellt ist, theils die mehrere Tafeln zugleich umfassenden Formeln an den gehörigen Orten eingeschaltet sind.

2. Die Zurückweisungen von einer Tafel auf die andere sind auf ein geringeres Maass beschränkt worden, um überall, so lange nicht allzu grosse Weitläufigkeit entstand, vollständig ausgerechnete Formeln vorzulegen.

3. Integrale, welche durch sehr nahe liegende Substitutionen in andere einfachere übergehen, sind unter der einfacheren Form aufzusuchen. Dies gilt namentlich von den Formen $\int \frac{x^{m-1}\partial x}{a+bx^n}$, $\int \frac{x^{m-1}\partial x}{a+bx^n+cx^{2n}}$ in der ersten Abtheilung, welche man nur dann unmittelbar in den Tafeln findet, wenn m und n keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so dass z. B. $\int \frac{x\partial x}{a+bx^4}$ in der Form $\frac{1}{2}\int \frac{\partial y}{a+by^2}$, $\int \frac{\partial x}{x(a+bx^4)}$ in der Form $\frac{1}{4}\int \frac{\partial y}{y(a+by)}$ u. s. w. gefunden wird. Durch diese Unterscheidung werden viele störende Wiederholungen vermieden.

4. Mehrere Tafeln über bestimmte Integrale und andere wichtige, erst in neuester Zeit entstandene oder verbreitete, analytische Entwicklungen sind in der vierten und fünften Abtheilung hinzugefügt worden. Hier konnten auch die Beweise der Formeln nicht, wie in den andern Abtheilungen — wo sie nämlich durch Differentiation der Integrale sich von selbst ergeben — übergangen werden; doch sind sie möglichst kurz gefasst worden, um die tabellarische Form, so weit es anging, auch hier zu bewahren.

An verschiedenen Stellen sind die den trigonometrischen nachgebildeten hyperbolischen Functionen gebraucht worden, nämlich der hyperbolische Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens von x, bezeichnet durch $\mathfrak{Sin}\,x$, $\mathfrak{Cos}\,x$, $\mathfrak{Tang}\,x$, $\mathfrak{Cotang}\,x$. Man hat bekanntlich

$$\mathfrak{Cos}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \mathfrak{Sin}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \mathfrak{Tang}\,x = \frac{\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Cos}\,x},$$

$$\mathfrak{Cotang}\,x = \frac{\mathfrak{Cos}\,x}{\mathfrak{Sin}\,x}.$$

Ferner $\mathfrak{Arcus}\ (\mathfrak{Sin} = x)$ oder $\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Sin}\,x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$

$$= \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{x^2+1}},\ \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Cos}\,x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$$

$$= \int_1^x \frac{\partial x}{\sqrt{x^2-1}},\ \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\,x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \int_0^x \frac{\partial x}{1-x^2}.$$

$$\text{Arc Cotang}\, x = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} = \int_x^\infty \frac{\partial x}{x^2-1}.$$

Die sonstigen Bezeichnungen sind die allgemein üblichen.

In allen diesen Punkten sind wir mit dem Herrn Herausgeber vollkommen einverstanden, und glauben auch, dass er bei der Mittheilung verschiedener neuer Entdeckungen und Entwicklungen, durch welche die Integralrechnung in neuester Zeit allerdings sehr erweitert und bereichert worden ist, meistens das für den vorliegenden Zweck richtige Maass getroffen hat, wie z. B. in der fünften und letzten Abtheilung bei den Elliptischen Functionen, wo er sich seiner eigenen Angabe nach hauptsächlich an Legendre: Traité des fonctions elliptiques. Tome I. Paris, 1825. gehalten hat, wenn freilich auch die Tafel den gegenwärtigen Zustand dieser wichtigen Lehre nicht vollständig darstellt, was aber auch nicht möglich gewesen sein würde, ohne dem Buche einen ganz ungebührlichen Umfang geben zu müssen, weshalb wir, wie schon erinnert, rücksichtlich des hier mit Umsicht inne gehaltenen Maasses ganz mit dem Herrn Vf. übereinstimmen. Dasselbe gilt von den Gammafunctionen, dem Integrallogarithmus, den Euler'schen Integralen und anderen keinem, wer mit den neueren Fortschritten der Integralrechnung vollständig vertraut ist, unbekannten bestimmten Integralen, wobei wir jedoch im Interesse der Wissenschaft an sich den Wunsch nicht unterdrücken können, dass es einmal dem Herrn Vf. oder einem andern mit den neueren Fortschritten der Integralrechnung vollständig vertrauten Gelehrten gefallen möchte, ein zweckmässig geordnetes vollständiges Verzeichniss aller bis jetzt gefundenen bestimmten Integrale, also mit anderen Worten eine besondere Tafel der bestimmten Integrale zu liefern, mit einer kurzen Nachweisung der Quellen, wo sich dieselben entwickelt finden; so viele Schwierigkeiten eine solche Arbeit auf der einen Seite haben dürfte, so nützlich würde sie auf der andern sein. In der vorliegenden Tafel scheint uns indess, ohne dieselbe rücksichtlich ihres Zweckes ungebührlich ausdehnen zu müssen, auch für die bestimmten Integrale hinreichend gesorgt zu sein.

Zum Schlusse wollen wir nun bloss noch bemerken, dass wir allerdings in einer Beziehung noch eine Vervollständigung der vorliegenden Tafeln gewünscht hätten, die denselben auch ohne zu grosse räumliche Ausdehnung derselben leicht hätte gegeben werden können, und nach unserer Meinung auch namentlich dem auf dem Titel angegebenen speciellen Zwecke dieser Tafeln sehr förderlich gewesen sein würde. Man weiss nämlich, wie ungemein wichtig für alle Anwendungen der Integralrechnung die Methoden zur näherungsweisen Ermittelung bestimmter Integrale sind. Fassen wir z. B. nur einen für Deutschland gerade gegenwärtig überaus wichtigen Gegenstand, die Schiffsbaukunst und das Schiffsmanoeuvre, in's Auge, so finden die genannten Methoden z. B. bei der Bestimmung des cubischen Inhalts der Schiffe, der Schiffsaichung, der Bestimmung des Wasserpasses, bei der Ermittelung des Schwerpunkts, der so höchst wichtigen Stabilität der Schiffe, ihrer Trägheitsmomente Behufs des Schwankens und Stampfens

der Schiffe (roulis et tangages), selbst auch des Widerstandes u. s. w. die wichtigste Anwendung, und überhaupt in keinen Theil der Schiffsbaukunst ist eine gehörig wissenschaftlich begründete Einsicht möglich, ohne eine vollständige Kenntniss der zur Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale erforderlichen Methoden zu besitzen. Wenn sich nun auch freilch von diesen Methoden gewissermassen dasselbe sagen lässt, was oben von den Methoden zur Zerlegung der gebrochenen Functionen in einfache Brüche und von den Reductionsformeln gesagt worden ist, so hätten wir doch gewünscht, dass wegen ihrer so überaus grossen Wichtigkeit für alle Anwendungen der Integralrechnung:

1. den Formeln und numerischen Coefficienten von Cotes (Aestimatio errorum in mixta mathesi etc. auctore Rogero Cotes. Lemgoviae. 1768. 8. p. 86. in der besonderen Abhandlung: De methodo differentiali Newtoniana.);

2. den mit diesen Cotesischen Formeln in naher Beziehung stehenden, nach unserer Meinung eben so wichtigen Correctionsformeln und numerischen Coefficienten von Stirling (Methodus differentialis: sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. Londini. 1739. pag. 146.);

und endlich

3. den berühmten Formeln und numerischen Coefficienten von Gauss (Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi in den Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. III. Gottingae. 1816. pag. 39.), welche als eine höchst wichtige Erweiterung der Cotesischen Formeln zu betrachten sind;

eine besondere Tafel gewidmet, und die Art der Anwendung dieser Formeln kurz erklärt und etwa durch ein Paar Beispiele erläutert worden wäre, wodurch gewiss der sehr zu wünschenden Einführung dieser Formeln in die verschiedenen Zweige der Praxis wesentlicher Vorschub geleistet worden wäre; auch würde eine kurze Hindeutung auf die, als ganz specielle Fälle der obigen Formeln zu betrachtenden Formeln von Simpson oder Chapman, die schon in der Praxis allgemein Eingang gefunden haben, ohne zu vielen Raum in Anspruch zu nehmen, zu geben leicht möglich gewesen sein. Vielleicht entschliesst sich der Herr Verfasser, seine Tafel durch eine kleine, in gleichem Format gedruckte Tafel aller dieser Formeln noch zu vervollständigen, die dann jeder Besitzer des vorliegenden Buchs demselben leicht noch anbinden lassen kann.

Wir schliessen mit der bestimmten Hoffnung, dass das vorliegende Buch, welches einem wesentlichen Bedürfnisse auf zweckmässige Weise abhilft, viele Käufer und eine weite Verbreitung, die es in der That auch vollkommen verdient, finden wird. Der Druck und überhaupt die äussere Ausstattung ist sehr schön, und die Zahl der S. V. und S. VI. angezeigten Druckfehler ist mit Rücksicht auf die Schwierigkeit des Drucks nicht gross.

Programm des Herzoglichen Realgymnasiums zu Gotha, herausgegeben Ostern 1849. Inhalt: ***Elementare Entwicklung der Gaussischen Methode, die Werthe begrenzter Integrale durch Näherung zu finden. Vom Professor Bretschneider.***

Der Herr Verfasser hat in dieser ausgezeichneten, eine weitere Bekanntwerdung sehr verdienenden Schulschrift eine elementare Entwickelung der berühmten Gaussischen Methode, die Werthe begrenzter Integrale zu finden (Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi in den Comm. Soc. Reg. Gott. recent. Vol. III. 1816. p. 39.) gegeben, und sich dadurch um die weitere Verbreitung dieser auch für die Praxis sehr wichtigen Methode, welche die Cotesischen Formeln unter sich begreift, ein sehr wesentliches Verdienst erworben, weil das Studium der Gaussischen Abhandlung wegen der vielen darin angewandten analytischen Kunstgriffe, die meistens ziemlich versteckt liegen, mit manchen Schwierigkeiten verknüpft ist. Auch hat der Herr Verfasser in dieser Abhandlung einen Beweis a priori gegeben, dass die Endpunkte der Abscissen von den Grenzen paarweis gleichweit entfernt sind, welcher sich in der Gaussischen Abhandlung nicht findet, und ist auch in der allgemeinen Bestimmung der Coefficienten der transformirten Gleichung Nr. 15. S. 9. seiner Schrift weiter gegangen als die Abhandlung von Gauss. Wir wünschen daher dieser sehr verdienstlichen Schrift, welche der Herr Verfasser vielleicht künftig noch einmal weiter ausarbeiten wird, eine möglichst weite Verbreitung, und namentlich auch eine Berücksichtigung von Seiten der Praktiker, die bei der näherungsweisen Bestimmung der Werthe bestimmter Integrale diese allgemeine Methode, und die in derselben liegenden speciellen Methoden häufiger als bisher anwenden sollten.

Geometrie.

In dem Programm der Realschule im Waisenhause zu **Halle** hat Herr Dr. **A. Wiegand** S. 42. — S. 48. die wichtigsten der in Prima gegebenen geometrischen und trigonometrischen Aufgaben mitgetheilt, welches jedenfalls eine sehr nachahmungswerthe Einrichtung ist, weil dadurch die verschiedenen Lehranstalten sich gegenseitig besser kennen lernen, und man auf diese Weise nach und nach eine sehr werthvolle Sammlung mathematischer Uebungsaufgaben erhalten muss, die sich zugleich dadurch besonders empfiehlt, dass die in derselben enthaltenen Aufgaben sämmtlich in der Praxis sich als Bildungsmittel wirklich bewährt haben. Dem Herrn Dr. **Wiegand** werden daher mit uns sich gewiss auch noch andere Lehrer für diese öfter zu wiederholenden Mittheilungen verpflichtet fühlen.

Astronomie.

Storia celeste del R. Osservatorio di Palermo dal 1792 al 1813. Parte seconda 1803 — 1813. Tomo settimo 1805 — 1806. Vienna 1848. 4. Auch unter dem Titel: Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von C. L. von Littrow, Director der Sternwarte und ö. Professor der Astronomie an der k. k. Universität zu Wien u. s. w. und F. Schaub, Adjunct der Sternwarte. 30ster Theil. Neuer Folge 10r Band. Enthaltend Piazzi's Beobachtungen in den Jahren 1805 und 1806. Wien. 1848. 4. (M. vergl. Literar. Ber. Nr. XLIV. S. 626.)

Wir freuen uns sehr, auch in der jetzigen, den Wissenschaften weniger günstigen Zeit wieder eine Fortsetzung dieses mühsamen, aber für die Wissenschaft wichtigen Werks anzeigen zu können, und wünschen dem trefflichen Herrn Herausgeber von Herzen, dass es ihm gelingen möge, dasselbe bald glücklich zu Ende zu führen, wofür ihm der Dank aller Astronomen nicht entgehen wird.

Physik.

Jahresbericht über die Fortschritte der reinen, pharmaceutischen und technischen Chemie, Mineralogie und Geologie. Unter Mitwirkung von H. Buff, E. Dieffenbach, C. Ettling, F. Knapp, H. Will, F. Zamminer herausgegeben von Justus Liebig und Hermann Kopp. Für 1847 und 1848. Erstes Heft. Giessen. 1849. 8. 1 Thlr.

Wenn auch dieser Jahresbericht, wie es seinem Titel nach scheint, hauptsächlich die Chemie in's Auge fassen dürfte, so verbreitet er sich doch auch, wie schon das vorliegende erste Heft deutlich zeigt, sehr ausführlich über die Fortschritte der Physik in dem auf dem Titel angegebenen Zeitraume, und derselbe darf daher in diesem Literarischen Berichte nicht unerwähnt bleiben. Ja wir können selbst sagen, dass er uns von allen derartigen Büchern, die uns bis jetzt zu Gesicht gekommen sind, so viel Verdienstliches dieselben auch übrigens haben mögen, insbesondere auch seiner grossen Vollständigkeit, und der Umsicht halber, mit welcher er augenfällig gearbeitet ist, am besten gefallen hat, weshalb wir ihn allen Lesern des Archivs ganz besonders empfehlen. Von unserm wissenschaftlichen Standpunkte aus geschieht dies auch hauptsächlich noch deshalb, weil er viel

mehr als irgend ein anderes Buch dieser Art die mathematische Seite der Physik mit grosser Umsicht berücksichtigt, und die Resultate der mathematischen Untersuchungen oder der mit Hülfe des Calculs geführten Experimentaluntersuchungen so weit mittheilt, dass man eine deutliche Einsicht in deren eigentlichen Zweck erhält, und, wenn man es Behufs irgend einer vorhabenden Untersuchung für nöthig finden sollte, immer leicht zu den ursprünglichen Quellen zurückzugehen im Stande ist. Wir sprechen es daher mit voller Zuversicht aus, dass wir diesen Jahresbericht namentlich für jeden mathematischen Physiker für ein unentbehrliches Hülfsmittel, und bei Weitem für das zweckmässigste Buch dieser Art halten, was bis jetzt existirt; dies hier zu bemerken, war um so mehr nöthig, weil der Titel des Buchs leicht gerade zu der entgegengesetzten Ansicht — dass nämlich die mathematische Seite der Physik wenig Beachtung in demselben gefunden habe — verleiten könnte. Die mathematische Physik wird und muss es den geehrten und verdienten Herren Herausgebern ganz besonders Dank wissen, dass sie sich ihrer so sorgfältig, und bei Weitem mehr als alle bisherigen Herausgeber ähnlicher Bücher, angenommen haben. Wir sehen daher auch den folgenden Heften, für welche z. B. noch der grösste Theil der mathematischen Optik zurück ist, mit grossem Verlangen entgegen, und wünschen sehr, dass dieselben recht bald erscheinen mögen. Um unser vorhergehendes Urtheil zu bestätigen, wollen wir namentlich für Leser im Auslande, denen das Buch nicht selbst sogleich durch den Buchhandel in die Hände kommt, den Inhalt des vorliegenden Hefts vollständig angeben: „M o l e c u l a r w i r k u n g e n. Abhängigkeit der Cohäsion der Flüssigkeiten und der Capillaritätshöhe von der Temperatur. Veränderung der Form der Oberfläche von Flüssigkeiten durch andere. Capillarsenkung des Quecksilbers. Endosmose. — A t o m l e h r e. Krystallisation. Krystallographie. Beziehungen zwischen Zusammensetzung und Krystallform; Isomorphismus, Dimorphismus. Specifisches Gewicht; Bestimmung desselben bei festen Körpern, Flüssigkeiten und Gasen. Beziehungen zwischen Zusammensetzung und spec. Gewicht. — Spec. Volum. — W ä r m e l e h r e. Wärmequellen; Wärmeentwickelung bei chemischen Verbindungen. Mechanisches Aequivalent der Wärme. Ausdehnung durch die Wärme. Specifische Wärme; Schmelzen, latente Schmelzwärme. Sieden; latente Dampfwärme. Beziehungen zwischen chemischer Zusammensetzung und Siedepunkt. Spannkraft der Dämpfe; Thaubildung; hygrometrische Apparate. Wärmeleitung. Wärmestrahlung. — B e w e g u n g s l e h r e. Ueber Kräfte im Allgemeinen. Gleichgewicht starrer Körper, Elasticität und Festigkeit. Gleichgewicht tropfbarer Flüssigkeiten; Zusammendrückbarkeit derselben. Gleichgewicht gasförmiger Flüssigkeiten; Zusammendrückbarkeit derselben. Allgemeine Bewegungslehre. Bewegung starrer Körper. Bewegung tropfbar flüssiger Körper. Bewegung gasförmiger Körper. Dynamik der Erde. Theorie der Maschinen. Apparate. — A k u s t i k. Schallgeschwindigkeit. Tonschwingungen von Stäben und Saiten. Töne durch den electrischen Strom veranlasst. Physiologische Akustik. Apparate. — O p t i k. Lichtquellen. Theorie des Lichtes. Gradlinige Fortpflanzung des Lichtes; Aberration, Interferenz, Beugung. Zurückwerfung des Lichtes; Polarisation. New'tonsche Farbenringe. Iri-

siren. Einfache Brechung des Lichtes. Farbenzerstreuung. Natürliche Farben. Doppelte Brechung; Polarisation durch doppelte Brechung. Optik der Atmosphäre. Optische Apparate. Physiologische Optik, Bau und optische Eigenschaften des Auges. Gesichtsfehler. Theorie des Sehens. Subjective Farben. Optische Täuschungen. Chemische Wirkungen des Lichtes. Chemische Wirkungen der verschiedenen Farbenstrahlen. —

Wir wünschen schliesslich nochmals recht sehr, dass dieses verdienstliche Unternehmen einen ungehinderten und schnellen Fortgang haben möge, und empfehlen es namentlich auch allen denen, welchen keine grössere Bibliothek zu Gebote steht, folglich insbesondere auch Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten jeder Art.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Literar. Ber. Nr. XLVIII. S. 676.).

Fünftes Heft. S. 6. Haidinger: Ueber die Ursachen der Erscheinung der Polarisationsbüschel. — S. 53. Koller: Nachricht über das am 18. October in Kremsmünster gesehene Nordlicht. — S. 55. Kreil: Bestimmung einiger Längenunterschiede mittelst des elektrischen Telegraphen. — S. 69. Burg: Ueber die am 27. Juli l. J. auf der Kaiser Ferdinands-Nordbahn Statt gefundene Explosion der Locomotive „Jason". — S. 103. Schönbichlers Multiplicationsregister. — S. 133. Reslhuber: Beobachtungen während der Nordlichter am 18. October und 17. November 1843 auf der Sternwarte zu Kremsmünster.

Jahrgang 1849. Jänner-Heft. S. 8. Schrötter: Ueber Wagen des Mechanikers Kusche. Eine Wage dieses Künstlers, welche nur 34. Fl. C.-M. kostet, zeigt bei einer Belastung von Einem Pfund auf jeder Schale noch fünf Milligramme deutlich an. — S. 16. Gintl: Antrag zur Hilfeleistung bei der Einrichtung der meteorologischen Observatorien. — S. 28. Baumgartner: Vorschlag zur Veranlassung einer Telegraphenlinie zwischen Klosterneuburg und Wien. — S. 29. Kreil: Entwurf eines meteorologischen Beobachtungssystems für die österreichische Monarchie. III Abschnitt.

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. Edited by W. Thomson, M. A. F. R. S. E. Vergl. Literar. Bericht Nr. XLVIII. S. 675.

No. XX. Mathematical Note. Continued. — On Symbolical Geometry. Continued. By Sir William Rowan Hamilton. — On the Triple Tangent Planes of Surfaces of the Third Order. By Arthur Cayley. — On the Order of certain Systems of Algebraical Equations. By Arthur Cayley. — On a Point in the Solution of Linear Differential Equations. By Augustus De Morgan. — On the Relation between Different Curves and Cones connected with a Series of Confocal Ellipsoids. By John Y. Rutledge. — On the Focal Generation of Surfaces on the Second Order. By the Rev. Wm. A. Willock. — Exercices in Quaternions. By Sir William Rowan Hamilton. — On the Equilibrium of a Floating Body. By Richard Townsend. — On the Cone Circumscribing a Surface of the mth Order. By the Rew. George Salmon. — On Geodesic Lines traced on an Surface of the Second Degree. By Andrew S. Hart. — On Attractions, and on Clairaut's Theorem. By G. G. Stokes. — No. XXI. will be published on the 1st of November, 1849.

L.

Literarischer Bericht.

(Die interessanten Mittheilungen aus Johann Bernoulli's eignen Aufzeichnungen über sein Leben haben in dieser Nummer des Literarischen Berichts so viel Raum eingenommen, dass verschiedene erschienene, zum Theil wichtige Schriften haben für's Erste noch zurückgelegt werden müssen; in der nächsten Nummer des Liter. Berichts werden aber alle diese Schriften angezeigt werden).

Arithmetik.

Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von Navier, Mitglied der Akademie, Professor an der polytechnischen Schule zu Paris etc. Mit Zusätzen von Liouville. Deutsch herausgegeben, und mit einer Abhandlung der Methode der kleinsten Quadrate begleitet von Dr. Theodor Wittstein. Zweiter Band. Hannover. 1849. 8. $1\frac{5}{6}$ Thlr.

Wir freuen uns, das Erscheinen des zweiten Theils dieser vorzüglichen Uebersetzung des Résumé des leçons d'Analyse données à l'école polytechnique par M. Navier. Paris. 1840. 1841. anzeigen zu können, welchem ganz dasselbe zur Empfehlung dient, was im Liter. Ber., Nr. XLII. S. 600. von dem ersten Theile gesagt worden ist. Die Zusätze haben folgende Ueberschriften: I. der Rest der Taylor'schen und der Maclaurinschen Reihe. II. Brüche, welche unter die Form $\frac{\infty}{\infty}$ fallen. III. Die Euler'schen Integrale. IV. Angenäherte Berechnung des Produkts $1.2.3.4....x$, wenn x sehr gross ist. V. Anwendung der Theorie der doppelten Integrale auf den Beweis eines Lehrsatzes der Algebra. (Es ist dies nämlich der berühmte dritte Beweis

des Fundamentaltheorems der Theorie der algebraischen Gleichungen von Gauss in den Comm. soc. scientiar. Gottingensis recentior. Tom. III.). VI. Integration einer gewissen Gattung von Differentialgleichungen. Endlich: Die Methode der kleinsten Quadrate von dem Herrn Uebersetzer, bei deren Darstellung, was hauptsächlich die theoretischen Grundlagen betrifft, der Herr Uebersetzer sich vorzugsweise an die Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Hagen. 1837. gehalten hat, wobei aber doch die ganze Arbeit als eine eigenthümliche Arbeit des Herrn Uebersetzers zu betrachten ist. Die Darstellung dieser für die praktische Anwendung so wichtigen Lehre ist sehr deutlich, und verleiht dem Buche, welches vorzüglich bestimmt ist, um auf einer praktischen Lehranstalt als Grundlage für die Vorlesungen gebraucht zu werden, ausser seinen sonstigen Vorzügen noch einen besonderen Werth. Ueberhaupt hat der mit den neueren Fortschritten der Analysis und ihrer strengeren Begründung, die leider immer noch manche aus einer nicht vollständigen Kenntniss, oft aber auch aus völliger Unkenntniss der Sache hervorgegangene Widersprüche von Leuten, die den alten Schlendrian lieben, erfahren muss, vollständig vertraute Herr Uebersetzer Alles geleistet, was man von einer solchen Arbeit billigerweise verlangen kann; und diese Uebersetzung wird daher auch das Ihrige zu der sehr zu wünschenden immer allgemeinern Verbreitung der neuern Behandlungsweise der Analysis jedenfalls beitragen.

Lehr- und Handbuch der Algebra, verfasst für den Unterricht an der k. k. Ingenieurs-Akademie in Wien, gleichzeitig für das Selbststudium eingerichtet. Von Dr. Alexander Morgante. Wien 1849. 8. 1 Thlr. 15 Sgr.

Ein deutliches Lehrbuch mit recht vielen zweckmässigen Uebungsaufgaben, das seinem Zwecke wohl entsprechen wird.

Physik.

Physikalisches Lexicon. Encyklopädie der Physik und ihrer Hülfswissenschaften: der Technologie, Chemie, Meteorologie, Geographie, Geologie, Astronomie, Physiologie etc. nach dem Grade ihrer Verwandtschaft mit der Physik. Zweite Auflage. Von Oswald Marbach. Erste Lieferung. Leipzig 1849. 8.

Wir dürfen dieses Werk als aus seiner ersten Auflage hinreichend bekannt voraussetzen, und begnügen uns daher zu bemerken, dass diese neue Auflage mehr als eine solche, nämlich

als eine völlige Umarbeitung der ersten Auflage zu betrachten ist, wobei der Herr Verfasser das Werk einem streng wissenschaftlichen Standpunkte noch näher als in der ersten Auflage zu führen beabsichtigt, und daher in dem Vorworte den Namen eines „populären Werks“ — diesen Ausdruck in der meistens gewöhnlichen Bedeutung genommen — zurückweist. So viel sich nach der ersten Lieferung urtheilen lässt, scheint die Bearbeitung der einzelnen Artikel, wenn auch in Rücksicht auf Ausführlichkeit etwas ungleich, für alle diejenigen, denen das grosse Gehler'sche Wörterbuch entweder, namentlich rücksichtlich der Anwendung der Mathematik, zu weit geht, oder zu theuer ist, ganz zweckmässig zu sein, worüber sich jedoch erst sicherer urtheilen lassen wird, wenn eine grössere Anzahl von Lieferungen vorliegt.

Die periodischen Sternschnuppen und die Resultate ihrer Erscheinungen, abgeleitet aus den während der letzten 10 Jahre zu Aachen angestellten Beobachtungen, von E. Heis, Oberlehrer der Mathematik, Physik und Chemie an der kombinirten höheren Bürger- und Provinzial-Gewerbschule zu Aachen. Cöln 1849. 4. 10 Sgr.

Eine sehr lesenswerthe Schrift, welche ausser ihrem auf dem Titel angegebenen Hauptinhalte auch lehrreiche Betrachtungen über Sternschnuppen im Allgemeinen, namentlich über die periodischen, und eine ziemlich ausführliche und sehr deutliche Darstellung der von dem Herrn Verfasser befolgten Methode zur Beobachtung der Sternschnuppen, Aufsuchung ihrer Richtung und ihres Ausgangspunktes, und zur Bestimmung der wahren Bahn der Sternschnuppen aus correspondirenden Beobachtungen enthält. Insbesondere in letzterer Beziehung, abgesehen von den aus den in Aachen angestellten Beobachtungen und Rechnungen gewonnenen Resultaten, die am Ende übersichtlich zusammengestellt worden sind, verdient die Schrift allen denen, die sich selbst mit Beobachtungen der Sternschnuppen zu beschäftigen gedenken, zur Beachtung recht sehr empfohlen zu werden.

Vermischte Schriften.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. Nr. 131. bis Nr. 155. (Vom 15. Juli 1848. bis 31. März 1849.)

(M. vergl. Literar. Ber. Nr. XLVIII.).

L. Schläfli, Ueber eine durch zerstreutes Licht bewirkte Interferenzerscheinung (Nr. 131. und 132.).

Derselbe, Ueber die einfachste Art, die Differentialgleichungen erster Ordnung, durch welche die Störungen der elliptischen Elemente einer Planetenbahn bestimmt sind, auszudrücken. (Nr. 131. und 132.).

M. Perty, Ueber die Entwicklung einiger Infusorien. (Nr. 133. und 134.).

R. Wolf, Nachrichten von der Sternwarte in Bern. (Neue Gestaltung der Sternwarte). (Nr. 135.).

Derselbe, Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz.

Dieser sehr werthvolle Aufsatz enthält Bruchstücke aus einer Lebensbeschreibung Johann I Bernoulli's, die Johann Bernoulli selbst aufgesetzt hat. Diesen Lebensabriss theilen wir im Folgenden vollständig mit, da er jedenfalls für die Geschichte der Mathematik von Wichtigkeit ist. Sollte Herr R. Wolf noch mehrere dergleichen Bruchstücke auffinden, so würde er durch deren Mittheilung die Mathematiker sich gewiss in hohem Grade verbinden.

Erinnerungen an Johann I Bernoulli aus Basel.

Von Herrn R. Wolf in Bern.

Bereits sind 100 Jahre seit dem Tode Johann I Bernoulli verflossen; aber noch immer lebt der Name dieses Mannes, den seine Zeitgenossen als ihren Archimedes verehrten, der während mehr als 50 Jahren die Hauptstütze mathematischer Bildung und Forschung war, — der Euler, Varignon, Daniel Bernoulli, Hospital, Haller, Maupertuis, König, Kramer, Joh. Gessner etc. zu Schülern hatte, im Andenken jedes Gebildeten, dem die Mathematik und ihre Anwendungen nicht völlig fremd sind, fort, und die Veröffentlichung folgender Bruchstücke einer von Johann I Bernoulli selbst planirten Lebensbeschreibung, welche ich unlängst aus Basel erhalten konnte, darf sich somit wohl einigen Beifall versprechen:

„Je naquis à Bâle le 27. Juillet v. St. 1667, étant le „10me enfant de mon père Nicolas Bernoulli et de ma mère „Marguérite Schönauer, qui se sont donné tout le soin de „me bien élever, tant dans la réligion que dans les bonnes „moeurs. Si je n'en ai pas bien profité, ce n'est pas leur „faute mais la mienne."

Nachdem er die öffentlichen Schulen seiner Vaterstadt besucht hatte, wurde er nach Neuenburg geschickt, um den Handel und die französische Sprache zu erlernen:

„Mais Dieu, qui m'avait destiné à un autre genre de „vie, me fit retourner dans la patrie au bout d'un an pour y „continuer les études des belles lettres et des sciences. L'an „1685 je fus créé *Magister* ou docteur en philosophie, après „avoir reçu un an et demi auparavant le degré de Bachelier; „ce fut pendant ce temps qu'à l'imitation et l'inclination de „feu mon frère Jaques Bernoulli, je commençai à m'appliquer

„à l'étude des mathematiques: le plaisir singulier que je sen-
„tais dans cette belle et divine science m'y fit faire des pro-
„grès avec une rapidité incroyable. Car en moins de deux
„ans non seulement je m'étais rendu familier presque touts
„les anciens auteurs qui ont écrit sur les mathématiques, mais
„aussi les modernes, comme la géométrie de Descartes et son
„algèbre avec ses commentaires. Après ces commencemens,
„par un hazard imprévu nous tombâmes conjointement mon
„frère et moi sur un petit écrit de Mr. Leibnitz inséré dans
„les actes de Leipzic de 1684, où en 5 ou 6 pages seule-
„ment il donne une idée fort légère du *calcul différentiel*,
„ce qui était une énigme plutôt qu'une explication; mais c'en
„était assez pour nous, pour en approfondir en peu de jours
„tout le secret, témoin quantité de pièces que nous publiâ-
„mes ensuite sur le sujet des infiniment petits. Après cette
„heureuse découverte, je fus le premier, qui songeait à in-
„venter quelque méthode pour remonter des quantités infini-
„ment petites aux finies dont celles-là sont les élémens ou
„les différences. Je donnai à cette méthode le nom de *cal-
„cul intégral*, n'en ayant point trouvé alors de plus conve-
„nable. Je voyais bien, qu'il était impossible de trouver une
„telle méthode qui fut absolument générale, je ne laissai pour-
„tant pas de réduire ce calcul à des règles générales pour
„certaines circonstances. Quand je les communiquais à mon
„frère il eut d'abord de la peine a les admettre, mais après y
„avoir réfléchi plus mûrement il y prit du gout et s'en servit
„utilement pour résoudre quelques problèmes. Pour l'y animer
„d'avantage je lui proposai plusieurs problèmes physico-mé-
„caniques, entre autre celui de la chainette, qui est de dé-
„terminer la propriété de la courbure d'une chaîne lâche sus-
„pendue par les deux bouts; mais comme il ne put y réussir,
„pendant que je l'avais résolu pleinement, je l'engageai à pro-
„poser aux géomètres ce problème dans les Actes de Leip-
„zic, où après un temps considérable il ne parut que trois
„solutions (conformes au fond entre elles) savoir celle de Mr.
„Leibnitz, celle de Mr. Huguens et la mienne; voir les actes
„de Leipzic de 1691." —

Gegen Ende 1690 ging er nach Genf, wo er sich etwa 8 Monate aufhielt und unter Andern Christoph Fatio, einem ältern Bruder des ihm später in dem Leibnitz-Newton'schen Wettkampfe gegenüberstehenden Niklaus Fatio, Unterricht in den neuen Rechnungsmethoden gab.

„Vers le commencement de l'automne 1691 je quittai
„Genève pour aller en France; après avoir passé par Lyon
„et quelques autres villes considérables j'arrivai à Paris; le
„séjour de cette capitale devint bien plus long que je ne m'é-
„tais proposé, ce que je dois attribuer non seulement aux
„agrémens avec lesquels on y passe son temps; mais sur-
„tout à la multitude de connaissances que j'eus occassion de
„faire avec les plus illustres savants de cette grande ville.
„La première chose que je fis pour cela ce fut de m'adresser
„au *P. Mallebranche* chez les P. P. de l'oratoire, qui ayant
„appris mon nom me reçut avec un accueil des plus tendres.

„Par son moyen je me fis bientôt connaitre des personnes les „plus distingués dans les sciences. Car m'ayant marqué qu'à „un certain jour de la semaine il y avait chez lui assemblée „de gens savants en toute sorte de sciences, et me priant „d'y venir aussi autant de fois qu'il me plairait, je ne man-„quai pas de profiter de cette invitation. La première fois „que j'y fus, j'eus le bonheur d'y trouver Mr. le Mq. de „*l'Hospital*, qui passait alors pour un des premiers mathéma-„ciens du royaume. Mais comme en ce temps-la toute la ma-„thématique en France se bornait à l'astronomie, la géomé-„trie et l'algèbre ordinaire, tellement qu'à peine on avait oui „parler de nos nouveaux calculs, on peut bien s'imaginer, „que dans la première conversation avec Mr. de l'Hopital il „fut étrangement surpris de voir la facilité avec laquelle je „resolvais sur le champ, comme en jouant, certains problè-„mes qu'il m'avait proposé et qu'il avouait être insolûble pour „l'algèbre commune. Après deux ou trois entretiens que nous „eumes ensuite chez le P. Mallebranche je le mis totalement „dans le goût de nos nouvelles méthodes; il ne fallait que lui „en ouvrir la route et le mettre au fait, afin de savoir les „règles pour pouvoir s'en servir lui-même: Il vint donc chez „moi me prendre dans son carrosse, pour aller chez lui, où „je commençai à lui expliquer les principes du calcul différen-„tiel; mais non content de mes leçons données de vive voix, „craignant, disait-il de les oublier, il me pria de les lui com-„muniquer par écrit. Je me prêtai par complaisance à son „désir, ne prévoyant pas le dessein qu'il aurait de les pu-„blier un jour.*) Ainsi je lui apportai tous les deux jours „une leçon écrite de ma main en latin, sur une feuille de 4 „pages in 4° chacune. J'avais cependant la prévoyance de „les faire copier par un ami qui logeait avec moi, avant de „porter les originaux à Mr. le M. de l'Hopital. L'été sui-„vant il partit avec Madame son épouse pour se rendre dans „une des ses seigneuries nommé Ougues près de Blois; il „me pressa de lui tenir compagnie ce que je fis quoique avec „quelque répugnance. Les 3 ou 4 mois que nous y séjour-„names, furent employés à le fortifier dans l'usage des nou-„veaux calculs pour résoudre toutes sortes de problèmes „physico-mathèmatiques. Ce fut là où je lui enseignai une „troisième espèce de calcul *exponentiel* ou *parcourant*, qui

---

*) Die hier berührte Schrift ist die bekannte Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes, welche zuerst 1696 ohne den Namen des Verfassers, dann 1715 unter dem Namen von Hospital erschien. Hospital anerkennt nun zwar in der Vorrede, dass er den Bernoulli's viel schulde, indem er sagt: „Au reste je reconnais devoir beaucoup aux lumières de Mss. Bernoulli, surtout à celle du jeune présentement professeur à Groningue. Je me suis servi sans façon de leurs découvertes et de celles de Mr. Leibnitz. C'est pourquoi je consens qu'ils en revendiquent tout ce qu'il leur plaira, me contentant de ce qu'ils voudront bien me laisser." Dagegen schweigt er von dem Verhältnisse, in dem er gerade in Beziehung auf den Gehalt seines Buches zu Johann I Bernoulli als Schüler zum Lehrer stand, gänzlich, und diess lässt sich nicht entschuldigen, und musste Bernoulli kränken.

„traite des quantités, dans les exposants desquelles entrent „des indéterminées ou des variables; j'avais appelé *parcou-„rants* les équations qui contenaient ces sortes de quantités, „parcequ'elles parcourent pour ainsi dire toutes les dimen-„sions possibles. J'ai publié les principes de ce dernier cal-„cul dans les actes de Leipzic 1692. Pendant que nous étions „à Ougues, nous reçumes une visite du *P. Charles Reyneau*, „prêtre de l'oratoire et professeur des mathématiques à An-„gers; je m'aperçus d'abord qu'il vint exprès pour se procu-„rer par mon aide quelque ouverture à pénétrer dans nos nou-„veaux calculs, car le bruit s'en était déjà assez repandu „pour en avoir oui parler. Comme je ne suis point mysté-„rieux, je lui communiquai autant qu'il était possible pour le „peu de temps que ce père resta avec nous (peut-être plus „que Mr. de l'Hopital ne voulait). Enfin Reyneau crût avoir „assez appris de moi pour en parler en maître comme il fit „dans la seconde partie d'un gros livre sous le titre d'*Ana-„lyse démontrée* publié l'an 1708. Il est vrai que dans la „preface il parle honorablement de mon frère et de moi; mais „seulement en passant, comme s'il ne m'avait jamais vu ni „connu. Lorsqu'il donne des solutions qui sont de moi et „qu'il ne comprenait pas bien, ils les estropiait misérable-„ment en voulant les débiter pour les siennes; en un mot il „a fait voir par ses paralogismes, qu'il a voulu voler plus „haut que ses ailes ne le portaient. — Nous retournâmes à „Paris; j'y fis de nouvelles connaisances en fréquentant assi-„dument les savants académiciens, et en particulier ceux qui „demeuraient dans l'observatoire, Mr. *Cassini* et Mr. *De la „Hire*, trés habiles astronomes et observateurs; celui avec „qui je fis la plus étroite liaison c'était Mr. *Varignon* très „bon géomètre et analyste, qui m'honora ensuite d'un com-„merce de lettres jusqu'à à sa mort, témoin une infinité de „lettres, où il me marquait souvent combien il m'était rede-„vable de ce qu'il avait appris de moi dans la sublime géo-„métrie, dont il me faisait de très sincères aveux."

Nach dem Wunsche der Seinigen kehrte Bernoulli im November 1692 nach Basel zurück, graduirte in der Medicin und nahm 1695, nachdem er mehrere andere Berufungen ausgeschlagen hatte, die mathematische Professur in Gröningen an. Dort lehrte und schrieb er mit immer wachsendem Rufe, bis er 1705, als eben Utrecht und Leyden alles anwandten um ihn von Gröningen wegzuziehen, sich zu einem Besuche in Basel entschloss. Auf der Reise traf ihn die Nachricht von dem Tode seines Bruders Jakob, und als er in Basel anlangte, wurde er auf die ehrenvollste Weise dazu bestimmt, dessen Nachfolger zu werden.

„Tout le sénat académique vint en corps se présenter „devant moi pour m'offrir la chaire de mathématiques vacante „par le décès de mon frère, contre la pratique ordinaire qui „est ici en usage et qui veut que les prétendants à des char-„ges de professeurs soutiennent publiquement des thèses à „disputer. Mais ce qui acheva de me déterminer en faveur de „notre université le dit sénat académique intercéda auprès du „conseil souverain pour le disposer à augmenter l'appointe-

„ment ordinaire ce qui fut accordé sans hésitation par une „addition personnelle, dont j'aurais à jouir pendant que je „serais professeur de mathématiques. Cette gracieuse dé-„marche plus que l'utile m'ayant fait abandonner le penchant „pour Utrecht et Leyde, je le fis savoir par une lettre à Mr. „Burmann. Mon inauguration se fit le 17 novembre 1705 par „un discours *De Fatis Novae Analyseos et Geometriae subli-„mioris*, où il y eut un grand concours de monde. Dans la „suite j'ai continué mes leçons publiques et privées avec un „bon succès, ce que je fais encore. J'ai attiré des étrangers „des différents pays de l'Europe non seulement de jeunes „étudiants, mais des personnes de distinction, même des pro-„fesseurs, des docteurs, des académiciens, qui étaient venu „de loin, de Suède, d'Angletterre, de France, d'Italie, de „Suisse et du fond de l'Allemagne, chacun souhaitant de pro-„fiter de mes lumières pour se perfectionner dans les subli-„mes analyses; je ne sache aucun qui ne soit reparti de Bâle „très content de mes leçons."

Spätere Berufungen nach Leyden, Padua etc. ablehnend, lebte Bernoulli mit fast ungeschwächter Geistes- und Körperkraft sofort ruhig in Basel seiner Lieblingswissenschaft bis ins hohe Alter. Der 1 Januar 1748 war sein Todestag. Bernoullis Selbsturtheil über seine wissenschaftliche Thätigkeit mag zum Schlusse nachfolgen:

„Pour en revenir maintenant à mes travaux: comme j'a-„vais dès mon bas âge une violente inclination pour les Ma-„thématiques et pour toutes les sciences qui en ont besoin, „mon étude favorite était toujours de les perfectionner et de „faire de nouvelles découvertes. Avec cet esprit d'inventer „j'ai produit au jour quantité de pièces et de petits traités sur „toutes sortes de matière qui dans le temps de leur pro-„duction étaient tout autant d'originaux: comme on imprime „actuellement chez Michel Bousquet à Lausanne touts mes „ouvrages ensemble avec grand nombre d'anecdotes qui n'ont „pas encore vu le jour, je n'en dis plus rien afin d'en laisser „juger au public. Cette assiduité d'écrire m'a procuré la con-„naissance de plusieurs savants du premier ordre, qui m'ont „bien voulu honorer de leur correspondence. Ceux avec qui „j'ai cemmercé le plus familièrement jusqu'à la fin de leurs „jours, c'étaient Mr. le Mq. de *l'Hospital*, Mr. *Leibnitz*, Mr. „*Varignon*, Mr. de *Montmort*, Mr. le chevalier *Renau*, Mr. „de *Tschirnhaus*, Mr. *Hermann*, Mss. les frères *Scheuchzer*, „Mr. *Michelotti* et plusieurs autres, dont les noms ne me „reviennent pas. Ce sont principalement Mr. de l'Hospital, „Varignon, de Montmort, Michelotti qui voulurent bien me „consulter comme leur oracle quand ils avaient des difficultés „sur la sublime géométrie; aussi le premier de ces Messieurs „donna rarement quelque chose au public, qu'il ne fut passé „auparavant par mes mains, témoin grand nombre de ses „lettres écrites à moi. Quant aux autres qui sont encore en „vie et connus dans le monde *savant*, qui m'ont bien voulu „honorer de leurs lettres, je n'en nommerais que quelques-„uns, savoir le fameux Mr. *Wolf*, Mr. de *Moivre*, Mr. *Bur-*

„*net*, fils de Mr. l'Evêque de Salisbury, Mr. *Craige*, Mr. „*Cheynès*, Mr. de *Fontenelle*, Mr. de *Mairan*, Mr. de *Mau-* „*pertuis*, Mr. *Clairaut*, Mr. *Poleni*, Mr. de *Crousaz*, Mr. *Cra-* „*mer*, Mr. *Euler*, Mr. *Bulffinguer*, etc. Quelques-uns de „ces Messieurs sont encore jusqu'àprésent en correspondence „avec moi. Si Mr. *Newton* eut vécu plus longtemps, je ne „doute pas qu'il n'eut voulu lier avec moi une correspondence „formelle. Lorsque en Angleterre on s'avisa de déclarer la „guerre contre Mr. Leibnitz au sujet de l'honneur de la pre- „mière invention du calcul nouveau des infiniment petits, j'y „fus enveloppé malgré moi, on me pressa de prendre parti; „après la mort de Mr. Leibnitz on s'en prit a moi seul; une „nuée d'Antagonistes anglais me tombèrent sur le corps; il „me fallait soutenir les attaques de Mss. *Keil*, *Taylor*, *Pem-* „*berton*, *Robins* et d'autres; enfin *moi seul comme le fameux* „*Coclès, je soutenais sur le pont toute l'armée anglaise.* C'est „Mr. de Fontenelle, qui en parlant de moi fait cette plaisante „comparaison; v. l'hist de l'Acad. de 1719, pag. 90. — Une „autre querelle, non point nationale, mais générale me fut „suscitée sur les forces vives des corps, à l'occassion de mon „discours sur le mouvement, où je prends la défense de la „*force vive*, qu'on pourrait nommer plus proprement le „*pouvoir* d'un corps qui est en mouvement, pour la distin- „guer de la *force morte* qu'il peut imprimer succes- „sivement à des obstacles égaux jusqu'à son entière extinction, „par où j'ai démontré que le nombre de cès obstacles sur- „montés est toujours proportionné au quarré de la vitesse „acquisse et non pas à la simple vitesse. La plupart des „plus grands géomètres, surtout ceux à qui j'ai eu l'occassion „d'expliquer de vive voix mes pensées, sont devenus autant „de Prosélytes en adoptant la doctrine des forces vives. Ce „serait en vain de vouloir convertir les autres qui s'obstin- „rent à les reconnaître par divers raisons: Quelques-uns le „font par un pur aveuglement, puisqu'ils n'ont point d'idée de „ce qu'on doit entendre par les forces vives, en le confon- „dant éternellement avec les forces mortes. Je compte dans „ce nombre Mr. l'Abbé Deidier, qui donna dans cette année „1741 une brochure, où il prétend refuter les forces vives; „mais il y raisonne comme un aveugle sur les couleurs. Quel- „ques autres remplis de préjugés aiment mieux persévérer „dans l'erreur populaire que de se donner la peine d'appro- „fondir, ou seulement d'examiner le point de la controverse. „Il y en a encore qui seraient peut-être en état de pénétrer „jusq'au fond de la verité, mais qui s'étant déclaré trop tôt „publiquement par précipitation pour l'erreur invétéré, s'ima- „ginent qu'il y va de leur réputation de chanter la palinodie. „Enfin nous savons que quelques-uns particulièrement en „Angleterre, préoccupés de passions contre tout ce qui vient „des pays étrangers, haïssent mortellement les forces vives „par cela seul que Mr. Leibnitz (leur antagoniste declaré et „condamné) les a le premier produites sur la scène. Nous „savons pourtant aussi qu'il y a en Angleterre des partisans „cachés de la nouvelle doctrine, mais qui n'aiment pas trop „lever la tête, sous peine d'Ostracisme. On ne doute pas

„que Mr. Newton lui-même ne l'eut embrassée, si dans la „vigeur de son âge, il avait eu occassion de réfléchir mûre- „ment sur l'état de la question: mais on s'appercoit nullement „qu'il y ait jamais pensé, quoiqu'on trouve quelques proposi- „tions dans les principes de la philosophie qui conduisent „immédiatement à reconnaître la nature des forces vives, „comme p. e. la prop. 39 du premier livre qui prouve si claire- „ment qu'elles sont en raison doublée des vitesses du corps „successivements acquises, qu'il n'en faudrait plus d'autres „démonstrations pour ceux qui ne veulent pas *nodum in scirpo „quaerere* suivant le proverbe. — J'ai eu outre cela de temps „en temps certains petits démèles particuliers dont je me „crois être toujours tiré avec honneur. Tel était celui qui „durait pendant quelque temps entre Mr. le chevalier *Renan* „très poli adversaire et moi sur un point de la manoeuvre „des vaisseaux. Un autre que j'avais avec Mr. *Jurin* sur un „principe hydraulique. Encore un autre avec Mr. *Brook-Tay- „lor* sur une formule différentielle de Mr. Cotes à intégrer „que celui-là avait proposé en défi à tous les mathématiciens „non Anglais. Item avec Mr. *Keil*, violent agresseur, sur „différentes matières, prétendant entre autres que je ne devais „pas publier les fautes qui j'avais découvertes dans les ouvra- „ges de Mr. Newton. De plus un anonyme Anglais, avec le- „quel j'eus de longues contestations sur les courbes trajectoi- „res réciproques; mais l'ayant enfin réduit au silence j'ai su „que mon inconnu était Mr. *Pemberton*, éditeur de la troi- „sième édition des principes de Newton avec plusieurs chan- „gemens ou plutôt falsifications. J'eus aussi à soutenir les „insultes de Mr. le C. *Ricatti* italien, sur la figure des orbi- „tes planétaires. Enfin Mr. *Herman* lui même, quoique mon „compatriote, se crut en droit de me harceler quelque fois, „et le plus souvent pendant qu'il était professeur à Francfort „sur l'Oder, mais il reconnut son tort avant que de mourir."

R. Wolf, Nachrichten von der Sternwarte in Bern (Stern-schnuppen-Beobachtungen vom 8. bis 11. August 1848. — Der Mercur-Durchgang und der November-Sternschnuppenstrom). (Nr. 138. und 139.

Derselbe, Bestimmung mittlerer Längen und Gewichte (von 80 Schülern der Realschule in Bern). (Nr. 138. und 139.).

K. v. Erlach, Meteorologische Notizen aus Meyringen. (Nr. 140 und. 141.).

C. Brunner, Sohn, Bemerkungen zu vorstehenden Mittheilungen. (Nr. 140. und 141.).

R. Wolf, Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. (Nr. 142. und 143.).

Derselbe, Nachrichten von der Sternwarte in Bern. (Sonnenfleckenbeobachtungen im Jahre 1848. — Verschiedene Beobachtungen im Jahre 1848.). (Nr. 144. und 145.).

M. Perty, Ueber vertikale Verbreitung mikroskopischer Lebensformen. (Nr. 146.—149.).

(Ein sehr lesenswerther, interessanter Aufsatz).

Lud. Eman. Schärer, Lichenum Europaeorum Genera ex utraque methodo, artificiali et naturali, digerit. (Nr. 150.—151.).

In diesen Nummern theilt Herr R. Wolf auch folgenden interessanten Brief von Fontana an Kästner über Lambert mit:

„Pavia. 11. Nov. 1773. Je viens de recevoir les ouvages allemands de Mr. Lambert. C'est un grand génie, on ne peut pas le nier; mais il se traîne, il s'appésentit un peu trop sur les matières qu'il traite; il rebute quelquefois par sa prolixité; il semble ignorer cet art plus rare encore que les talents, cet art le plus difficile de tous les arts, — l'art d'effacer. Ne lui déplaise pas la parallèle, je l'appelle le Dryden des géomètres, duquel a bien dit Pope:

The copious Dryden wanted, or forgot
The last, and greatest art, the art of blot.

Mais quoi qu'il soit de cela, il a tant de vertus que j'ai presqu'oublié les défauts, et où est l'homme qu'en soit exempt? Optimus ille est qui minimis urgitur."

B. Studer, Ueber den Bohrversuch auf Steinsalz oberhalb Windlisbach. (Nr. 152.—155.).

L. R. v. Fellenberg, Analyse der Schwefelquellen des Gurnigelbades. (Nr. 152.—155.).

C. Brunner, Ueber das gediegene Gold von S. Francisco in Californien. (Nr. 152.—155.).

Ausserdem hat Herr R. Wolf seine werthvollen Auszüge aus den Briefen an A. v. Haller in mehreren Aufsätzen wieder fleissig fortgesetzt; welche ungeheure Correspondenz muss dieser Heros geführt haben!

Mögen die obigen Auszüge von Neuem auf den in vielen Beziehungen wichtigen und interessanten Inhalt der Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern, denen wir einen ununterbrochenen und schnellen Fortgang sehr wünschen, die Leser des Archivs aufmerksam zu machen geeignet sein, welches der Hauptzweck ist, den wir durch dieselben zu erreichen suchen.

Bitte.

Die Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien hat auf den Antrag ihres berühmten Präsidenten, des Freiherrn v. Hammer-Purgstall, in der Sitzung vom 13. Mai 1848 einstimmig den Beschluss gefasst, sich aller Titulaturen oder sogenannten Prädicate bei ihrer Correspondenz völlig zu entschlagen. Auch dem Herausgeber des Archivs sind die Hoch-, Hochwohl-, Wohl-, Hochedel- und wie die Gebornen alle heissen, ganz besonders aber auch die Hochwürden, Hochehrwürden, Ehrwürden u. s. w. von jeher ein Greuel gewesen, und derselbe glaubt, dass es jetzt an der Zeit sei, unter vielen andern auch diesen schrecklich langen Zopf dem edlen deutschen Volke endlich einmal ganz abzuschneiden. Daher ergeht an alle Correspondenten des Herausgebers in Sachen des Archivs, so wie überhaupt an alle diejenigen, welche mit ihm Briefe zu wechseln irgend Gelegenheit haben und diese Zeilen zufällig zu Gesicht bekommen, die ergebenste Bitte, ihn fernerhin mit diesen nichts sagenden und völlig absurden Floskeln gefälligst gänzlich zu verschonen, wobei es sich von selbst versteht, dass der Herausgeber Gleiches mit Gleichem jederzeit und überall vergelten wird. Nur wenn möglichst vielseitig solche gegenseitige Contracte geschlossen werden, wird es möglich, dergleichen lange Zöpfe wie den betreffenden nach und nach etwas zu kürzen, bis endlich nur ein letzter Stumpf, der immer noch einzelnen leicht zu errathenden Leuten zur besondern Zierde gereichen wird, übrig bleibt. G.

LI.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Die allgemeine Umkehrung gegebener Funktionen. Eine Monographie von Dr. Oskar Schlömilch, Professor an der Universität Jena. Halle. 1849. 8.

Diejenigen unter den deutschen Mathematikern, welche noch eine vollständige Kenntniss der im Sinne Hindenburg's und seiner Schüler und Freunde bearbeiteteten combinatorischen Analysis besitzen, — gross wird ihre Anzahl schwerlich sein, und in Frankreich und England hat dieselbe nie den geringsten Eingang gefunden —, werden sich noch erinnern, dass einer der wichtigsten Angelpunkte, um die sich alle diese Untersuchungen drehten, das sogenannte Reversionsproblem war; ja man kann sagen, dass die Combinatoriker die vollständige Auflösung dieses Problems (in ihrem Sinne) als den Gipfelpunkt aller ihrer Bemühungen, als das eigentliche non plus ultra, was sie durch dieselben zu erreichen hofften und hoffen durften, betrachteten, indem ja durch die Auflösung dieses Problems natürlich auch die allgemeine analytische Auflösung der Gleichungen (im Sinne der Combinatorik) gegeben war. Wer, wie der unterzeichnete Herausgeber dieses Archivs, der in J. F. Pfaff*) hauptsächlich seinen Lehrer verehrt, recht eigentlich in der combinatorischen Analysis aufgewachsen ist, blickt jetzt mit einem gewissen wehmüthigen Gefühl auf die Zeit jener Studien zurück, indem man sich sagen muss, dass man von allen den schönen Sachen, die man damals lernte, doch niemals einen rechten Gebrauch hat machen können, ja dass man fast alles damals mit einem wahrlich nicht geringen Aufwande von Zeit und Mühe und grossem Eifer Erlernte, ich

*) Auch Thibaut's Vorlesungen über die allgemeine Arithmetik oder sogenannte Analysis des Endlichen, die der Herausgeber des Archivs ebenfalls gehört hat, waren eigentlich nur combinatorischer Natur.

will nicht gerade sagen, hat wieder vergessen, aber doch hat auf die Seite werfen müssen, um in gewisser Rücksicht wieder von vorn anzufangen. Um indess auch nicht undankbar zu sein, muss man bekennen, dass in jenen Beschäftigungen doch jedenfalls ein sehr bedeutendes bildendes Element lag, und dass auch die meistens sehr grosse analytische Eleganz der erhaltenen Resultate denselben einen ganz eigenthümlichen Reitz verlieh, wodurch man, nachdem man eine Stufe erstiegen hatte, immer wieder neue Kraft gewann, den nicht selten dornenvollen Pfad weiter zu verfolgen.

Zu den schönsten Sätzen der Analysis gehört nach meiner Ueberzeugung unstreitig die berühmte sogenannte Localformel zur Reversion der Reihen, mit welcher H. A. Rothe, der zuletzt Professor in Erlangen war und seine verdienstvolle literarische Laufbahn mit der, jetzt auch wohl nur von sehr wenigen — aber gewiss mit Unrecht — noch gekannten Theorie der combinatorischen Integrale. Nürnberg. 1820. geendigt hat, in der mit eigenthümlicher Eleganz verfassten Schrift: Formulae de serierum reversione demonstratio universalis signis localibus combinatorio-analyticorum vicariis exhibita. Lips. 1793. die Analysis bereichert hat. Aber ich möchte wohl wissen, ob diese ganz allgemeine Formel zu Reihenumkehrungen öfters wirklich angewandt worden ist? Und ausserdem lassen alle diese Untersuchungen ein Element ganz unberücksichtigt, welches dem erhaltenen Resultate nur erst wahre Berechtigung zur wirklichen Anwendung verleihet, und von der neueren Analysis daher auch nie ausser Acht gelassen wird, nämlich — was ich kaum wohl erst noch zu sagen brauche — die Convergenz oder Divergenz der erhaltenen Reihe. Ob aber hierüber Kriterien, die für die Anwendung hinreichende Einfachheit besitzen, überhaupt aufgestellt werden können, muss ich völlig dahingestellt sein lassen, da weder hinreichende eigene noch fremde Untersuchungen mir in dieser Beziehung bis jetzt zur Seite stehen. So viel aber dürfte gewiss sein, dass alle jene älteren Untersuchungen über die Umkehrung der Reihen, ungeachtet ihrer in gewisser Rücksicht ganz unbestreitbaren sehr grossen analytischen Schönheit und Eleganz, in den mathematischen Raritätenkasten, oder auf den mathematischen Nipptisch zu verweisen sind, so lange der fragliche Punkt nicht eine einigermaassen genügende Erledigung gefunden hat*).

Alle jene älteren Untersuchungen über die Reversion der Reihen legen nun die gewöhnliche Reihenform

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots$$

zum Grunde. Diesen älteren, bisher überhaupt allein eingeschlagenen Weg, hat aber der Herr Vf. der vorliegenden Schrift, wahrscheinlich veranlasst durch den oben angestellten ähnliche Betrachtungen, ganz verlassen, und seinen Untersuchungen über die

---

*) Dirksen's Organon der gesammten transcendenten Analysis. Thl. I. Berlin. 1845. wäre ein Werk, in dessen weiterer Fortführung man wohl die fragliche Erledigung zu finden hoffen dürfte.

Umkehrung der Reihen, oder, wie er es mit Recht nennt, über die Umkehrung der Functionen, d. h. über die Bestimmung der Function $y=\varphi(x)$ aus der als gegeben angesehenen Function $x=\psi(y)$, die Reihenform

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}A_0+A_1\cos\frac{\pi x}{c}+A_2\cos\frac{2\pi x}{c}+A_3\cos\frac{3\pi x}{c}+\ldots,$$

wo c eine beliebige positive von Null verschiedene Grösse bezeichnet und die Coefficienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ mittelst der Formel

$$A_n=\frac{2}{c}\int_0^c \varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{c}\partial x$$

bestimmt werden, zum Grunde gelegt. Die besonderen Vortheile, welche diese Reihenform darbietet, kennt Jeder, wer mit den neueren Fortschritten der Analysis gehörig bekannt ist, so dass, dieselben hier noch besonders aufzuzählen, unnütze Weitläufigkeit sein würde; und der Gedanke des Herrn Vfs., diese Reihenform bei dem Reversionsproblem in Anwendung zu bringen, ist daher jedenfalls ein sehr glücklicher zu nennen. Auch glauben wir, ohne uns hier auf eine nähere Angabe der gewonnenen Resultate einlassen zu können, dass der Herr Verf. innerhalb der sich selbst gesteckten Gränzen Alles geleistet hat, was sich bei dem gegenwärtigen Zustande der neueren Analysis leisten lässt, sowie denn, wie die früheren, auch diese Schrift des Herrn Vfs. ganz im Geiste dieser neueren Analysis verfasst ist, und ihrer Wichtigkeit und ihres grossen wissenschaftlichen Interesses wegen zur sorgfältigsten und allgemeinsten Beachtung dringend empfohlen zu werden in jeder Beziehung verdient, auch ohne Zweifel überhaupt als eine wichtige neuere Erscheinung auf dem Gebiete der mathematischen Literatur bezeichnet werden muss. Dabei können wir aber zum Schluss doch immer nicht den Wunsch unterdrücken, dass es gelingen möge, die von den älteren Combinatorikern gewonnenen Resultate und Sätze über die Umkehrung der Reihen auf irgend eine Weise zur wirklichen Anwendung fruchtbar zu machen, indem man bei ihnen, an die älteren eleganten Untersuchungen sich möglichst anschliessend, noch alle diejenigen Forderungen zu befriedigen sucht, welche die neuere Analysis dem Charakter ihrer eigenthümlichen Strenge nach an jede in ihr Gebiet fallende Untersuchung nothwendig stellen muss, wenn dieselbe auf wahren wissenschaftlichen Werth soll Anspruch machen dürfen.

Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen von Carl Friedrich Gauss. Göttingen. 1849. 4. 15 Sgr.

Gauss hat bekanntlich seine literarische Laufbahn mit einem Beweise des Fundamentalsatzes der Theorie der algebraischen Gleichungen begonnen, den er in der Inaugural-Dissertation: Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse, quam pro obtinendis summis in Philosophia honoribus inclito Philosophorum ordini Academiae Juliae Caro-

tinae exhibuit C. F. Gauss. Helmst. 1799. veröffentlicht, und nachher noch mit zwei andern in den Schriften der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften bekannt gemachten Beweisen vermehrt hat. Jedenfalls ist es nicht ohne Absicht geschehen, dass Gauss in dem gegenwärtigen Jahre 1849, dem Jahre seines Doctorjubiläums, jene für die Wissenschaft höchst wichtige Jugendarbeit wieder vorgenommen, und in einer neuen in vielen Beziehungen sehr vereinfachten Bearbeitung den Mathematikern vorgelegt hat. Wäre der Herausgeber des Archivs nicht leider im verwichenen Sommer von dem härtesten Schlage des Schicksals, welcher ihn in diesem Leben überhaupt treffen konnte, durch den Verlust seiner ältesten, ihm über Alles theuren, auch geistig sehr nahe stehenden Tochter, in deren einundzwanzigstem Lebensjahre, getroffen worden, durch welches harte, noch schwer auf ihm lastende Geschick, mit dem eine vorhergegangene Badereise zur Wiederherstellung der Gesundheit der Verstorbenen in enger Verbindung stand, er länger als ein Vierteljahr allen anderen Ereignissen völlig entfremdet wurde, und so nur erst jetzt bei Gelegenheit der vorliegenden Schrift auf das in die erwähnte traurigste Zeit seines Lebens gefallene Doctorjubiläum des grössten Mathemathematikers unsers Jahrhunderts aufmerksam gemacht und hin gewiesen wurde, so würde gewiss auch das Archiv nicht versäumt haben, alle seine Leser auf dieses höchst erfreuliche Ereigniss, an dem jeder Mathematiker den lebhaftesten und innigsten Antheil nehmen muss, aufmerksam zu machen, und sich bei demselben in irgend einer geeignet scheinenden Weise auch selbstredend zu betheiligen. Sollten aber dem hochverehrten Manne diese Zeilen jetzt noch zu Gesicht kommen, so möge er sich versichert halten, dass der Herausgeber des Archivs jederzeit von der innigsten Freude bewegt worden ist, wenn er von ihm befreundeten nahen Verwandten des Gefeierten die öfters wiederholte Versicherung erhalten hat, wie sehr derselbe auch noch in seinem hohen Alter durch Kräftigkeit und Gesundheit des Körpers von der Vorsehung beglückt werde: denn die fortwährende Kräftigkeit und Rüstigkeit des Geistes „bedarf keines Beweises“ nach den immer wieder neu vorliegenden Proben. Möge der Himmel ihm zum Heile der Wissenschaft und aller durch die Bande des Blutes mit ihm verbundenen Personen noch viele Jahre schenken! in welchem Wunsche mit dem Herausgeber gewiss alle Leser des Archivs, welche auf die in Rede stehende am 16. Julius d. J. unter lebhafter Theilnahme von nah und fern stattgehabte Feier noch nachträglich hinzuweisen, diese wenigen theilnehmenden Worte vorzugsweise bestimmt sind, übereinstimmen werden.

Die von Gauss gegebenen drei Beweise des algebraischen Fundamentalsatzes beruhen alle auf verschiedenen Grundlagen, aber darin kommen sie, sowie auch die von Cauchy gegebenen Beweise, alle überein, dass zunächst nur das Vorhandensein Eines Factors der betreffenden Function nachgewiesen wird. Der Strenge des Beweises thut dies allerdings keinen Eintrag: denn es ist klar, dass wenn von der vorgegebenen Function dieser eine Factor abgelöset wird, eine ähnliche Function von niederer Ordnung zurückbleibt, auf welche der Lehrsatz auf's Neue angewandt werden kann, und dass durch Wiederholung des Verfahrens zu-

letzt eine vollständige Zerlegung der ursprünglichen Function in Factoren der bezeichneten Art hervorgehen wird. Indessen gewinnt ohne Zweifel jede Beweisführung eine höhere Vollendung, wenn nachgewiesen wird, dass sie geeignet ist, das Vorhandensein der sämmtlichen Factoren unmittelbar anschaulich zu machen. Dass der erste Beweis in diesem Falle ist, ist in der gedachten Dissertation (Art. 23.) angedeutet, ohne es dort weiter auszuführen: dies zu ergänzen, ist die vorliegende neue Abhandlung bestimmt, zugleich aber sollen die Hauptmomente des ganzen Beweises in einer neuen, eine vergrösserte Klarheit darbietenden Gestalt wiederholt werden. Was dabei die äussere Einkleidung des Lehrsatzes selbst betrifft, so war die 1799 gebrauchte, dass die Function $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots$ sich in reelle Factoren erster oder zweiter Ordnung zerlegen lässt, damals deshalb gewählt, weil alle Einmischung imaginärer Grössen vermieden werden sollte. Gegenwärtig, wo der Begriff der complexen Grössen Jedermann geläufig ist, schien es angemessener, jene Form fahren zu lassen, und den Satz so auszusprechen, dass jene Function sich in n einfache Factoren zerlegen lasse, wo dann die constanten Theile dieser Factoren nicht eben reelle Grössen zu sein brauchen, sondern für dieselben auch jede complexen Werthe zulässig sein müssen. Bei dieser Einkleidung gewinnt selbst der Satz noch an Allgemeinheit, weil dann die Beschränkung auf reelle Werthe auch bei den Coefficienten A, B, u. s. w. nicht vorausgesetzt zu werden braucht, vielmehr jedwede Werthe für dieselben zulässig bleiben.

Die zweite Abtheilung der vorliegenden Schrift ist den algebraischen Gleichungen mit drei Gliedern ($x^{m+n} \pm ex^m \pm f = 0$) gewidmet. Diese haben das Eigenthümliche, dass von den zur numerischen Auflösung der Gleichungen bestimmten Methoden einige bei jenen einer Geschwindigkeit und Eleganz fähig werden, von der ihre Anwendung auf Gleichungen von weniger einfacher Gestalt sehr weit entfernt bleibt. Dies gilt namentlich von der Auflösung durch unendliche Reihen, und von der indirecten Methode. Es scheint daher die Entwicklung dieser Methoden für die Gleichungen von jener Form um so mehr eine besondere Ausführung zu verdienen, da das Vorkommen solcher Gleichungen in der That ein sehr häufiges ist.

Die Auflösung durch unendliche Reihen hat jedoch der Verf. von seinem gegenwärtigen Zwecke gänzlich ausgeschlossen, und nur bemerkt, dass für jede Wurzel einer solchen Gleichung, sei sie reell oder imaginär, eine convergente und nach einem leicht erkennbaren Gesetze fortschreitende Reihe gefunden werden kann. So schön aber auch diese Auflösungsart in allgemein theoretischer Beziehung ist, so wird man doch, wo es auf wirkliche praktische Anwendung ankommt, den indirecten Methoden in allen den Fällen den Vorzug geben, wo jene Convergenz nicht eine sehr schnelle ist.

Diese indirecten Methoden nun sind der Gegenstand der zweiten Abtheilung. Es handelt sich hier von zwei Methoden, denn das Verfahren, welches zur Bestimmung der imaginären Wurzeln erfordert wird, ist ganz verschieden von dem für die reellen Wurzeln anzuwendenden. Von dem letzteren hat der Vf. schon bei andern Gelegenheiten ein Paar Proben an besonderen Fällen gege-

ben, und dabei zugleich die allgemeine Anwendbarkeit des Verfahrens angedeutet. Obgleich diese Generalisirung durchaus keine Schwierigkeit hat, so hat der Vf. doch geglaubt, dass man gern die gebrauchfertigen Vorschriften zusammengestellt sehen würde, zumal weil die Anzahl der dabei zu unterscheidenden und einzeln zu behandelnden Fälle nicht unbeträchlich ist.

Die Auffindung der imaginären Wurzeln auf indirectem Wege ist (insofern nicht schon einigermassen angenäherte Werthe anderswoher bekannt sind) deswegen viel schwieriger, als die der reellen, weil jene aus einem unendlichen Gebiete von Dimensionen herausgesucht werden müssen, diese nur aus einem unendlichen von Einer Dimension. Diese Schwierigkeit lässt sich bei Gleichungen von drei Gliedern durch einen einfachen sehr nahe liegenden, aber wie es scheint, sonst bisher noch nicht benutzten Kunstgriff umgehen. Auch für diese Aufgabe sind die zur Auflösung erforderlichen Vorschriften vollständig und in gebrauchsfertiger Gestalt mitgetheilt. G.

Théorie générale des calculs par aproximation par J. J. Guilloud. Paris, 1849.

Geometrie.

Das Malfattische Problem. Beweis der Steiner'schen Auflösung. Von A. Quidde, Oberlehrer. (Programm des Gymnasiums zu Herford von Michaelis 1849.) Herford. 1849. 4.

Der von Adams in der im Litterar. Ber. Nr. XXX. S. 451. angezeigten Schrift gegebene Beweis der Steiner'schen Construction befriedigte den Herrn Vf. des vorliegenden lesenswerthen Programms insofern nicht, als dieselbe nicht rein planimetrisch ist, sondern auf eine Gleichung des zweiten Grades sich stützt. Er giebt daher in der vorliegenden Schrift einen rein geometrischen Beweis der gedachten eleganten Construction, welchen wir der Beachtung der Leser des Archivs recht sehr empfehlen. Ausserdem sind noch verschiedene elegante analytische Betrachtungen beigefügt, die das Interesse der Leser ebenfalls recht sehr in Anspruch zu nehmen geeignet sind, weshalb wir auf diese Schulschrift wiederholt aufmerksam machen, ohne dadurch Herrn Adams Beweis der mehr erwähnten Construction irgend in Schatten stellen zu wollen, der in analytischer Rücksicht ebenfalls sehr bemerkenswerth ist, wie wir auch schon a. a. O. des Literar. Ber. gebührend hervorgehoben haben.

Geodäsie.

Die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie. Ausgeführt von der trigonometrischen Abtheilung des Generalstabes von I. I. Baeyer. Berlin. 1849. 4. 6 Thlr.

Es genügt hier, das Erscheinen dieses für die Geographie und Topographie Preussens sehr wichtigen Werkes anzuzeigen, da eine besondere Beurtheilung oder auszugsweise Mittheilung des Inhalts bei einem Werke, welches wie das vorliegende hauptsächlich nur die Resultate einer grossen geodätischen Messung enthält, natürlich unstatthaft ist. Uebrigens enthält aber auch das Werk eine kurze Darstellung der befolgten Beobachtungs- und Rechnungsmethode, welche für jeden Geodäten namentlich in praktischer Rücksicht sehr lehrreich sein wird und daher zur Beachtung hier empfohlen werden muss.

Mechanik.

Leonhard Euler's Mechanik oder analytische Darstellung der Wissenschaft von der Bewegung mit Anmerkungen und Erläuterungen herausgegeben von Dr. J. Ph. Wolfers. Zweiter Theil. Greifswald. 1850. 8. 2⅚ Thlr.

Wir freuen uns sehr, des Erscheinen des zweiten Theils dieser ausgezeichneten Uebersetzung von Euler's Mechanik jetzt anzeigen zu können, von welcher alles dasjenige, was im Literar. Ber. Nr. XXXVIII. S. 551. bei der Anzeige des ersten Theils zur Empfehlung dieses Unterernehmens gesagt worden ist, in ganz gleichem Maasse gilt. Da das Urtheil, welches Gauss über diese Uebersetzung gefällt hat, uns freundschaftlich mitgetheilt worden ist, zugleich mit der Autorisation zur Veröffentlichung desselben, so nehmen wir keinen Anstand, dasselbe nachstehend den Lesern des Archivs nicht vorzuenthalten. Ganz übereinstimmend mit unserem eigenen Urtheil über den ersten Theil sagt nämlich der genannte grosse Mathematiker:

„Da das Studium der Eulerschen Schriften stets die beste Schule für mathematische Ausbildung, und auch selbst da wo die spätere Zeit wesentliche Vervollkommnungen gebracht hat, doch jedem Mathematiker unerlässlich bleiben wird, so können alle Bemühungen, solche Schriften leichter zugänglich zu machen, nur dankbar anerkannt werden. Es ist daher ein erfreuliches Zusammentreffen mit Ihrer (des Uebersetzers) Arbeit, dass die Petersburger Akademie die kleinern, in akademischen Denkschriften zerstreuten Abhandlungen zu sammeln beschlossen und schon zwei Bände Commentationes Arithmeticae neuerlich veröffentlicht hat."

Die Anmerkungen und Erläuterungen des Herrn Uebersetzers sind in diesem Theile noch reichlicher wie im ersten Theile.

und werden Ungeübteren das Studium des Werks sehr erleichtern. Mit der freudigsten Anerkennung des Verdienstes, welches der Herr Uebersetzer sich durch die vollständige Uebertragung der Mechanica sive motus scientia analytice exposita in's Deutsche bereits erworben hat, können wir nicht den Wunsch unterdrücken, dass es demselben gefallen möge, das deutsche mathematische Publicum nun auch recht bald mit einer ebenso gelungenen Uebersetzung der in streng wissenschaftlicher Rücksicht jedenfalls noch weit wichtigeren Theoria motus corporum rigidorum. Rostock und Greifswald. 1789. 4. zu beschenken.

Nautik.

Traité élémentaire de navigation à l'usage des officiers de la marine militaire et de la marine du commerce, par V. Caillet, examinateur de la marine etc. Tome I. Texte. Brest 1848. Tome II. Tables. Brest. 1846. 5 Thlr. 25 Sgr.

Dieses Werk enthält eine sehr wissenschaftlich gehaltene, für seinen Zweck hinreichend vollständige Darstellung der nautischen Astronomie und Schifffahrtskunde überhaupt, nebst den dazu gehörenden Tafeln, und darf von Lehrern der Schifffahrtskunde nicht unbeachtet gelassen werden. Die auf der See gebräuchlichen Instrumente sind ziemlich ausführlich beschrieben, und ihr Gebrauch und ihre Berichtigung ist gelehrt. Alle Aufgaben sind durch vollständig ausgerechnete Beispiele hinreichend erläutert. Neue Methoden, die besonders hervorgehoben zu werden verdienten, haben wir jedoch in diesem Werke nicht gefunden, ausser etwa die auf Seite 193. mitgetheilte Auflösung der Aufgabe: „Aus den beobachteten Höhen zweier Sterne und der Zwischenzeit der Beobachtungen Zeit und Polhöhe zu bestimmen" von dem Vater des Verfassers, und die approximative Auflösung desselben Problems von dem Marineofficier Pagel, die aber wohl der bekannten, auf der See bisher am meisten angewandten, ebenfalls nur approximativen Methode von Douwes (der Vf. schreibt falsch Dowes) nachstehen dürfte. Dass der Verf. die vollständige Kenntniss der Geometrie und der beiden Trigonometrien voraussetzt, ohne in seinem Werke selbst, wie dies oft in Schifffahrtslehrbüchern geschieht, einen Abriss dieser Wissenschaften zu liefern, ist ganz recht und dem wissenschaftlichen Standpunkte seines Werkes, welches wir nochmals allen denen, die sich für diese Studien interessiren, empfehlen, völlig angemessen.

Nautischer Almanach für das Jahr 1850. Herausgegeben von G. F. Ursin. Kopenhagen. 1848. 8. 15. Sgr.

Dieser auf sehr gutes Papier mit deutlichen und scharfen Lettern gedruckte nautische Almanach ist uns jetzt erst bekannt geworden; ob schon frühere Jahrgänge von demselben exi-

stiren, ist uns nicht mehr mit Bestimmtheit erinnerlich. Um so mehr halten wir es für unsere Pflicht, auf denselben aufmerksam zu machen, weil er einen nach unserer Ansicht sehr guten für den Seefahrer völlig hinreichenden Auszug aus dem „Nautical Almanach and astronomical Ephemeris“ liefert, und für den Greenwicher Meridian berechnet ist. Eine deutliche Anweisung zu seinem Gebrauch ist der eigentlichen Ephemeride vorangestellt, und derselbe ist daher gewiss den Seeleuten in jeder Beziehung recht sehr zu empfehlen.

Allgemeines nautisches Wörterbuch mit Sacherklärungen: Deutsch, Englisch, Französisch, Spanisch, Portugiesisch, Italienisch, Schwedisch, Dänisch, Holländisch. Von Dr. Eduard Bobrik. Leipzig. 1850. 8. 4 Thlr.

Dictionnaire de marine, par de Bonnefous et Paris. 1848.

Histoire générale de la marine, par Van Tenac. 1848.

Nouvelle Architecture navale, par A. Maizière. 1848.

Guide pour la construction de bateaux à vapeur, par Mazaudier et Lombard. 1848.

Perfectionnements dans la navigation à vapeur. Exposition d'un nouveau mode de navigation, par A. Seguier, de la Morinière et Durand. 1848.

Navigation rapide. Notice sur un bateau roulant, par J. B. Bonniot. 1848.

Almanach du marin et de la France maritime pour 1850, publié avec l'approbation et sous le patronage du ministre de la marine. Treizième année. Paris. 1849.

Physik.

Lehrbuch der Physik für Schule und Haus. Von Dr. Heinrich Bolze (Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Cottbus). Berlin. 1850. 28 Sgr.

Dieses mit grosser Deutlichkeit in einer ansprechenden Sprache verfasste Lehrbuch der Physik können wir aus Ueberzeugung allen denjenigen empfehlen, die bei nur sehr geringen mathematischen Vorkenntnissen und ohne zu grossen Zeitaufwand sich eine gründliche Einsicht in die Hauptlehren der Physik verschaffen wollen, und glauben, dass der Herr Vf. in diesem keinen grossen Umfang habenden Werke ganz die richtige Mitte zwischen einem völlig populären und einem streng wissenschaftlichen Werke, sowohl rücksichtlich des Vortrags als auch rücksichtlich des aufgenommenen Materials, getroffen hat. Das

Buch wird daher auch ganz zweckmässig beim physikalischen Unterrichte auf höheren Lehranstalten, selbst in den oberen Klassen, zum Grunde gelegt werden können, indem es einem geschickten Lehrer leicht sein wird, verschiedene Partieen mit Hülfe der Lehren der Elementarmathematik, namentlich der Trigonometrie und Algebra, weiter auszuführen, worüber sich dann die Schüler als Ergänzung des zum Grunde gelegten Lehrbuchs eigne Hefte ausarbeiten müssen, was vielfache Gelegenheit zu zweckmässigen mathematischen Uebungen darbieten wird. Dass der Herr Verf. in einem Buche dieser Tendenz auch dem sogenannten thierischen Magnetismus und den Reichenbach'schen Untersuchungen über denselben in einem „Polarismus" überschriebenen besonderen Kapitel einige Aufmerksamkeit geschenkt hat, kann nur gebilligt werden. Da schon früher ein anderer competenter Beurtheiler, Herr Director Klöden in Berlin, seine mit unserem obigen Urtheil ganz übereinstimmende Ansicht über dieses Buch auf einem wahrscheinlich von dem Verleger dem Buche beigelegten besonderen Blatte öffentlich ausgesprochen hat, so halten wir es für zweckmässig und der zu wünschenden weiteren Verbreitung des Buches für förderlich, wenn wir diese Beurtheilung des Herrn Director Klöden, mit der wir, wie gesagt, im Wesentlichen übereinstimmen, nachstehend abdrucken lassen:

„Das beifolgend zurückgehende Manuscript, betitelt: Lehrbuch der Physik für Schule und Haus von Dr. Heinrich Bolze, erscheint mir als eine recht wackere Arbeit, die einer weiteren Verbreitung durch den Druck wohl werth ist. Sie empfiehlt sich durch eine logische übersichtliche Anordnung, durch eine lichtvolle, sehr deutliche und fassliche Ausdrucksweise und Darstellung, ohne doch der Wissenschaft etwas zu vergeben, oder eine Scheinerklärung an die Stelle der wahren zu setzen, und durch eine gewisse Vollständigkeit, soweit diese von einer, im edleren Sinne populär gehaltenen Schrift zu verlangen ist. Was der eigentlichen Wissenschaft anheim fällt, ist mit Recht weggelassen, da es dem Herrn Verfasser darauf ankam, nur das zu geben, was der Schule und dem Leben angehört, weshalb er auch zur Verständniss seines Buches nur ein sehr geringes Maass von mathematischem Wissen fordert, und die nothwendigsten Sätze der Geometrie anhangsweise giebt. Obgleich das Buch vorzugsweise für das Selbststudium geschrieben ist, so wird es doch in Gymnasien und Bürgerschulen auch recht wohl dem Unterricht zum Grunde gelegt werden können, indem es keinem Lehrer schwer werden kann, die nach dem Bedürfnisse und dem Standpunkte seiner Klasse etwa erforderlichen mathematischen Entwickelungen und Formeln geeigneten Ortes ergänzend hinzuzufügen, wozu oft schon die blosse Umwandlung des wörtlichen Ausdrucks in den figurirten mathematischen hinreicht. Mit den Ergebnissen der neuesten physikalischen Forschungen ist der Herr Verfasser wohl vertraut, und er hat sie, so weit es der Zweck und die Bestimmung des Buches verlangten, aufgenommen und meistens sehr gut und gelungen dargestellt. Aus alle dem ergiebt sich, dass das Buch ein lehrreiches und zweckmässiges ist." Klöden.

Viele, denen andere populäre physikalische Werke mit Recht zu umfangreich sind, werden gewiss in dem vorliegenden Buche

ihre Wünsche befriedigt finden, wenn sie nur einer wissenschaftlichen Darstellung zu folgen im Stande sind, und vor einer sich hin und wieder findenden ganz einfachen mathematischen Betrachtung nicht gleich zurückschrecken, was aber in jetziger Zeit überhaupt gar nicht mehr der Fall sein sollte.

Répertoire d'Optique moderne ou Analyse complète des trauvaux modernes relatifs aux phénomènes de la lumière; par M. l'Abbé Moigno. Deuxième Partie. Paris. 1848. 8.

Dies ist der zweite Theil des im Literar. Ber. Nr. XXXIV. S. 504 angezeigten Werkes, in welchem es der Hr. Verf. nicht mehr mit dem mathematischen Theile der neueren Optik zu thun hat, sondern hauptsächlich nur mit rein physikalischen Dingen, weshalb wir seine Darstellung in diesem Theile genügender und befriedigender finden als im ersten Theile, und selbst glauben, dass man schwerlich anderswo die neueren optischen Entdeckungen so vollständig wie hier beisammen finden wird. Der Hauptinhalt, mit dessen Angabe, ohne sehr ins Einzelne eingehen zu können, wir uns hier begnügen müssen, ist folgender:

Section V. Solution de quelques difficultés. Explication de certains faits mysterieux (Hier auch vom Zodiakallicht, Sternschnuppen, Nordlicht u. s. w., also auch von Dingen, die zur meteorologischen Optik gehören.) — Section VI. Des couleurs en elles-mêmes et dans les corps. — Section VII. Des couleurs accidentelles ou subjectives. De la persistance des images. Du contraste. De l'irradiation. Du Daltonisme ou des imperfections innées dans la sensation des couleurs. — Section VIII. De la lumière considérée dans son action sur des appareils autres que l'oeil, sur des substances différentes de la rétine. De la nature plus intime du spectre solaire: des divers rayons calorifiques, chimiques et phosphorogéniques. De la photographie. De l'action de la lumière sur les plantes. (Hier auch von Moser's Entdeckung.)

Grundsätze der Meteorologie in näherer Beziehung auf Deutschlands Klima von Dr. G. Schübler. Neu bearbeitet von Dr. G. A. Jahn, Director der astronomischen Gesellschaft in Leipzig, u. s. w. Leipzig. 1849. 8. 1 Thlr. 15. Sgr.

Schübler's Grundsätze der Meteorologie erschienen zuerst im Jahre 1831 als integrirender Theil der „allgemeinen Encyklopädie der gesammten Land- und Hauswirthschaft der Deutschen", und haben sich wegen ihrer sehr gemeinverständlichen Darstellung und ihres praktischen Gehalts mit Recht grossen Beifall namentlich unter den wissenschaftlich gebildeten Landwirthen erworben. Wie sehr seit jener Zeit durch Gründung landwirthschaftlicher Akademieen und höherer landwirthschaftlicher Lehranstalten, so wie gewöhnlicher Ackerbauschulen, durch das Entstehen einer ungemein grossen Menge landwirthschaftlicher Vereine und durch landwirthschaftliche Schriften die wissenschaftliche Bearbeitung der Landwirthschaft gefördert worden ist, weiss Jeder, der an diesem wichtigsten aller Gewerbe der menschlichen

Gesellschaft einiges Interesse nimmt. Wir halten daher die neue streng wissenschaftlichere Bearbeitung, welche Schübler's Grundsätzen der Meterorologie in dem vorliegenden Buche durch Herrn Doctor G. A. Jahn in Leipzigzu Theil geworden ist, in jeder Beziehung für sehr zeitgemäss, und sind der Meinung, dass der Herr Bearbeiter das Werk dem gegenwärtigen Zustande der Meteorologie und den Bedürfnissen wissenschaftlich gebildeter Landwirthe, für welche das Buch ursprünglich bestimmt war, nach dem heutigen Zustande der Landwirthschaft mit einem sehr richtigen Takte angepasst, und auch den ursprünglich durchaus praktischen Chakter desselben in dieser neuen Bearbeitung nirgends verleugnet hat, indem er, z. B., um nur eins hervorzuheben, auch eine sehr reiche Sammlung sogenannter Wetterregeln und Wetterzeichen beigebracht hat, wozu ihm die ebenfalls recht sehr zu empfehlende Leichtfassliche Darstellung der Meteorologie von Kunzek. Wien. 1847. (Literar. Ber. Nr. XL. S. 582.) namentlich in Bezug auf die optischen Lufterscheinungen noch einige gute Beiträge hätten liefern können. Wir wünschen dem nützlichen Buche des Herrn Jahn seines sehr lehrreichen Inhalts und seiner leicht verständlichen Darstellung wegen eine recht weite Verbreitung unter allen denen, welche sich für die Erscheinungen in unserm Luftkreise entweder aus Neigung oder aus Beruf interessiren. Die Ausstattung, auch der Kupfertafeln, ist in jeder Beziehung vorzüglich.

Magnetische und geographische Ortsbestimmungen im österreichischen Kaiserstaate, ausgeführt von Carl Kreil, Director der k. k. Sternwarte zu Prag, u. s. w. und Carl Fritsch, k. k. Conceptspracticanten u. s. w. Erster Jahrgang. 1846. Oesterreich ob der Enns, Tyrol und Vorarlberg, Lombardei. Prag 1848. 4. 2 Thlr. 20. Sgr.

Mit der liberalsten Unterstützung von Seiten seiner Regierung ist Herr Kreil beschäftigt, ein magnetisches und zugleich geographisches Netz über den ganzen österreichischen Kaiserstaat zu legen, wobei derselbe in vier Districte getheilt worden ist, nämlich:

1. Der westliche Alpen-District, der die Provinzen Oesterreich ob der Enns, Salzburg, Tyrol, Vorarlberg und die Lombardei begreift.

2. Der östliche Alpendistrict mit den Provinzen Oesterreich unter der Enns, Steyermark, Illyrien, das venetianische Königreich und Dalmatien.

3. Der Donaudistrict, nämlich das mittlere und südliche Ungarn, Slavonien, Kroatien und die Militärgränze.

4. Der Karpathendistrict, nämlich das südliche Ungarn, Galizien und Siebenbürgen.

Mit dem ersten Districte ist Herr Kreil für's Erste fertig und theilt die Resultate seiner an 43 Punkten gemachten magnetischen und geographischen Bestimmungen in diesem wichtigen

Werke mit. Sehr zu wünschen ist, dass die neueren politischen Ereignisse der Fortsetzung des begonnenen wichtigen Unternehmens und der weiteren Mittheilung der gewonnenen Ergebnisse nicht hindernd in den Weg treten.

Einleitung in die Krystallographie und in die krystallographische Kenntniss der wichtigeren Substanzen. Von Dr. Hermann Kopp, Prof. der Physik und Chemie zu Giessen. Mit einem Atlas von 21 Kupfertafeln und 7 lithographirten Tafeln, Netze zu Krystallmodellen enthaltend. Braunschweig. 1849. 8. 3 Thlr. 20 Sgr.

Der Herr Vf. dieses auch namentlich rücksichtlich der Figurentafeln trefflich ausgestatteten Werks hat in demselben Berechnungen durch die sphärische Trigonometrie oder analytische Geometrie gänzlich vermieden, und sich bloss geometrischer Constructionen oder graphischer Methoden bedient, was wir ganz zweckmässig finden, namentlich für solche, welche weiter gehende mathematische Kenntnisse nicht besitzen. Jedoch können wir gerade in dieser Beziehung nicht den Wunsch unterdrücken, dass es einmal einem mit den Methoden der descriptiven Geometrie und der Perspective vollständig vertrauten Mathematiker gefallen möchte, eine auf die Methoden der in Rede stehenden Wissenschaften gegründete vollständige Anweisung zur Zeichnung der Krystalle sowohl im Grundriss aus gemessenen Winkeln und Kanten, als auch zur perspectivischen Darstellung derselben zu bearbeiten, die wir sehr gern in dem Archive abgedruckt zu sehen wünschen würden. Herrn Kopp's übrigens recht sehr zu empfehlendes Buch leistet in dieser Beziehung Einiges, aber nach unserer Meinung vom mathematischen Standpunkte aus nicht Hinreichendes, wenn auch für die Leser, für welche das Buch vorzugsweise bestimmt zu sein scheint, genug. Wir wiederholen aber, dass wir das Buch für den Kreis von Lesern, den es sich selbst ausgewählt zu haben scheint, sehr geeignet und empfehlenswerth finden.

(Der Herausgeber des Archivs möchte sich bei dieser Gelegenheit erlauben, eine von ihm früher in seinen Beiträgen zur reinen und angewandten Mathematik. Thl. I. Brandenburg. 1838. S. 149. Nr. VIII. veröffentlichte Abhandlung: Zur Krystallographie und analytischen Geometrie. Erster Beitrag, in Erinnerung zu bringen, da dieselbe nicht sehr bekannt geworden zu sein scheint, die darin entwickelten Formeln aber eine sehr allgemeine und ausgedehnte Anwendung bei krystallographischen Bestimmungen wohl gestatten möchten. Eine recht deutliche und vollständige Anweisung zur graphischen Darstellung der Krystalle sowohl im Grundriss als auch perspectivisch mittelst der Methoden der descriptiven Geometrie und Perspective hält aber auch er für sehr wünschenswerth und wird Arbeiten dieser Art gern in's Archiv aufnehmen. — G.)

Mémoires de Physique mécanique, par Guillaume Wertheim. Paris. 1848. 8. 3 Thlr.

Inhalt: Mémoire sur l'élasticité et sur la cohésion des métaux. — Mémoire sur l'élasticité et sur la cohésion des alliages. —

Mémoire sur l'influence du courant galvanique et de l'électromagnétisme sur l'élasticité des metaux. — Mémoire sur les sons produits par le courant électrique. — Note sur l'elasticité et sur la cohésion des différentes espèces de verre; par M. M. E. Chevandrier et G. Wertheim. — Mémoire sur l'équilibre des corps solides homogènes. — Mémoire sur la vitesse du son dans les liquides. — Mémoire sur les propriétés mécaniques du bois; par M. M. E. Chevandrier et G. Wertheim. — Mémoire sur l'élasticité et sur la cohésion des principaux tissus du corps humain.

Vermischte Schriften.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Tome XV. IIme Partie 1848. Tome XVI. Ire Partie. 1849. (Vergl. Literar. Ber. Nr. XLVII. S. 660).

Tome XV. IIme Partie. p. 16. Des proportions du corps humain, par A. Quetelet. Deuxième article (Voir le Ier articel T. XV. Ire partie. p. 580): Proportions de l'homme chez les Egyptiens. Proportions chez les Romains. Proportions des Indous. — p. 27. De l'ébullition des liquides et de leur adhérence aux vases qui les contiennent, comme cause de certains phénomènes, par M. Louyet. — p. 46. Sixième et septième mémoire sur l'induction; par M. Elie Wartmann. — p. 118. Sur une anomalie apparente dans les réactions électriques, par M. J. G. Crahay. — p. 282. Sur une méthode donnée dans les Mémoires de l'Académie Royale de Belgique, pour déterminer la collimation d'une lunette méridienne; par Ed. Mailly. — p. 294, Procédé d'extraction du nickel et du cobalt, suivi dans une fabrique de Birmingham, par M. Louyet. — p. 365. Table des forces élastiques de la vapeur d'eau, pour les températures croissant par centième de degré, depuis 93° jusqu'a 101° de l'échelle centésimale; par M. J. G. Crahay. — p. 378. Note sur un phénomène d'acoustique, par M. Ch. Montigny. — p. 381. Le transport mécanique de la matière pondérable est-il toujours dirigé du pôle positif au pôle négatif? Par M. Maas. — p. 471. Sur les corrections de la lunette méridienne, notes par M. M. le capitaine Liagre et Ed. Mailly. — p. 476. Sur une méthode propre à faire trouver la collimation d'une lunette méridienne au moyen des observations astronomiques; par M. le capitaine Liagre. — p. 501. Sur la réduction d'une intégrale multiple; par M. Schaar (Die bekannten Integrale von Dirichlet.) — p. 506. Sur le développement de la fonction $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$, suivant les puissances de z; par M. Schaar. — p. 508. Résolution d'un problème du calcul des probabilités; par M. Meyer, (Une urne renferme m boules composées de α blanches, β noires, etc. λ bleues, de ν couleurs diverses; quelle et la probabilité pour qu'en tirant k boules au hasard, on puisse arranger celles-ci en a, b, c, etc

h, l groupes respectivement de n, p, q,...t, u boules, sous la condition: 1° que les boules d'un même groupe soient d'une même couleur, différente néanmoins d'un groupe à l'autre; 2° que les couleurs des boules de chacune des complexions a, b,...l diffèrent de celles des complexions qui les précèdent. On donne en outre, comme condition de possibilité, les rélations

$$m = \alpha + \beta + \ldots + \lambda,$$
$$\nu = a + b + c + \ldots + h + l,$$
$$k = an + bp + cq + \ldots + ht + lu.$$

Tome XVI. Ire Partie. p. 8. Sur les variations brusques de température et de pression atmosphérique, observés du 10 au 13 Janvier (1849), à Louvain par M. Crahay, et à Bruxelles par M. Quetelet. — p. 9. Recherches nouvelles sur le veritable poids atomique du carbone; par M. J. S. Stas. — p. 167. Examen critique du système de la fluidité électrique, par M. Maas. — p. 313. Sur l'application du télégraphe électrique à l'astronomie, par M. Bache, directeur de la triangulation des côtes des Etats-Unis. — p. 317. Sur les variations de température et de pression atmosphérique et sur quelques phénomènes météorologiques observés pendant les mois de janvier et de février 1848; par A. Quetelet. — p. 329. Observations géodésiques et magnétiques faites dans les États autrichiens, pendant les années 1847 et 1848; par M. Kreil, astronome de Prag. — p. 334. Note sur quelques intégrales definies, par M. Meyer. Herr Meyer hat in diesem Aufsatze die folgenden Formeln bewiesen, in denen $[q,p]$ die Anzahl der Combinationen für q Elemente der $p$ten Klasse bezeichnet:

$$
\begin{aligned}
a(a^2+m^2)^{n-1} = {} & a^{2n-1}\cos\left(2n.\operatorname{arctang}\frac{m}{a}\right)\\
& + [2n-1.1]\,a^{2n-2}m\sin\left(2n.\operatorname{arctang}\frac{m}{a}\right)\\
& - [2n-1.2]\,a^{2n-3}m^2\cos\left(2n.\operatorname{arctang}\frac{m}{a}\right)\\
& - \qquad \text{u. s. w.}\\
& + (-1)^{n-1}m^{2n-1}\sin\left(2n.\operatorname{arctang}\frac{m}{a}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a(a^2+m^2)^{\frac{1}{2}(2n-1)} = {} & a^{2n}\cos\left((2n+1)\operatorname{arctang}\frac{m}{a}\right)\\
& + [2n.1]\,a^{2n-1}m\sin\left((2n+1)\operatorname{arctang}\frac{m}{a}\right)\\
& - [2n.2]\,a^{2n-2}m^2\cos\left((2n+1)\operatorname{arctang}\frac{m}{a}\right)\\
& - \qquad \text{u. s. w.}\\
& + (-1)^n m^{2n}\cos\left((2n+1)\operatorname{arctang}\frac{m}{a}\right),
\end{aligned}
$$

$$n(a^2+m^2)^{n-1}=a^{2n-1}\sin\left(2n\,.\,\text{arctang}\,\frac{m}{a}\right)$$

$$-[2n-1.1]\,a^{2n-2}m\cos\left(2n\,.\,\text{arctang}\,\frac{m}{a}\right)$$

$$-[2n-1.2]\,a^{2n-3}m^2\sin\left(2n\,.\,\text{arctang}\,\frac{m}{a}\right)$$

$$+\qquad \text{u. s. w.}$$

$$+(-1)^n m^{2n-1}\cos\left(2n\,.\,\text{arctang}\,\frac{m}{a}\right),$$

$$m(a^2+m^2)^{\frac{1}{2}(2n-1)}=a^{2n}\sin\left((2n+1)\,\text{arctang}\,\frac{m}{a}\right)$$

$$-[2n.1]\,a^{2n-1}m\cos\left((2n+1)\,\text{arctang}\,\frac{m}{a}\right)$$

$$-[2n.2]\,a^{2n-2}m^2\sin\left((2n+1)\,\text{arctang}\,\frac{m}{a}\right)$$

$$+\qquad \text{u. s. w.}$$

$$+(-1)^n m^{2n}\sin\left((2n+1)\,\text{arctang}\,\frac{m}{a}\right).$$

— p. 338. Sur les fractions continues périodiques, par M. Lefrançois. — p. 424. Note sur une nouvelle application curieuse de la persistance des impressions de la rétine, par M. J. Plateau. — p. 428. Note sur la préparation de l'oxyde de cobalt pur et sur l'aluminate de cobalt, par M. P. Louyet. — p. 580. Sur les propriétes dont jouissent les produits infinis qui expriment les racines des nombres entiers, par M. Schaar. — p. 588. Deuxième note sur de nouvelles applications curieuses de la persistance des impressions de la rétine, p. M. Plateau. — p. 613. Expériences comparatives sur la force et la constance du courant produit par différentes piles voltaiques, connues sous le nom de Batteries a courant constant, par P. Louyet. —

Ausser diesen grösseren Aufsätzen enthalten auch diese beiden Bände wieder viele interessante kleinere astronomische und meterorologische Notizen, hauptsächlich von Herrn Quetelet.

Preisaufgabe der Königl. Soc. der Wissenschaften zu Kopenhagen. Eine vollständigere Untersuchung als bis jetzt vom mathematischen Standpunkte aus geschehen ist, der Lehre von dem Widerstande einer Flüssigkeit gegen einen in derselben sich bewegenden festen Körper. Termin Ende August 1851.

LII.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Cours d'Algèbre supérieure, professé à la Faculté des sciences de Paris; par M. J.—A. Serret. Paris. 8° 1849, avec Planche. 7. Fr. 50 C.

Dieses uns leider noch nicht zu Gesicht gekommene Buch wird aber in französischen Zeitschriften sehr gerühmt, und verdient daher den Lesern des Archivs empfohlen zu werden. Die meisten Erscheinungen auf dem Felde der mathematischen Literatur in Frankreich beschränken sich gegenwärtig auf neue Ausgaben älterer Werke von Monge, Lagrange, Laplace, Lacroix, u. s. w.; desto erfreulicher ist es, hier wieder einmal einem grösseren, der allgemeinen Beachtung sehr werthen Originalwerke von einem auch durch andere eigenthümliche Arbeiten schon längst rühmlich bekannten Verfasser zu begegnen.

Aufsuchung der reellen und imaginären Wurzeln einer Zahlengleichung höheren Grades von Simon Spitzer. Mit einem Vorworte von Dr. L. C. Schulz v. Strassnitzki. Aus den naturwissenschaftlichen Abhandlungen, gesammelt und durch Subscription herausgegeben von W. Haidinger. III. Band. 2. Abth. S. 109. Wien 1849. 4°. 1. Thlr.

Herr Prof. Schulz von Strassnitzki hat in der im Literarischen Ber. Nr. VI. S. 90. angezeigten ausgezeichneten Schrift Horner's Methode zur Auflösung der numerischen Gleichungen sehr deutlich erläutert, damals aber sich auf die reellen Wurzeln der Gleichungen beschränkt. In der vorliegenden Abhandlung, welche eigentlich aus zwei Theilen besteht, wird dagegen die genannte Methode auch auf die imaginären Wurzeln der Gleichungen erweitert. In der ersten Abtheilung giebt Herr Prof. Schulz

von Strassnitzki ein Mittel an, um den Ort der imaginären Wurzeln zu finden, oder dieselben zu trennen, weshalb auch der erste Abschnitt Trennung der imaginären Wurzeln überschrieben ist. Die in der zweiten Abtheilung gelehrte Aufsuchung der imaginären Wurzeln gehört dagegen ganz Herrn Spitzer an, welcher sich bei der Division der imaginären Coefficienten durch einen einfachen Kunstgriff half. Wir empfehlen diese Schrift, ebenso wie die frühere des Herrn Professor Schulz von Strassnitzki der Aufmerksamkeit der Kenner recht sehr, und sind der Meinung, dass wir jetzt in den beiden Schriften der Herren Schulz von Strassnitzki und Spitzer zusammen eine sehr vollständige und genügende Anleitung zur Auflösung der numerischen Gleichungen, sowohl rücksichtlich der reellen, als auch rücksichtlich der imaginären Wurzeln besitzen, die zugleich einen sehr grossen Reichthum vollständig ausgerechneter Beispiele enthält, welche natürlich bei dem vorliegenden Gegenstande von besonderer Wichtigkeit und um so verdienstlicher sind, weil die genaue und sorgfältige Ausrechnung derselben nothwendig einen grossen Zeitaufwand in Anspruch nehmen musste.

Sammlung mathematischer Tafeln. Als neue völlig umgearbeitete Auflage von Georgs Freiherrn von Vega grösseren logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, herausgegeben von Dr. J. A. Hülsse. Stereotyp-Ausgabe. Zweiter Abdruck. Vermehrt mit den Zech'schen Tafeln für Addition und Subtraction der Logarithmen. Leipzig. 1849. 8. 3 Thlr. 15 Sgr.

Der erste Adruck dieses sowohl seinem Inhalte als seiner äusseren, dem deutschen Buchhandel und der deutschen Typographie wahrhaft Ehre machenden Ausstattung nach ausgezeichneten Werks ist im Literar. Ber. Nr. I. S. 4 angezeigt worden. Die Einrichtung der Tafeln I—XI ist ganz unverändert geblieben und aus unserer früheren Anzeige hinreichend bekannt, wobei wir jedoch auch jetzt nicht den Wunsch unterdrücken können, dass es dem Herausgeber gefallen haben möchte, in der trigonometrischen Tafel wie bei Callet und in mehreren englischen Tafeln die Winkel von 10 zu 10 Secunden fortschreiten zu lassen, was bei den meisten Rechnungen doch eine sehr grosse Erleichterung gewährt, und die Sicherheit der Rechnung wesentlich fördert, wenn auch auf der andern Seite nicht zu leugnen ist, dass man namentlich bei manchen astronomischen Rechnungen in neuerer Zeit den Gebrauch kleinerer, selbst nur bis auf eine geringere Anzahl von Decimalstellen berechneter Tafeln mit Recht empfohlen hat; solche kleinere Tafeln besitzen wir aber schon eine grosse Anzahl, indem im Gegentheil eine grössere von 10 zu 10 Secunden fortschreitende Tafel, deren die französische und englische Literatur mehrere sehr treffliche besitzt, in einer neuen, auch äusserlich schön ausgestatteten Ausgabe uns wohl noch ganz fehlt, weshalb Herr Hülsse sich gewiss ein besonderes Verdienst erworben haben würde, wenn er seiner Tafel die erwähnte Ausdehnung gegeben hätte oder späterhin noch zu geben sich gefallen liesse. Dann würde freilich das Buch bis auf zwei Bände angewachsen sein, was wir aber für ganz zweckmässig gehalten haben würden, wenn die logarithmischen und trigonometrischen Tafeln in den ersten, alle

übrigen Tafeln in den zweiten Band gebracht worden wären, welche beide Bände dann auch hätten einzeln verkäuflich sein müssen, damit ein Jeder sich nach seinen Bedürfnissen bloss in den Besitz des einen oder des andern Bandes hätte setzen können, indem jedenfalls die logarithmisch-trigonometrische Tafel auch bei Weitem am meisten gebraucht wird, die übrigen Tafeln dagegen nur in einzelnen Fällen Anwendung finden, und bloss zum Nachschlagen mehr vereinzelter Resultate dienen. Die Tafel XII., welche die sogenannten Gaussischen oder Additions- und Subtractions-Logarithmen enthält, hat in dem neuen Abdruck eine ganz veränderte, und in der That sehr vervollkommnete und erweiterte Einrichtung erhalten. Dieselbe ist von Herrn Zech in Tübingen berechnet, und sehr zweckmässig ist es, dass diese Tafel auch einzeln unter dem besonderen Titel:

Tafeln der Additions- und Subtractions Logarithmen für sieben Stellen berechnet von J. Zech. Aus der Vega-Hülsse'schen Sammlung besonders abgedruckt. Leipzig. 1849. 8. 1. Thlr. 15. Sgr.

abgedruckt worden und abgesondert von den übrigen Tafeln verkäuflich ist. Die Einrichtung dieser Tafel scheint uns zweckmässig zu sein, und sie hat jedenfalls Vorzüge vor den bisherigen Tafeln dieser Art, namentlich auch vor der Matthiesen'chen Tafel, welche bisher die vollständigste war.

Wir wünschen dem verdienstlichen Werke recht weite Verbreitung und eifrigen Gebrauch.

Geometrie.

Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche auf öffentlichen Schulen und für Individuen, die sich dem Forstfache, der Mess- und Baukunst widmen, so wie zum Selbstunterricht für jeden Liebhaber dieser Wissenschaft. Enthaltend die theoretische Geometrie, die geradlinige Trigonometrie und Polygonometrie, nebst den Anfangsgründen der Differenzial- und Integral-Rechnung. Verfasst von Georg Winkler, Edlen v. Brückenbrand. Vierte Auflage. Wien. 1849. 8. 2. Thlr.

Dieses ganz elementare, überall besonders für den praktischen Gebrauch berechnete Lehrbuch der Geometrie u. s. w., welches auch Einiges aus der Differenzial- und Integralrechnung, besonders mit Rücksicht auf die allereinfachsten Anwendungen dieser Wissenschaften enthält, ist aus seinen früheren Auflagen hinreichend bekannt, kann aber Praktikern, namentlich Forstleuten, die nur das für ihren praktischen Beruf Allernothwendigste kennen lernen wollen, ohne in irgend einer Beziehung eine höhere mathematische Ausbildung zu erstreben, seiner grossen Deutlichkeit und einfachen Darstellung wegen allerdings wohl empfohlen werden.

Elemente der analytischen Geometrie im Raume am schiefwinkligen Coordinatensysteme von Dr. G. S. Ohm, Rector der polytechnischen Schule in Nürnberg, Professor der Physik und Mathematik an der gleichen Anstalt. Nürnberg. 1849. 4°. 4. Thlr.

Das voliegende Werk bildet den ersten Band eines aus mehreren Bänden bestehenden Werks, welches der Herr Vf. unter folgendem Titel herauszugeben beabsichtigt:

Beiträge zur Molecular-Physik von Dr G. S. Ohm. Nürnberg. 1849. 4°.

Der bis jetzt erschienene erste Band ist aber durchaus rein mathematischen Inhalts und bildet ein für sich bestehendes Ganzes. Um es kurz zu sagen, so enthält dieser Band ein sehr vollständiges System der analytischen Geometrie für das allgemeine schiefwinklige Coordinatensystem. Wie wichtig die Ausführung der analytischen Geometrie in dieser vollständigen Allgemeinheit für die allgemeine Molecular-Physik ist, sieht Jeder sogleich ein, wer mit diesen Gegenständen nur einigermassen bekannt ist, und Niemand mehr kann rücksichtlich dieser grossen Wichtigkeit mit dem Herrn Vf. ganz einerlei Ansicht sein wie der Herausgeber des Archivs, der selbst früher schon einige Versuche von ganz ähnlicher Tendenz gemacht hat, wie z. B. in der Abhandlung: Zur Krystallographie und analytischen Geometrie. Erster Beitrag (Beiträge zur reinen und angewandten Mathematik. Thl. I. Brandenburg. 1838. 4°. S. 149. Nr. VIII.) und in seinen Elementen der analytischen Geometrie. Thl. I. Leipzig, wo die Theorie der geraden Linie in der Ebene und im Raume und die Theorie der Ebene sich auch ganz allgemein für jedes beliebige schiefwinklige Coordinatensystem durchgeführt findet. Er hat sich daher ungemein gefreu't über die in dem vorliegenden grossen, wichtigen und schönen Werke gewonnene grosse Menge merkwürdiger Resultate und die in demselben durchgehends sich kund gebende grosse Eleganz der analytischen Entwickelung und Darstellung. Dieses Werk ist daher die erste vollständige analytische Geometrie in grösster Allgemeinheit, d. h. für jedes beliebige schiefwinklige Coordinatensystem, und jedenfalls eine der bedeutendsten neuern Erscheinungen auf dem Gebiete der mathematischen Literatur, welche von allen Mathematikern und Naturforschern sorgfältigst beachtet zu werden sehr verdient, und auch jüngeren Mathematikern, die bereits einen Cursus über analytische Geometrie gehört haben, Behufs ihrer weiteren Ausbildung, sehr zum sorgfältigen Studium empfohlen werden muss. Die Ueberschriften der einzelnen Abschnitte sind folgende: I. Darstellung der Punkte und Richtungen im beliebigen Coordinatensysteme. (Projectionssysteme. Coordinatensysteme. Doppelsysteme. Besondere Lagen der Richtungen oder Punkte. Besondere Coordinatensysteme. Projectionen durch Coordinaten. Verstellung der Coordinatensysteme. Centralcoordinaten. Reduction der Projectionszahlen.) II. Von der Ebene und Geraden im beliebigen Coordinatensysteme. III. Die Curve und Fläche im beliebigen Coordinatensysteme (Ebene Curven. Krumme Flächen. Doppelt gekrümmte Curven.). IV. Von den verschiedenen Gestalten der Gleichungen, in denen die krum-

men Linien oder Flächen der zweiten Ordnung an verschiedenen Coordinatensystemen sich darstellen lassen (Ebene Curven der zweiten Ordnung. Krumme Flächen der zweiten Ordnung. Einfachste Gleichungen der Flächen zweiter Ordnung.)

Wir wünschen sehr, dass dem von uns hochgeachteten Herrn Vf. recht bald die nöthige Musse zur Herausgabe des zweiten Bandes seines ausgezeichneten und an neuen Resultaten reichen Werkes zu Theil werden möge, welcher die analytische Mechanik einer gleich allgemeinen Behandlung wie im vorliegenden Bande die analytische Geometrie unterwerfen wird. Der dritte Band wird den eigentlichen Untersuchungen über verschiedene Gegenstände der Molecular-Physik gewidmet sein.

Es gewährt eine grosse Freude, namentlich in jetziger Zeit, ein mit so grossem Fleisse und so grosser Kraft und Mühe ausgearbeitetes Werk wie das hier besprochene vor sich liegen zu sehen, zu dessen Vollendung wenigstens in einem, und zwar sehr wichtigen Theile, wir dem Herrn Vf. von Herzen Glück wünschen.

G.

Quelques Théorèmes généraux d'un grand usage dans les hautes Mathématiques; par M. Breton (de Champ). Paris 1849. 4°. (Extrait du Journal de Mathématiques. T. XIII. 1848.)

Mehrere Mathematiker haben sich in neuerer Zeit mit den Theoremen von Stewart beschäftigt, die sich, 64 an der Zahl, in der seltenen Schrift: Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics by Mattew Stewart*). Edinburgh. 1746. beschäftigt, da Stewart nur fünf dieser Theoreme bewiesen hat, und sich unter denselben auch einige falsche oder einer Einschränkung bedürfende befinden. Diesen Theoremen von Stewart ist auch die vorliegende, aus Liouville's Journal de Mathématiques. T. XIII. besonders abgedruckte Abhandlung gewidmet, und es ist zu wünschen, dass auch deutsche Mathematiker diesen Sätzen von Stewart ihre Aufmerksamkeit schenken, und dieselben einer gründlichen Untersuchung unterwerfen möchten. Das Archiv würde dergleichen Untersuchungen, welche die mehr erwähnten Sätze gewiss sehr verdienen, gern aufnehmen. Die Abhandlung des Herrn Breton de Champ hat zunächst nur den Zweck, die Falschheit der drei Fundamentalsätze Stewarts nachzuweisen, und zu zeigen, dass dieselben nur in den in ihren Corollaren ausgesprochenen besonderen Fällen richtig sind. Uns scheint eine weitere Untersuchung auch nach der vorliegenden Arbeit noch ganz zeitgemäss zu sein.

---

*) Stewart war 1717 zu Rothsay in Schottland geboren, und starb zu Edinburg den 23. Januar 1785.

Trigonometrie.

Elements de Trigonométrie rectiligue et sphérique par M. Delisle et M. Gerono. Seconde édition. Paris 1848. 3 Fr. 50 C.

Praktische Geometrie.

Lehrbuch der praktischen Geometrie. Verfasst von Dr. Ignaz Lemoch, Prof. zu Lemberg. Erster Band. Enthaltend: Messung der Linien, Theorie, Beschreibung, Rectification und Gebrauch der Winkelinstrumente. Mit 5 Kupfertafeln. — Zweiter Band. Enthaltend: Die Landesvermessung. Theorie des Höhenmessens. Nivelliren. Mit 5 Kupfertafeln. Wien. 1849. 8. — 2 Thlr. 20. Sgr.

Ein recht deutlich verfasstes Lehrbuch, in dem sich namentlich auch die Beschreibung mancher weniger bekannter kleinerer Instrumente befindet, von denen man öfters zweckmässige Anwendungen machen können wird.

Mechanik.

Lehrbuch der Mechanik. Von Dr. J. P. Broch. Erste Abtheilung. Mechanik der festen Körper. Berlin und Christiania. 1849. 8. 1 Thlr. 20 Sgr.

Dieses neue Lehrbuch der analytischen Mechanik enthält in seiner bis jetzt vorliegenden ersten Abtheilung auf einem verhältnissmässig nur kleinen Raume eine sich durch Eigenthümlichkeit auszeichnende Darstellung der Hauptlehren der Mechanik fester Körper, und verdient zur Beachtung recht sehr empfohlen zu werden, da es auch viele mit besonderer analytischer Eleganz durchgeführte Beispiele für die allgemeinen Lehren und Anwendungen derselben, namentlich bei'm Schwerpunkte, den Trägheitsmomenten, u. s. w. enthält. Leider müssen wir uns ausser dieser allgemeinen Empfehlung des verdienstlichen Werkes, bei dem noch besonders hervorzuheben ist, dass es von einem jüngeren sehr ausgezeichneten norwegischen Mathematiker in sehr fliessender deutscher Sprache verfasst worden ist, und das um so verdienstlicher ist, weil die deutsche mathematische Literatur nur sehr wenige Werke über analytische Mechanik besitzt, begnügen, den Inhalt desselben im Nachstehenden vollständig anzugeben:

Erster Abschnitt. Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung. Cap. I. Wirkungsweise und Maass der Kräfte. Cap. II. Zusammensetzung und Zerlegung der auf einen Punkt wirkenden Kräfte. Cap. III. Statik. Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems mit einander verbundener Punkte, deren Verbindungen durch von der Zeit unabhängige Gleichungen zwischen ihren Coordinaten ausgedrückt werden können. Cap. IV. Anwendungen. *a)* Gleichgewicht eines Punktes. *b)* Gleichgewicht eines festen Körpers. *c)* Gleichgewicht biegsamer Systeme. (Hier auch von den Kettenbrücken). Cap. V. Reduction der Kräfte. Cap. VI. Centralpunkt, Centrallinie und Centralebene der Kräfte. Cap. VII. Anwendung der Theorie des Mittelpunktes paralleler Kräfte auf schwere Körper. Cap. VIII. Anwendung der Theorie der Centrallinie auf schwere magnetische Körper. Cap. IX. Dynamik. Gesetze der Bewegung eines Systems mit einander verbundener Punkte, deren Verbindungen durch von der Zeit unabhängige Gleichungen ausgedrückt werden können. Cap. X. Gesetze der Bewegung eines festen Körpers. *a)* Bewegung des Schwerpunkts eines freien festen Körpers oder eines materiellen Punktes. *b)* Trägheitsmomente und Hauptaxen der Körper. *c)* Gesetze der relativen Bewegung eines festen Körpers in Bezug auf seinen Schwerpunkt. — Man sieht hieraus, wie viel Lehrreiches in diesem besonders auch, wie schon erinnert worden, durch Originalität der Darstellung sich auszeichnenden Buche, dessen Fortsetzung wir mit Verlangen entgegen sehen, enthalten ist. Besonders auch für die Anwendung in der mathematischen Physik ist dieses Buch von Wichtigkeit; weniger scheint auf die Anwendung in der physischen Astronomie oder Mechanik des Himmels bei Abfassung desselben Rücksicht genommen zu sein.

Praktische Mchanik.

Theorie der Dampfmaschinen vom Grafen F. M. G. von Pambour. Aus dem Französischen übersetzt und mit Anmerkungen und einem Anhange begleitet von Dr. A. L. Crelle. Berlin. 1849. 4. 6 Thlr.

Durch Uebersetzung dieses wichtigen Werkes, welches im Original 50 Francs, also in Deutschland 16 bis 17 Thaler kostet, hat sich der Herr Uebersetzer jedenfalls ein grosses Verdienst, namentlich um die Besitzer seines Baujournals, in dem die hier als besonderes Werk vorliegende Uebersetzung zuerst erschienen ist, erworben. Aber auch wer das Baujournal nicht besitzt, erhält die Uebersetzung nun zu dem höchst mässigen Preise von 6 Thlr. Die Berichtigungen, Anmerkungen und Zusätze, welche der Uebersetzung der Herr Uebersetzer beigefügt hat, verleihen derselben noch einen besondern Vorzug vor dem Originale, und empfehlen wir daher diese Uebersetzung allen denen, welche sich für das Dampfmaschinenwesen interessiren, angelegentlichst.

Rapport et Mémoire sur le nouveau Système d'ecluse a flotteur de M. D. Girard; par M. Poncelet. Paris. 1845. 4°. 6 Fr.

Astronomie.

Das so eben erschienene

Ergänzungsheft zu den astronomischen Nachrichten. Vom Herausgeber der astronomischen Nachrichten. Altona. 1849. 4. 3 Thlr 10 Sgr.

enthält unter vielen anderen werthvollen Aufsätzen einen Aufsatz, auf den wir der grossen Wichtigkeit des Gegenstandes und des allgemeinen Interesses wegen, welches derselbe nothwendig in Anspruch nehmen muss, die Leser des Archivs besonders aufmerksam machen müssen. Dies ist der Aufsatz:

Beitrag zur Geschichte der Neptuns-Entdeckung von *Bernhard von Lindenau*. S. 1—31.

In diesem Aufsatze wird mit ungemeiner Klarheit und der grössten Sachkenntniss die Geschichte der Neptuns-Entdeckung von ihren ersten Anfängen an erzählt, und mit grosser Deutlichkeit der Weg vollständig nachgewiesen, welcher zu derselben führte und consequenter Weise nothwendig führen musste, insbesondere auch u. A. erwähnt, dass Bessel während seiner Anwesenheit in England, bei einer Unterredung mit Herschel (12. Juli. 1842.) auf den Grund eigner Untersuchungen versicherte, dass die Gesammtheit der Uranusbeobachtungen durch die Störungen der ältern Planeten allein nicht dargestellt werden könnten und Herschel's vermuthete Einwirkung eines annoch unbekannten Planeten bejahend mit dem Hinzufügen erwiderte: „dass er diese Untersuchung noch nicht vorgenommen habe, allein vorzunehmen gedenke" auch unterm 12. November 1842. an Herschel schrieb: „en souvenir de notre conversation de Collingwood je vous annonce, que je n'oublie pas Uranus."*) Ausser der allgemeinen Erzählung der Entdeckung des Neptun sind aber auch in diesem höchst lehrreichen Aufsatze die Ansprüche, welche Frankreich (Leverrier**)), England (Adams) und Deutschland (Galle) an dieser Entdeckung zu machen haben, mit der grössten Umsicht und tiefsten Sachkenntniss gewürdigt, so dass wir den hochverehrten Vf. dieses Aufsatzes nur bewundern können, wie es ihm möglich gewesen ist, in seinem hohen Alter, und nachdem er eine lange Reihe von Jahren durch die wichtigsten

---

*) M. vergl. Archiv. Thl. XIII. Heft 2. S. 146.

**) Dass in mathematischer Rücksicht hauptsächlich die Umkehrung des Störungsproblems, die wohl Leverrier allein gehören dürfte, oder wenigstens von ihm zuerst versucht worden ist, von Wichtigkeit ist, wird mit Recht besonders hervorgehoben.

Staatsämter dem Studium der Astronomie wohl grösstentheils entfremdet gewesen ist, und zu demselben nur erst seit wenigen Jahren wieder die nöthige Ruhe gefunden hat, alle neueren Arbeiten auf dem Felde dieser Wissenschaft in einer solchen Ausdehnung und mit einer so tiefen Erfassung zu verfolgen. Wir machen deshalb nochmals die Leser des Archivs, die sich für die genannte wichtige Entdeckung interessiren — und wer sollte dies nicht! — auf die vorliegende Abhandlung dringend aufmerksam; denn nirgends werden sie sich eine so gründliche Kenntniss und so richtige Einsicht in die Lage der Sache verschaffen können wie hier.

Physik.

Repertorium der Physik, Eine Zusammenstellung der neueren Fortschritte dieser Wissenschaft. Band VIII. Enthält: Galvanismus, von W. Beetz. — Akustik; von A. Seebeck. — Mit zwei Figurentafeln. Berlin. 1849. 8. 3 Thlr.

A Treatise on Heat. Part I. The Thermometer; Dilatation: Change of State; and Laws of Vapours. By the Rev. Robert V. Dixon, A. M., Fellow and Tutor of Trinity College, Dublin, and Erasmus Smith's Professor of Natural and Experimental Philosophy. (So eben erst erschienen. Price 12s. 6d.)

Études sur l'Aérostation, par M. Edmond Marey-Monge. Paris. 1847. 8°. 10 Fr.

Vermischte Schriften.

Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig liegen uns besonders abgedruckt vor:

A. Seebeck: Ueber die Querschwingungen gespannter und nicht gespannter elastischer Stäbe. Leipzig. 1849. 10 Sgr.

C. F. Naumann: Ueber die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis corneus. Leipzig. 1849. 10 Sgr.

P. A. Hansen: I. Allgemeine Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. II. Ueber die Entwickelung der Grösse

$$(1-2\alpha H+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

nach den Potenzen von α. Leipzig. 1849. 12 Sgr.

A. F. Möbius: Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. Leipzig. 1849. 24 Sgr.

Das erste Heft der Sitzungsberichte von 1849 enthält:

W. Weber: Bemerkungen zu Neumanns Theorie inducirter Ströme.

Lehmann: Ueber einige quantitative Verhältnisse, die den Verdauungsprocess betreffen.

Fechner: Ueber die mathematische Behandlung organischer Gestalten und Processe. (Ein sehr lehrreicher und lesenswerther Aufsatz, den wir solchen, welche in der angegebenen Richtung die Mathematik anwenden wollen, sehr zur Beachtung empfehlen. Der Herr Vf. redet, wie sich von einem solchen Manne erwarten liess, im Allgemeinen der Mathematik sehr das Wort. Auf S. 57. findet sich in einer Note die folgende interessante Bemerkung, die wir den Lesern des Archivs vollständig mittheilen:

„Da vielleicht Jemand Veranlassung nehmen könnte, die Eier ausführlicheren Untersuchungen in Beziehung auf ihre Gestalt zu unterwerfen, so theile ich die von Steiner aufgefundene Formel nach seinen mir mündlich gegebenen Notizen gelegentlich mit. Seien u und v die Radii vectores einer Ellipse, c eine constante Grösse, so ist die Gleichung der Ellipse bekanntlich $u+v=c$; die der Eicurve aber ist $u+mv=c$, wo m auch eine Constante ist. Die Eicurve unterscheidet sich also bloss darin von der Ellipse, dass statt der Summe der beiden Radii vectores die Summe des einen und eines bestimmten Verhältnisstheiles vom andern eine constante Grösse ist. Jenachdem m und c und der Abstand der Brennpunkte verschieden gewählt werden, entstehen verschiedene Eicurven, und nach diesen verschiedenen constanten Werthen würden sich dann möglicherweise die Vogeleier unter verschiedene Klassen stellen. Steiner sagte mir, dass er durch Tatonnement die Coincidenz eines Eies (wenn ich nicht irre, Truthahneies) mit einer unter diese Formel gehörigen Curve (wie ich mich zu erinnern glaube, für den Werth $m=2$) bewährt habe. Umfassendere und methodisch angestellte Versuche würden aber sehr erwünscht sein. Transformirt man die obige Gleichung für rechtwinklige Coordinaten, so stellt sich der vierte Grad der Gleichung leicht heraus."

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. Edited by W. Thomson, M. A. F. R. S. E. Vergl. Literar. Bericht. Nr. XLIX. S. 688.

No. XXI. On Attractions, and on Clairaut's Theorem. By G. G. Stokes. Continued. — Notes on Hydrodynamics. VI. — On Waves. By G. G. Stokes. — On the Problem to Determine in Magnitude, Position, and Figure, the Surface of the Second Order with passes trough Nine given Points. By Richard Townsend. — On the Triple Tangent Planes to a Surface of the Third Order. By the Rev. George Salmon. — On the Symbolical Value of the Integral $\int x^{-1}\partial x$. By the Rev. William Center. — Singular Application of Geometry of Three Dimensions to a Plane Pro-

blem. By G. W. Hearn. — Note on the Motion of Rotation of a Solid of Revolution. By Arthur Cayley. — On a Systeme of Equations connected with Malfatti's Problem, and on another Algebraical System. By Arthur Cayley. (Diese Abhandlung berücksichtigt Herrn C. Adams Schrift: Das Malfatti'sche Problem neu gelöst von C. Adams. Winterthur. 1846. 4. M. s. Literar. Ber. Nr. XXX. S. 451.). — On the Mathematical Theory of Electricity in Equilibrium. V. Effects of Electrical Influence on Internal Spherical, and on Plane, Conducting Surfaces. By William Thomson. — Mathematical Notes: On the different Published Demonstrations of Pascal's Hexagramme. By Thomas Weddle. — Comparison of Expressions for Circular and Elliptic Functions in Continued Fractions. By C. J. Malmstén. — Sur l'Intagration des Equations Différentielles Linéaires. Par C. J. Malmstén.

(No. XXII. will be published on the 1st of February, 1850.)

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Literar. Ber. Nr. XLIX. S. 687.).

Jahrgang 1849. Februar-Heft. S. 57. Hauer, Bericht über die von den Regierungen verschiedener Staaten unternommenen Arbeiten zur geologischen Durchforschung des Landes (England). — S. 98. Fortsetzung des vorhergehenden Berichts, Russland und Frankreich betreffend. Wenn auch weniger in den Kreis unserer Zeitschrift gehörend, führen wir die beiden vorhergehenden Berichte ihres allgemein interessanten Inhalts wegen hier doch an. — S. 155. Ettingshausen, Beitrag zum Beweise des Lehrsatzes vom Parallelogramme der Kräfte. — Wir halten diesen Beitrag zu den Beweisen des Satzes vom Parallelogramme der Kräfte für so bemerkenswerth, dass wir das Wesentliche daraus den Lesern des Archivs im Folgenden mittheilen wollen.

Professor v. Ettingshausen überreicht nachstehenden Beitrag zum Beweise des Lehrsatzes vom Parallelogramme der Kräfte:

Die Zusammenstellung der Materialien zu einem Lehrvortrage der analytischen Mechanik lenkte meine Aufmerksamkeit kürzlich wieder auf die Beweisführung für den Lehrsatz vom Parallelogramme der Kräfte. Offenbar verdienen strenge und directe Beweise vor solchen den Vorzug, worin willkührliche Voraussetzungen oder fremdartige Hilfsmittel angewendet werden. Darum halte ich es, wenigstens in einem strengwissenschaftlichen Lehrgebäude, nicht für angemessen, die Zusammensetzung der Kräfte auf die Zusammensetzung der Bewegungen zu gründen, denn dieser Vorgang nöthiget zu einer Annahme, deren man auf dem rein statischen Felde nicht bedarf. Eben so haben in meinen Augen die Beweise einen geringeren Werth, in welchen die Zusammensetzung der an einem gemeinschaftlichen Angriffspunkte angebrachten Kräfte aus ihrer Wirkungsweise an einem Hebel oder an einem Systeme unveränderlich mit einander verbundener Punkte, auf die man die ursprünglich gegebenen Kräfte versetzen kann, erschlossen wird, weil die Resultirende zweier auf einen Punct wirkender

Kräfte schon gegeben ist, wenn auch nur dieser einzige Punkt existirt; daher die Vorstellung anderer mit ihm verknüpfter Punkte durchaus nicht von der Natur der Sache geboten erscheint.

Wir besitzen mehrere durch die scharfsinnigsten Wendungen sich auszeichnende Beweise für den Satz vom Kräftenparallelogramm, gegen welche die so eben ausgesprochenen Vorwürfe nicht geltend gemacht werden können, welche Beweise daher als genügend scharf betrachtet werden müssen. Meines Erachtens führen diejenigen am kürzesten zum Ziele, welche mit der Zusammensetzung zweier unter einem rechten Winkel auf einen Punkt wirkender Kräfte beginnen. Die Grösse der Resultirenden ergibt sich sogleich durch eine höchst einfache schon vor langer Zeit von Lambert erdachte Betrachtung, deren sich auch Laplace in der *Mécanique céleste* bedient. Zur Nachweisung der Richtung der Resultirenden aber betreten die zwei genannten grossen Mathematiker gänzlich verschiedene Wege, und dabei nimmt der Erstgenannte bloss die Elemente der Mathematik in Anspruch, während der Andere den höheren Calcul gebraucht. Ich habe in meinen Anfangsgründen der Physik versucht dem Lambert'schen Beweise durch eine eigenthümliche Einkleidung eine noch grössere Einfachheit zu geben; mittelst der von mir gewählten Construction lässt sich aber, wenn die Zuhilfenahme des höhern Calculs gestattet ist, eine Deduction zu Stande bringen, die mir besonders geeignet scheint in einen Lehrcurs der Mechanik aufgenommen zu werden, dem der Vortrag der Differenzial- und Integralrechnung vorangeht. Diese Deduction will ich nun auseinander setzen.

Es handelt sich hier, wie gesagt, bloss um die Angabe der Richtung der Resultirenden zweier unter einem rechten Winkel auf einen Punkt wirkender Kräfte.

Da bei gleichmässiger Vervielfältigung der Kräfte die Resultirende sich ohne Aenderung ihrer Richtung in demselben Masse vervielfältigt, so wird die Lage der Geraden, längs welcher die Resultirende wirkt, lediglich durch das Verhältniss der Kräfte bestimmt. Sind also P, Q die Grössen der beiden Kräfte und bezeichnet α den Winkel, den die Richtung ihrer Resultirenden R mit der Richtung von P bildet, so ist α eine gewisse Function des Quotienten $\frac{Q}{P}$ und man kann daher

$$\alpha=f\left(\frac{Q}{P}\right)$$

setzen.

Man denke sich an dem gegebenen Angriffspunkte, senkrecht gegen die Richtung von R und nach der Seite hin, auf welcher die Richtung von Q liegt, irgend eine neue Kraft S angebracht und bezeichne den Winkel zwischen der Richtung der Resultirenden U der zwei Kräfte R und S und der Richtung von R mit β, so ist auch

$$\beta = f\left(\frac{S}{R}\right)$$

Die Kraft S kann als die Resultirende zweier Kräfte betrachtet werden, wovon die eine Q' nach der Richtung von Q und die zweite P' der Richtung von P gerade entgegengesetzt wirkt. Nach Obigem erscheint U als die Resultirende von P, Q und S, mithin auch als die Resultirende der auf den vorhandenen Angriffspunkt unter einem rechten Winkel wirkenden Kräfte $P-P'$ und $Q+Q'$, und es macht die Richtung dieser Resultirenden mit der Richtung der ersten Kraft den Winkel $\alpha+\beta$: demnach besteht die Gleichung

$$\alpha + \beta = f\left(\frac{Q+Q'}{P-P'}\right).$$

Die Richtungen der Kräfte S, Q', P' bilden genau dieselben Winkel wie die Richtungen von R, P, Q, mithin stehen erstere Kräfte in denselben Verhältnissen wie letztere, d. h. es ist

$$P' : Q = Q' : P = S : R$$

woraus

$$P' = \frac{QS}{R} \text{ und } Q' = \frac{PS}{R}$$

folgt. Diess gibt

$$\frac{Q+Q'}{P-P'} = \frac{Q+\frac{PS}{R}}{P-\frac{QS}{R}} = \frac{\frac{Q}{P}+\frac{S}{R}}{1-\frac{Q}{P}\cdot\frac{S}{R}}.$$

Es sei nun zur Abkürzung $\frac{Q}{P} = x$ und $\frac{S}{R} = y$, so wird nach obigen Gleichungen

$$\alpha = f(x),\ \beta = f(y) \text{ und } \alpha+\beta = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),$$

mithin

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Diese Gleichung führt zur Kenntniss der Form der Function f. Zu diesem Zwecke differenzire man die Gleichung, indem man einmal die eine, das zweite Mal die andere der beiden von einander unabhängigen Grössen x, y als veränderlich behandelt; man erhält, $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ gesetzt,

$$f'(x)=f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\cdot\frac{1+y^2}{(1-xy)^2},$$

$$f'(y)=f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\cdot\frac{1+x^2}{(1-xy)^2}.$$

Hiernach ist

$$(1+x^2)f'(x)=(1+y^2)f'(y).$$

Da zwischen x und y kein Zusammenhang obwaltet, so kann diese Gleichung nicht bestehen, wofern nicht jede Seite derselben sich auf eine und dieselbe beständige Grösse reducirt. Es sei A diese Constante, so ist

$$(1+x^2)f'(x)=A$$

oder

$$f'(x)=\frac{A}{1+x^2},$$

mithin

$$f(x)=\int\frac{Adx}{1+x^2}=A\,.\,\text{arc. tang.}\,x+\text{Const.}$$

Denkt man sich die Kraft Q hinweggenommen, so fällt R mit P zusammen und α geht in 0 über. Für $x=0$ hat man also $f(x)=0$, daher verschwindet die durch die Integration eingeführte Constante und es bleibt

$$f(x)=A.\text{arc. tang.}\,x.$$

Lässt man aber $P=0$ sein, wodurch R mit Q zusammenfällt, so wird $\alpha=\frac{\pi}{2}$, mithin geht bei der hier gemachten Annahme $x=\infty$ die Function $f(x)$ in $\frac{\pi}{2}$ über. Diess gibt

$$\frac{\pi}{2}=A.\text{arc. tang.}\,\infty=A.\frac{\pi}{2},$$

woraus $A=1$ folgt. Hiedurch erhält man endlich

$$f(x)=\text{arc. tang.}\,x,$$

$$\text{d. i. }\alpha=\text{arc. tang.}\,\frac{Q}{P}\text{ oder tang.}\,\alpha=\frac{Q}{P},$$

welches Resultat auf die mit der Darstellung des Kräftenparallelogrammes verknüpfte Construction der Richtung der Resultirenden der vorhandenen Kräfte führt.

Bei dieser Deduction ist, wie man sieht, zur Bestimmung der Richtung der Resultirenden der gegebenen Kräfte die Kenntniss der Grösse dieser Resultirenden nicht erforderlich. Es ist also gleichgiltig, ob der Vortrag mit der Bestimmung der Grösse oder der Richtung der Resultirenden beginnt.

Jahrgang 1849. März-Heft. S. 159. Stampfer: Ueber den Gebrauch der Nivellir-Instrumente aus der Werkstätte des k. k. polytechnischen Instituts auf wissenschaftlichen Reisen. — S. 179. Schrötter: Commissionsbericht (d. H. Baumgartner, Ettingshausen, Kunzek, Stampfer und Schrötter) über die in der österr. Monarchie von Seite der k. Akademie zu veranlassenden meteorologischen Beobachtungen. — S. 208. Stampfer's Methode der Visirung der Fässer vom k. k. Ministerium für Handel etc. der Akademie zur Begutachtung zugewiesen. — S. 221. Stampfer: Vorschlag eines Barometers, welches den mittlere Barometerstand für beliebige Zeitperioden angibt.

Jahrgang 1849. April-Heft. S. 227. Stampfer: Darstellung einer möglichst brauchbaren geometrischen Visirmethode für Fässer. — S. 247. Boguslawski: Schreiben an die Akademie (die vorläufige angenäherte Parallaxenbestimmung der Sonne betreffend). — S. 249. Doppler: Ueber eine bisher noch unbenützte Quelle magnetischer Declinationsbeobachtungen. — S. 261. Columbus: Magnetisches Observatorium zu Linz und Kirchschlag. — S. 267. Pierre: Ueber das Spannkraft-Maximum der Dämpfe in der Luft. — S. 273. Prechtl: Ueber sein Werk: „Untersuchung über den Flug der Vögel.“ — S. 276. Prettner: Meteorologische Beobachtungen zu Klagenfurt. — S. 276. Steinheil: Ueber seine neueren Arbeiten zur Erzielung genauer Normalgewichte. Ueber das Centrifugal-Wurfgeschoss.

Jahrgang 1849. Mai-Heft. S. 291. Stampfer: Ueber die in Preussen übliche Visir- Methode für Fässer. — S. 295. Baumgartner: Ueber die Leitkraft der Erde für Electricität. — S. 312. v. Ettingshausen: Bericht über Peche's Abhandlung über Integration irrationaler Differentialformeln. — S. 322. Doppler: Ueber ein Mittel die Brechung der Schallstrahlen experimentell nachzuweisen und numerisch zu bestimmen. — S. 347. Kreil: Abhandlung über den Einfluss der Alpen auf die Aeusserungen der magnetischen Erdkraft.

Auszug aus den Sitzungs-Protokollen des Naturwissenschaftlichen Vereins in Halle. (Erstes Jahr vom Juni 1848 — Juni 1849.) Mit einer lithogr. Tafel. Halle.

Diese Sitzungsberichte einer naturwissenschaftlichen Privatgesellschaft, welche neben der älteren naturforschenden Gesellschaft in Halle sich gebildet hat, geben ein sehr erfreuliches Bild von dem Wirken dieser Gesellschaft und verdienen allgemein beachtet zu werden. Es ist in diesen Berichten ausser vielen interessanten kleineren Notizen auf S. 1—S. 14. und S. 15—S. 21. auch eine grössere Abhandlung des Lehrers Herrn Hellwig über die Gesetze der Blattstellung abgedruckt, welche auch in mathematischer Rücksicht vieles Interessante darbietet, und Jedem empfohlen werden kann, wer sich in möglichster Kürze eine genügende Kenntniss

der in dieser Abhandlung besprochenen mathematischen Gesetze der Blattstellung, eine Lehre, zu der bekanntlich C. Schimper, A. Braun, C. F. Naumann u. A. den Grund gelegt haben, verschaffen will.

The American Journal of Science and Arts. Conducted by Professors B. Silliman and B. Silliman, Ir., and James D. Dana. Second Series. Vol. VI. November. 1848. New Heaven. 8.

III. On the Orbits of the Asteroids; by B. A. Gould. — V Objections to the Theories severally of Franklin, Dufay and Ampère, with an Effect to Explain Electrical Phenomena by Statical or Undulatory Polarization; by Prof. Robert Hare. — XIX. On a New empirical Formula for ascertaining the Tension of Vapor of Water at any Temperature; by J. H. Alexander. — XXII. Results of Analytical Researches in the Neptunian Theory of Uranus; by Enoch F. Burr. — XXIX. (Fortsetzung von Nr. XIX.). — XXX. Considerations on the Divisibility of Magnitude; by J. H. Alexander.

Die übrigen Abhandlungen sind grösstentheils chemischen und geologischen Inhalts und gehören daher nicht in den Kreis des Archivs.

Institut national de France.

Grand prix de Mathématiques a décerner en 1850.

Les travaux récents de plusieurs géomètres ayant ramené l'attention sur le dernier théorème de Fermat, et avancé notablement la question, même pour le cas général, l'Académie propose de lever les dernières difficultés qui restent sur ce sujet. Elle met donc au concours pour le grand prix de Mathématiques, à décerner en 1850, le problème suivant:

Trouver pour un exposant entier *quelconque* n les solutions en nombres entiers et inégaux de l'équation $x^n + y^n = z^n$, ou prouver qu'elle n'en a pas.

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de trois mille francs. Les Mémoires devront être arrivés au Secretariat de l'Académie avant le 1er octobre 1850. Ce terme est de rigueur. Les noms des auteurs seront contenus dans un billet cacheté, qui ne sera ouvert que si la pièce est couronnée.

Fig. 2.

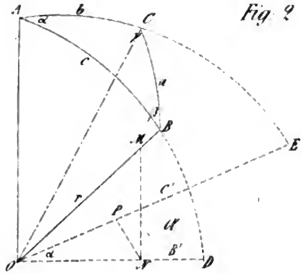


Fig. 3.

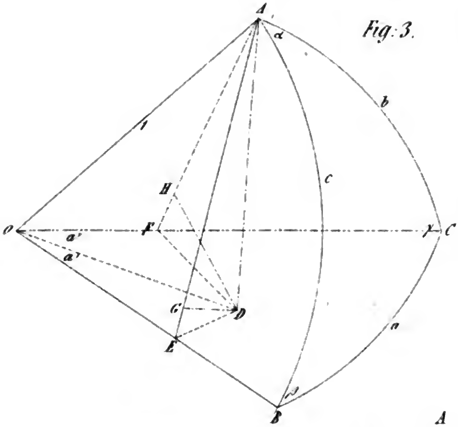
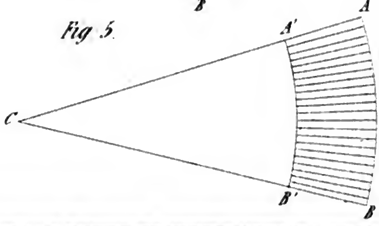


Fig. 5.



Taf. II.

Fig: 2.

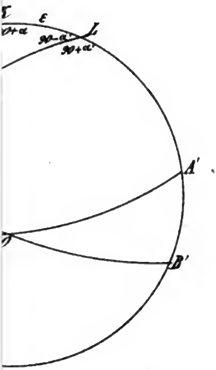
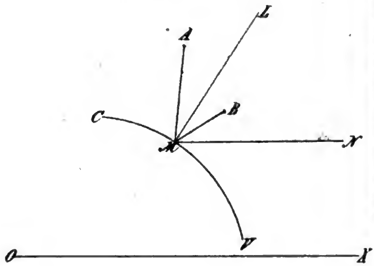


Fig: 3.



5.

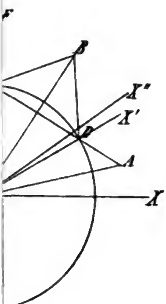


Fig. 6.

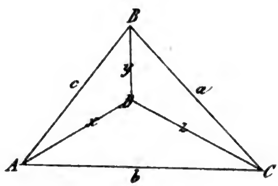


Fig. 3.

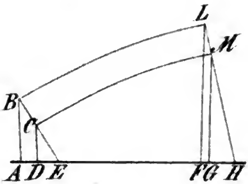


Fig. 4.

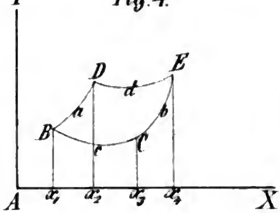
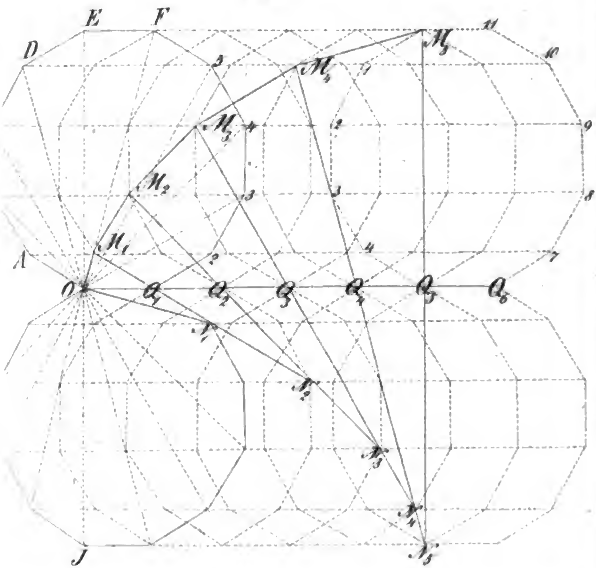


Fig. 9.



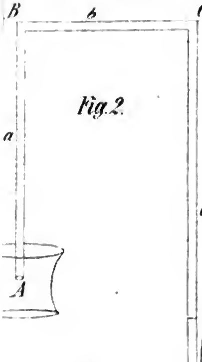


Fig. 2.

Fig. 6.

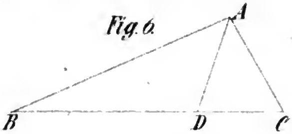


Fig. 5.

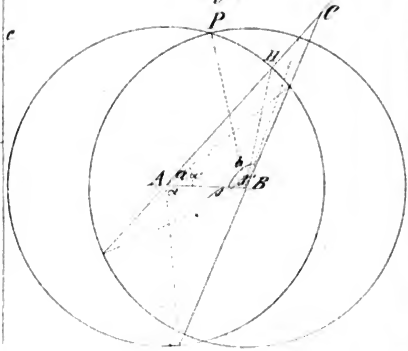


Fig. 7.

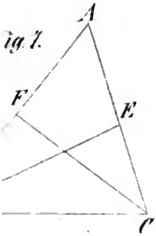
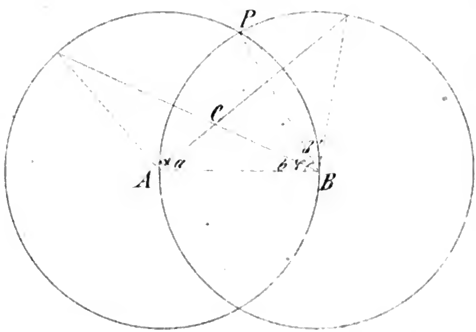


Fig. 4.



Taf.V.

Fig. 2.

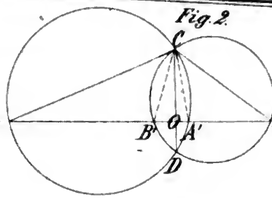


Fig. 3.

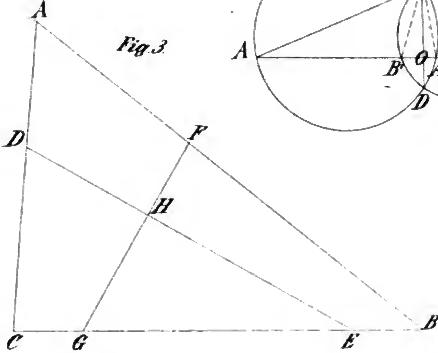


Fig. 4.

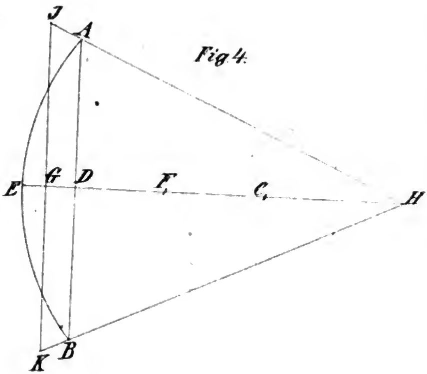
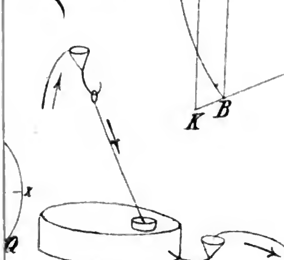
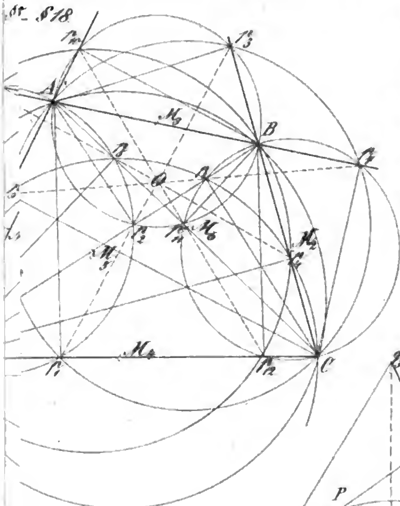


Fig. 5.

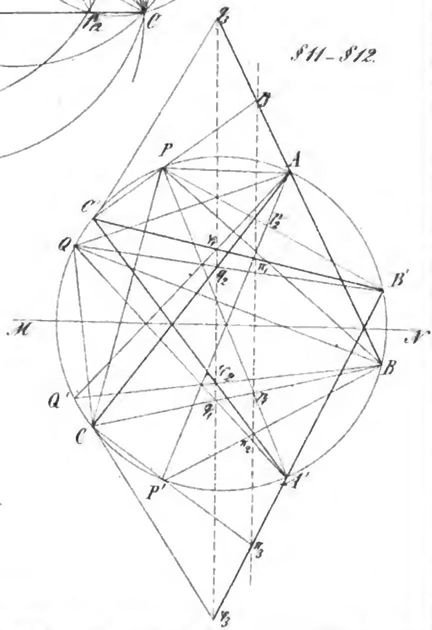


Zu der Abhandlung № XXXV über Transversalen im Dreieck und den ihnen zugeordneten Punkt von H. Dr. Bogman.

§ 18.



§ 11 – § 12.



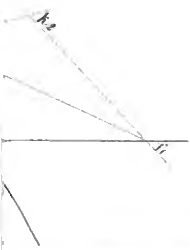


Fig. 2.

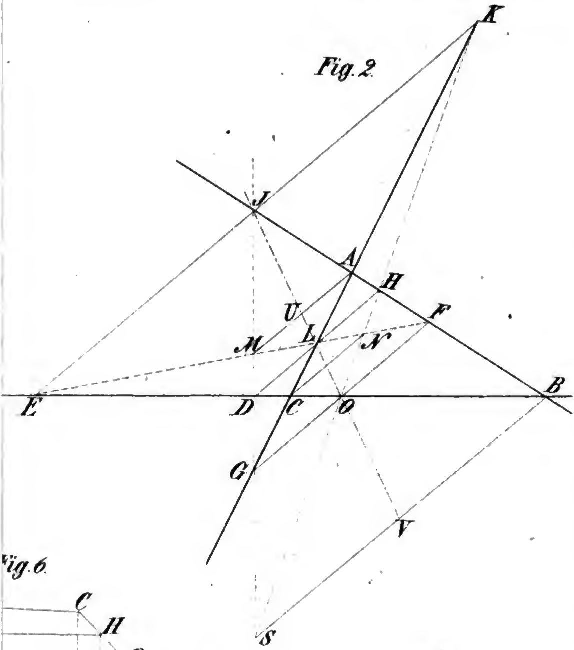
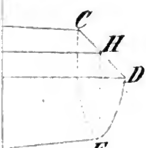


Fig. 6.



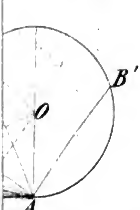


Fig. 3.

